

УДК 621.397.2

ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАЗДЕЛИМЫХ ОПТИМИЗИРОВАННЫХ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРОВ В ЗАДАЧАХ СЖАТИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Кобелев В.Ю., Приоров А.Л.

Введение

Методы обработки изображений с использованием вейвлетов получают все большее распространение [1-5]. Не в последнюю очередь это связано с разработкой эффективных алгоритмов вейвлет-разложения [4, 5] и представления вейвлет-фильтров с оптимизированными частотно-временными свойствами [3, 6, 7].

Способом обработки изображений, получившим наибольшее распространение, является последовательное разложение изображений по строкам и столбцам. Применительно к двумерным вейвлет-фильтрам такой вид обработки соответствует использованию двумерных разделимых фильтров, импульсная характеристика которых есть тензорное произведение импульсных характеристик соответствующих одномерных фильтров [8, 9].

Более сложный вариант синтеза двумерных вейвлет-функций – выбор неразделимого базиса. Неразделимый вейвлет-фильтр позволяет более гибко подойти к задаче синтеза вейвлет-фильтра с заданной частотной избирательностью. Классический способ представления неразделимого вейвлет-базиса – построение двумерной масштабирующей функции $\varphi(x, y)$ и соответствующих ей трех ортогональных вейвлет-функций $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$, $\psi_3(x, y)$ [8].

Такое представление неразделимого вейвлет-базиса не является единственным, в литературе представлены также алгоритмы формирования двумерных неразделимых вейвлет-базисов с использованием масштабирующей функции $\varphi(x, y)$ и одной или двух вейвлет-функций (например, методы двумерного лифтинга [8], “шахматная” схема разложения [5]).

Расчет вейвлет-фильтров с оптимизированной частотной избирательностью

Пусть F^0 – исходное изображение размером $N_1 \times N_2$ пикселей, F^1 – сжатое в 4 раза изображение, C'_{lm} – импульсная характеристика двумерного вейвлет-фильтра, тогда связь между этими компонентами представим в виде [8]:

$$F^1_{jk} = \sum_{l,m} F^0_{2j+1, 2k+m} C'_{lm} \quad (1)$$

Приводится расчет оптимизированного двумерного неразделимого вейвлет-базиса, соответствующего классической схеме разложения на четыре частотные плоскости. Представленный алгоритм синтеза оптимального двумерного вейвлет-фильтра осуществляет оптимизацию его частотной избирательности в соответствии с амплитудным спектром изображения с целью минимизации среднеквадратичной ошибки восстановленного изображения, причем при восстановлении используются только низкочастотные коэффициенты разложения. Рассмотрены также проблемы применения двумерных вейвлет-фильтров с оптимизированной частотной избирательностью для многоуровневого вейвлет-разложения изображения.

Соотношение (1) – свертка с последующей децимацией. Через операцию фильтрации оно может быть представлено следующим образом:

$$F^1(j\omega_1, j\omega_2) = F^0(j\omega_1, j\omega_2) H'(j\omega_1, j\omega_2) * K(j\omega_1, j\omega_2), \quad (2)$$

где $H'(j\omega_1, j\omega_2)$ – Фурье-образ последовательности C'_{lm} ,

$$C'_{lm} = C_{N_1-l, N_2-m}, \text{ а } K(j\omega_1, j\omega_2) -$$

Фурье-образ последовательности K_{lm} , состоящей из нулей и единиц ($K_{lm} = 1$, при l, m – четных одновременно, $K_{lm} = 0$ – при прочих значениях l, m). Следует отметить, что в выражении (2) размеры двумерных последовательностей F^1 и F^0 одинаковы, поскольку после процедуры децимации недостающие отчеты заменены нулями. Опуская математические выкладки, запишем спектр сжатого сигнала

$$\begin{aligned} F^1(j\omega_1, j\omega_2) = & \frac{1}{2} F^0(j\omega_1, j\omega_2) H'(j\omega_1, j\omega_2) + \\ & \frac{1}{2} F^0(j(\omega_1 + \pi), j\omega_2) H'(j(\omega_1 + \pi), j\omega_2) + \\ & \frac{1}{2} F^0(j\omega_1, j(\omega_2 + \pi)) H'(j\omega_1, j(\omega_2 + \pi)) + \\ & \frac{1}{2} F^0(j(\omega_1 + \pi), j(\omega_2 + \pi)) H'(j(\omega_1 + \pi), j(\omega_2 + \pi)) \end{aligned} \quad (3)$$

Восстановленное изображение определится посредством свертки [8]

$$F^{0*}_{jk} = \sum_{l,m} F^1_{lm} C_{j-2l, k-2m} \quad (4)$$

В спектральной области выражение (4) представимо в виде

$$F^{0*}(j\omega_1, j\omega_2) = F(j\omega_1, j\omega_2) H(j\omega_1, j\omega_2), \quad (5)$$

где $H(j\omega_1, j\omega_2) = \sum_{n_1, n_2} C_{n_1, n_2} e^{-j\omega_1 n_1} e^{-j\omega_2 n_2}$.



Применив операцию фильтрации (5) к выражению (3), получим:

$$\begin{aligned}
 2F^{0*}(j\omega_1, j\omega_2) &= 2H(j\omega_1, j\omega_2)F^1(j\omega_1, j\omega_2) = \\
 &= F^0(j\omega_1, j\omega_2)H'(j\omega_1, j\omega_2)H(j\omega_1, j\omega_2) + \\
 &+ F^0(j(\omega_1 + \pi), j\omega_2)H'(j(\omega_1 + \pi), j\omega_2)H(j\omega_1, j\omega_2) + \\
 &+ F^0(j\omega_1, j(\omega_2 + \pi))H'(j\omega_1, j(\omega_2 + \pi))H(j\omega_1, j\omega_2) + \\
 &+ F^0(j(\omega_1 + \pi), j(\omega_2 + \pi))H'(j(\omega_1 + \pi), j(\omega_2 + \pi))H(j\omega_1, j\omega_2).
 \end{aligned} \quad (6)$$

При сопоставлении (6) со спектром исходного сигнала видно, что в восстановленном сигнале присутствуют компоненты, обусловленные эффектом наложения (последние три слагаемых), отрицательно влияющие на восстановленный сигнал. Частотные характеристики $H'(j\omega_1, j\omega_2)$ и $H(j\omega_1, j\omega_2)$

связаны соотношением

$$H'(j\omega_1, j\omega_2) = e^{-j\omega_1(N_1-1)} e^{-j\omega_2(N_2-1)} H(-j\omega_1, -j\omega_2). \quad (7)$$

С целью сокращения на фазовый множитель, сделаем предположение, что восстановленное изображение отличается от оригинала только фазовой задержкой

$$F^{0*}(j\omega_1, j\omega_2) = e^{-j\omega_1(N_1-1)} e^{-j\omega_2(N_2-1)} F^0(j\omega_1, j\omega_2). \quad (8)$$

После подстановки (7), (8) в (6) и некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned}
 2F^0(j\omega_1, j\omega_2) &= F^0(j\omega_1, j\omega_2)H(-j\omega_1, -j\omega_2)H(j\omega_1, j\omega_2) + \\
 &+ F^0(j(\omega_1 + \pi), j\omega_2)H(-j(\omega_1 + \pi), -j\omega_2)H(j\omega_1, j\omega_2) + \\
 &+ F^0(j\omega_1, j(\omega_2 + \pi))H(-j\omega_1, -j(\omega_2 + \pi))H(j\omega_1, j\omega_2) + \\
 &+ F^0(j(\omega_1 + \pi), j(\omega_2 + \pi))H(-j(\omega_1 + \pi), -j(\omega_2 + \pi))H(j\omega_1, j\omega_2).
 \end{aligned} \quad (9)$$

В связи с тем, что рассматриваемые вейвлет-функции являются ортогональными, дополнительно на частотные свойства соответствующих им вейвлет-фильтров накладывается ограничение (условие квадратурно-зеркальности) [8]:

$$\begin{aligned}
 |H(j\omega_1, j\omega_2)|^2 &+ |H(j\omega_1 + \pi, j\omega_2)|^2 + \\
 |H(j\omega_1, j\omega_2 + \pi)|^2 &+ |H(j\omega_1 + \pi, j\omega_2 + \pi)|^2 = 1
 \end{aligned} \quad (10)$$



а)

Уравнение (9) с учетом (10) может быть преобразовано к виду

$$\begin{cases}
 F^0(j\omega_1, j\omega_2)H(j(\omega_1 + \pi), j\omega_2) - F^0(j(\omega_1 + \pi), j\omega_2)H(j\omega_1, j\omega_2) = 0; \\
 F^0(j\omega_1, j\omega_2)H(j\omega_1, j(\omega_2 + \pi)) - F^0(j\omega_1, j(\omega_2 + \pi))H(j\omega_1, j\omega_2) = 0; \\
 F^0(j\omega_1, j\omega_2)H(j(\omega_1 + \pi), j(\omega_2 + \pi)) - F^0(j(\omega_1 + \pi), j(\omega_2 + \pi))H(j\omega_1, j\omega_2) = 0.
 \end{cases} \quad (11)$$

Рассмотрим модуль выражений (11)

$$\begin{cases}
 F^0(\omega_1, \omega_2)H(\omega_1 + \pi, \omega_2) = F^0(\omega_1 + \pi, \omega_2)H(\omega_1, \omega_2); \\
 F^0(\omega_1, \omega_2)H(\omega_1, \omega_2 + \pi) = F^0(\omega_1, \omega_2 + \pi)H(\omega_1, \omega_2); \\
 F^0(\omega_1, \omega_2)H(\omega_1 + \pi, \omega_2 + \pi) = F^0(\omega_1 + \pi, \omega_2 + \pi)H(\omega_1, \omega_2).
 \end{cases} \quad (12)$$

Возведем в квадрат правые и левые части системы (12), сложим почленно и применим свойство квадратурно-зеркальности (10). В результате получим конечное выражение

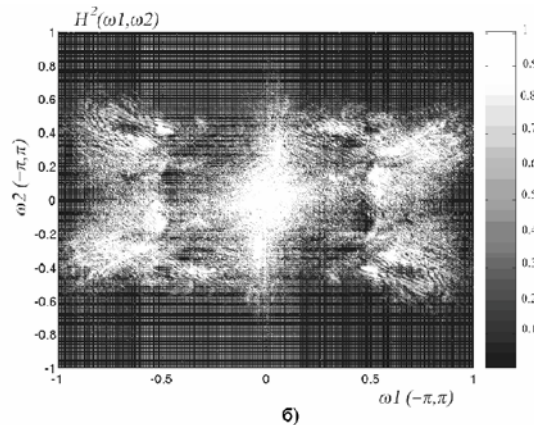
$$H^2(\omega_1, \omega_2) = \frac{F^2(\omega_1, \omega_2)}{F^2(\omega_1 + \pi, \omega_2) + F^2(\omega_1, \omega_2 + \pi) + F^2(\omega_1 + \pi, \omega_2 + \pi) + F^2(\omega_1, \omega_2)}. \quad (13)$$

Выражение (13) позволяет найти амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) двумерного вейвлет-фильтра, обеспечивающего восстановление изображений, используя только низкочастотные компоненты вейвлет-разложения. Расчет АЧХ фильтра согласно (13) осуществляется только на основании значений амплитудного спектра исходного изображения. На рис. 1 представлены примеры тестовых изображений и расчет квадратов АЧХ соответствующих вейвлет-фильтров $H^2(\omega_1, \omega_2)$.

Рассмотрим подробнее процедуру децимации. В нашем случае процедура децимации осуществляется, используя поэлементное умножение значений изображения на оператор K_{lm} . Знаменатель выражения (13) представляет собой квадрат амплитудного спектра изображения после операции децимации

$$\begin{aligned}
 F_1^2(\omega_1, \omega_2) &= F^2(\omega_1 + \pi, \omega_2) + F^2(\omega_1, \omega_2 + \pi) + \\
 &+ F^2(\omega_1 + \pi, \omega_2 + \pi) + F^2(\omega_1, \omega_2)
 \end{aligned} \quad (14)$$

где $F_1(\omega_1, \omega_2)$ – амплитудный спектр изображения после децимации, $F(\omega_1, \omega_2)$ – амплитудный спектр исходного изображения.



б)

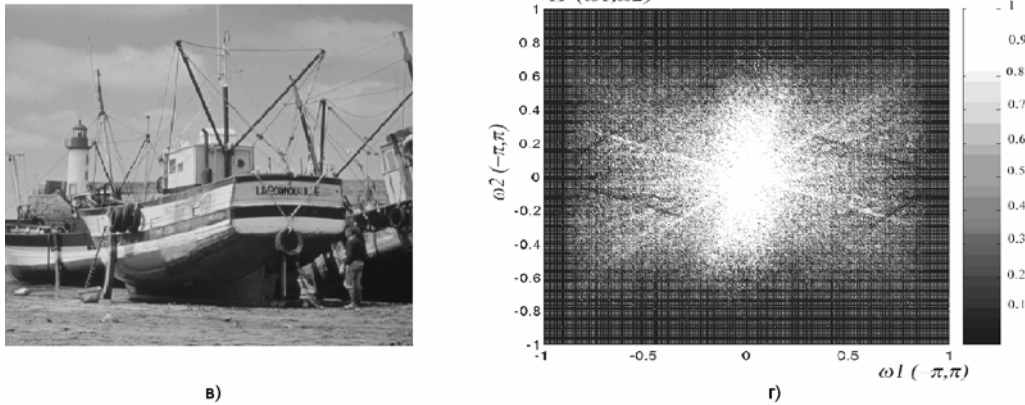


Рис. 1. Тестовые изображения (а, в) и квадраты АЧХ соответствующих “согласованных” вейвлет-фильтров (б, г)

Основное отличие $F_1(\omega_1, \omega_2)$ от $F(\omega_1, \omega_2)$ заключается в наличии ярко выраженного эффекта наложения спектра вследствие процедуры децимации. В данном случае мощность ошибки наложения максимальна (т.к. никакие промежуточные фильтры, снижающие воздействие эффектов наложения, принципиально не применялись). Таким образом, выражение (14) описывает изображение, максимально искаженное процедурой сжатия. Фильтр $H(j\omega_1, j\omega_2)$, АЧХ которого удовлетворяет выражению (13), получен из соотношения исходного неискаженного изображения и изображения, искаженного сжатием. Он обеспечивает максимально возможное отношение сигнал/шум для восстановленного изображения и попадает под определение согласованного фильтра [3]. Поэтому можно считать, что двумерный вейвлет-фильтр с АЧХ, определяемой выражением (13), представляет согласованный двумерный вейвлет-фильтр. Дополнительно стоит отметить, что полученный вейвлет-фильтр $H(j\omega_1, j\omega_2)$ является также квадратурно-зеркальным. Из рис. 1 видно, что квадрат АЧХ согласованного вейвлет-фильтра имеет сильно изрезанную структуру, и поэтому его порядок сопоставим с размером исследуемого изображения ($N \times N$ пикселей).

Следующей задачей является расчет двумерного вейвлет-фильтра с параметрами, близкими к параметрам согласованного вейвлет-фильтра, но имеющего сравнительно низкий порядок. Под термином *двумерный оптимизированный вейвлет-фильтр* представим вейвлет-фильтр $\tilde{H}(j\omega_1, j\omega_2)$ порядка $M \times M < N \times N$, удовлетворяющий условию

$$\lim_{M \rightarrow N} \iint |H^2(\omega_1, \omega_2) - \tilde{H}^2(\omega_1, \omega_2)| d\omega_1 d\omega_2 \rightarrow 0. \quad (15)$$

Таким образом, оптимизированный вейвлет-фильтр понимается как фильтр с оптимизированной частотной избирательностью.

Расчет такого фильтра заданного порядка включает следующие этапы:

- аппроксимацию квадрата АЧХ тригонометрическим полиномом меньшего порядка;
- расчет соответствующей фазовой характеристики фильтра (решение фазовой задачи выполнено с использованием модифицированного алгоритма Герхберга [10]).

На рис. 2 представлен амплитудный спектр оптимизированного вейвлет-фильтра, порядка 60×60 , рассчитанный для тестового изображения “Барбара”.

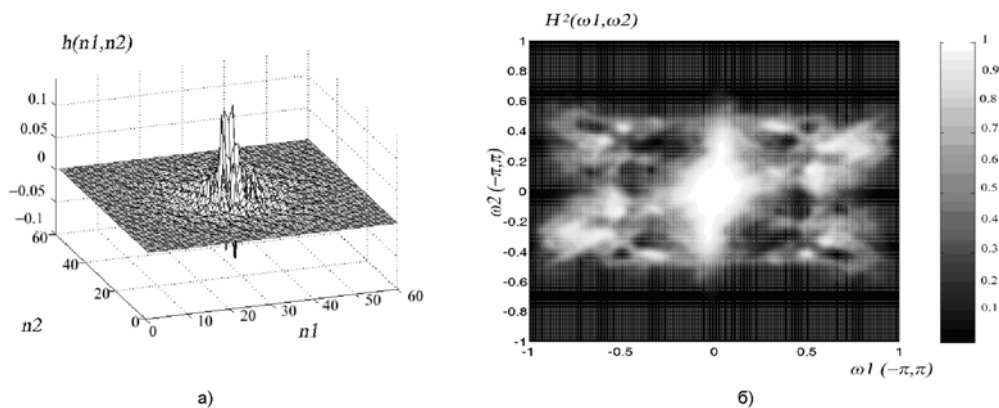


Рис. 2. Пример вейвлет-фильтра с оптимизированной частотной избирательностью: а) - импульсная характеристика фильтра порядка 60×60 , б) – квадрат его АЧХ

Многоуровневое вейвлет-разложение изображений с использованием оптимизированных вейвлет-фильтров

Оценка эффективности применения оптимизированных вейвлет-фильтров к задаче сжатия изображений выполнена на базе большого набора тестовых изображений с использованием как одноуровневой, так и многоуровневой схем обработки. Экспериментально получено, что приемлемый порядок вейвлет-фильтра для обработки изображения, разрешением 512×512 пикселей, составляет 30×30 . Представленный порядок при достаточно точном описании особенностей амплитудного спектра изображения позволяет ограничиться сравнительно небольшим числом сохраняемых отчетов импульсной характеристики фильтра. В работе за оценку качества восстановленного изображения принято нормированное средне-квадратичное отклонение восстановленного изображения от исходного тестового изображения:

$$\varepsilon_{НСКО} = -10 \lg \frac{\sum_{n=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} (F_{n,m}^0 - F_{n,m}^{0*})^2}{\sum_{n=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} (F_{n,m}^0)^2}, \text{ [дБ]}$$

где $F_{n,m}^{0*}$ - восстановленное изображение, $F_{n,m}^0$ - оригинальное изображение.

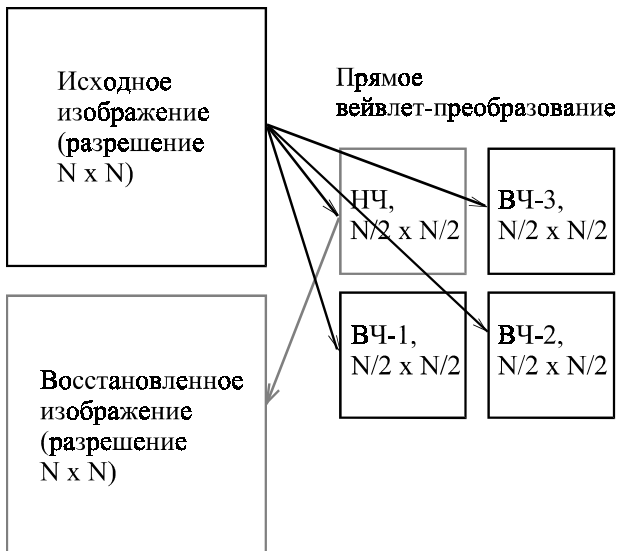


Рис. 3. Схема одноуровневого вейвлет-разложения изображения

Наиболее интересные результаты применения оптимизированных вейвлет-фильтров получены относительно многоуровневой схемы обработки. Относительно одноуровневой схемы (вариант реализации – рис. 3) приведем лишь обобщающие выводы:

- из всего набора стандартных тестовых изображений, наименьшая ошибка НСКО восстановленного изображения получена на тестовом изображении “Барбара” – 21 дБ (при использовании вейвлетов Добеши-8, отношение сигнал/шум восстановленного изображения составило 19,3 дБ). В первую очередь это объясняется наличием ярко выраженных высокочастотных особенностей (“полосы на одежде и скатерти”), для выделения которых происходит оптимизация АЧХ вейвлет-фильтра;
- при обработке прочих стандартных тестовых изображений применение вейвлет-фильтров с оптимизированной АЧХ улучшает отношение С/Ш восстановленного изображения лишь на доли децибел. Это объясняется либо отсутствием ярко выраженных специфических особенностей на изображениях, либо недостаточностью порядка используемого вейвлет-фильтра;
- другая группа изображений, где представляемый алгоритм показал значительный выигрыш (порядка $2 \div 4$ дБ), – это изображения, восстановленные с использованием высокочастотных коэффициентов вейвлет-разложения (в первом приближении - это контуры стандартных изображений).

На основе приведенных выводов реализация многоуровневого вейвлет-разложения изображений выполнена по следующей схеме (рис. 4). Используя стандартные вейвлет-фильтры (например, Добеши-8), выделяется высокочастотная (ВЧ) часть обрабатываемого изображения на первом уровне разложения. Для обработки ВЧ-части рассчитывается оптимизированный вейвлет-фильтр, позволяющий с минимальными искажениями сжать ВЧ-часть изображения в 4 раза. Далее осуществляется переход на следующий уровень обработки, и указанная процедура повторяется. На рис. 4 представлена двухуровневая схема вейвлет-разложения. В данном случае исходное изображение представляется тремя наборами коэффициентов вейвлет-разложения (обведены кружком):

- низкочастотная часть, разрешением 128×128 пикселей – блок А2;
- высокочастотная часть №1, разрешением 256×256 пикселей – блок В1;
- высокочастотная часть №2, разрешением 128×128 пикселей – блок В2.

Далее полученные коэффициенты вейвлет-разложения (А1, В1, В2) сжимаются с использованием стандартного кодека JPEG. В связи с наличием большого количества элементов с почти нулевыми значениями в высокочастотных блоках В1, В2, достигается их высокий коэффициент сжатия указанным кодеком. В табл. 1 представлены результаты многоуровневой вейвлет-обработки тестового изображения “Барбара”.

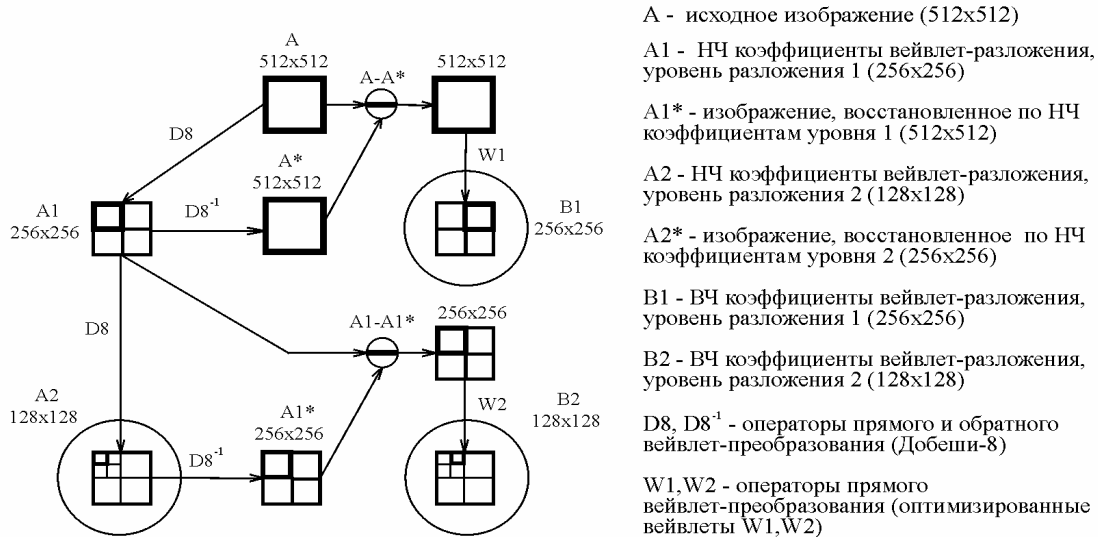


Рис. 4. Схема многоуровневого вейвлет-разложения с использованием вейвлет-фильтров с оптимизированной частотной избирательностью

На рис. 5 представлен результат восстановления тестового изображения “Барбара”. По сравнению со стандартными методами сжатия достигается улучшение отношения С/Ш на 0.9 дБ (используются стандартные

вейвлеты Добеши-8) и 1,7 дБ (используется JPEG). Однако, несмотря на небольшой итоговый выигрыш, воспроизведение высокочастотной части изображения выполнено с гораздо большей точностью.



Рис. 5. Тестовое изображение “Барбара”, восстановленное с использованием оптимизированных вейвлет-фильтров по многоуровневой схеме (брр = 0.48 бит/пиксел, НСКО = 18.23 дБ)

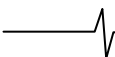
Таблица 1.

Результаты многоуровневой вейвлет-обработки изображения

№	Наименов.	Разрешение (пикс.)	Тип вейвлет фильтра*	Объем ** (Кб)	Сумм. объем (Кб)	Бит на пиксель
1	Блок А1	128 × 128	Доб-8.- 16 × 16	6,42	15,46	0.48
2	Блок В1	256 × 256	Опт.- 30 × 30	5,80		
3	Блок В2	128 × 128	Опт.- 22 × 22	2,84		
4	ИХ фильтра 1	30 × 30		0,20***		
5	ИХ фильтра 2	22 × 22		0,10***		

* - указан тип и порядок вейвлет-фильтра, используемого для получения вейвлет-коэффициентов в соответствующих блоках;

** - занимаемый коэффициентами объем памяти указан после применения кодера JPEG; *** - для кодирования импульсной характеристики (ИХ) оптимизированных вейвлет-фильтров использовался только метод неравномерного квантования (центральная область ИХ квантуется на 256 уровней, средняя – на 64 уровня, крайняя – на 8 уровней).



На рис. 6 представлены ВЧ-части изображения (контуры) уровня разложения 1 (а) и уровня разложения 2 (б). Соответственно на рис. 6 (в, г) пред-

ставлены квадраты АЧХ вейвлет-фильтров с оптимизированной избирательностью для представленных частей изображения.

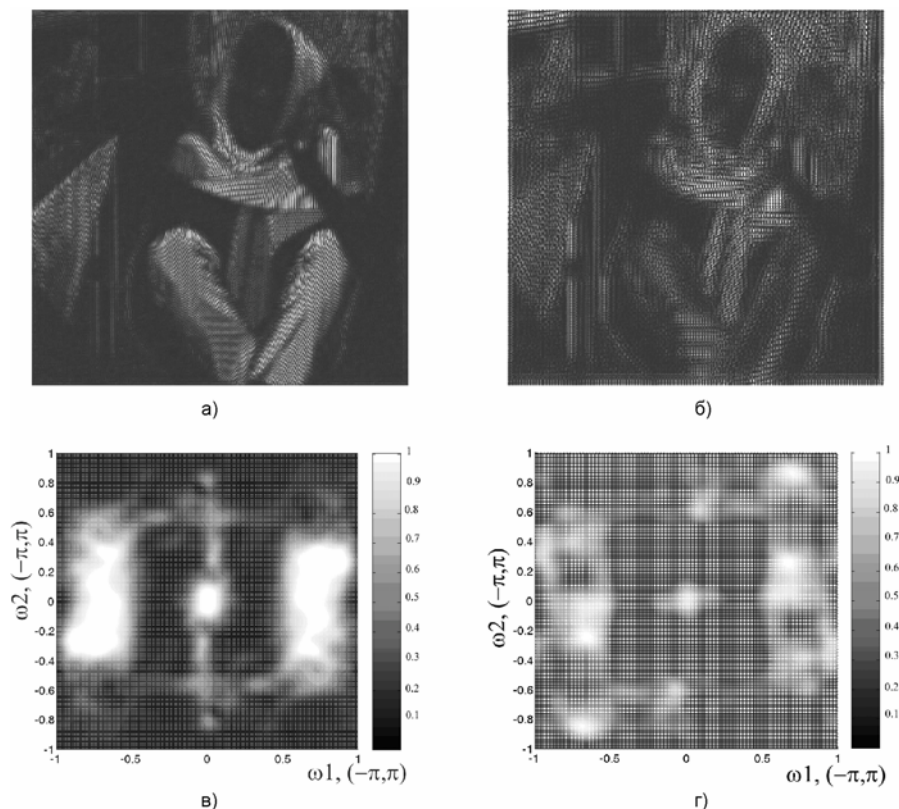


Рис. 6. Квадрат АЧХ оптимизированных вейвлет-фильтров для обработки ВЧ-частей тестового изображения: (а) – уровень разложения 1, (б) – уровень разложения 2; квадраты АЧХ соответствующих вейвлет-фильтров: (в) – порядок фильтра 30×30 , (г) – порядок фильтра 22×22

Заключение

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Используя закономерности преобразования спектров изображений при сжатии, получено выражение, позволяющее найти АЧХ двумерного вейвлет-фильтра, обеспечивающего качественное восстановление изображений, используя только низкочастотные компоненты вейвлет-разложения. Вейвлет-фильтр со свойством такого восстановления получил название “согласованного”.

2. Выполнен расчет оптимизированного двумерного вейвлет-фильтра на основе АЧХ “согласованного” вейвлет-фильтра, ключевым моментом которого является алгоритм понижения порядка “согласованного” фильтра до заданного пользователем. Приведен алгоритм расчета фазовой характеристики на базе модифицированного итерационного алгоритма Герхберга.

3. Разработанный алгоритм эффективен при обработке высокочастотных частей изображения в рамках многоуровневой схемы вейвлет-разложения, что позволяет добиться улучшения отношения С/Ш восстановленного изображения на $0.9 \div 1.7$ дБ.

Литература

1. A. Moislilovic, M.V. Popovic, D. Rackov. On the selection of an optimal wavelet basis for texture characterization // IEEE Trans. Image Process. 2000. V. 9, № 12. P. 2043-2050.

2. Starck J.-L., Murtagh F., Candes E., Donoho D. Gray and color image contrast enhancement by the curvelet transform // IEEE Trans. Image Process. 2003. V. 12, № 6. P. 706-717.

3. Новиков Л.В. Адаптивный вейвлет-анализ сигналов // Научное приборостроение. 1999. Т. 9, № 2. С. 1-13.

4. Sprljan N., Grgic S., Grgic M. Modified SPIHT algorithm for wavelet packet image coding // Real-time Imaging. 2005. № 11. P. 378-388.

5. Толкова Е.И. Wavelet-анализ изображений // Оптический журнал. 2001. Т. 68, № 3. С. 49-59.

7. Кобелев В.Ю., Корепанов И.В., Буралков Д.В. Параметризация и особенности представления вейвлет-фильтров на z-плоскости // Докл. 6-ой междунар. конф. “Цифровая обработка сигналов и ее применение” (DSPA’04). Москва, 2004. Т. 2, С. 122-124.

8. Кобелев В.Ю., Моисеев А.А., Волохов В.А., Смоляков А.В. Синтез двумерных неразделимых вейвлет-фильтров с перестраиваемыми коэффициентами // Докл. 8-ой междунар. конф. “Цифровая обработка сигналов и ее применение” (DSPA’06). Москва, 2006. Т. 2, С. 389-392.

9. Daubechies I. Ten lectures on wavelets. CBMS-NSF conference series in applied mathematics. SIAM Ed., 1992.

10. Чуи К. Введение в вейвлеты. Пер. с англ. - М.: Мир, 2001.

11. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. - М.: Мир, 1982. Т. 1, 2.