

УДК 621.396.96

ФИЛЬТРАЦИЯ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СИГНАЛОВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ФУНКЦИЙ

Зайцев Г.В.

Введение

Широкое распространение цифровой обработки радиолокационных сигналов [1] требует развития и использования разнообразных методов обработки, адекватных решаемой задаче. Одним из принципиальных вопросов, отражающихся на выборе эффективных алгоритмов обработки и во многом определяющих ее качество, является способ построения аналого-цифрового преобразователя (АЦП).

Упрощенная блок-схема устройства частотно-временной обработки радиолокационных сигналов приведена на рис. 1. В функции устройства аналоговой обработки входит усиление принятого сигнала, понижение несущей частоты и полосовая фильтрация с целью выделения анализируемой области частот. Отфильтрованный сигнал преобразуется в цифровую форму, и основная обработка выполняется в процессоре сигналов.

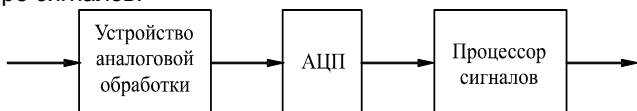


Рис. 1. Упрощенная блок-схема устройства обработки сигнала.

Традиционно АЦП строится по квадратурной схеме [2] (рис. 2а). Однако разбаланс квадратурных каналов по фазе и по амплитуде приводит к искажению спектра сигналов и существенному снижению характеристик тракта, в связи с чем, во многих случаях целесообразен переход к одноканальному построению АЦП [3] без использования квадратурных каналов (рис. 2б). При этом возможно два подхода к последующей цифровой обработке сигнала: первый состоит в формировании квадратурных каналов в цифровом виде после АЦП, второй – в непосредственной обработке сигнала, получаемого с выхода одноканального АЦП. Второй подход является более последовательным и позволяет в ряде случаев снизить требования по производительности к цифровым устройствам.

Возможность аналого-цифрового преобразования сигнала и его обработки без использования квадратурных каналов следует из теоремы Котельникова. Цифровые системы, реализующие этот метод, были использованы нами, начиная с конца 70-х годов прошлого века, для нескольких типов радиолокационных станций, успешно прошедших испытания и подтвердивших эффективность заложенных решений. Однако до сих пор до-

Показано, что результаты фильтрации радиолокационных сигналов при их различном математическом представлении (квадратурном, действительном, гильбертовом) могут быть сделаны практически идентичными путем корректного выбора несущей частоты. Приведено теоретическое обоснование метода цифровой обработки, состоящего в одноканальном (без квадратуры) аналого-цифровом преобразовании сигнала и непосредственной фильтрации получаемого действительного цифрового сигнала. Определены нижние границы для необходимой несущей частоты и частоты дискретизации. Показано, что описываемый метод сохраняет фазовые соотношения. Описывается эффект зависимости результата фильтрации от начальной фазы входного сигнала. Производится сравнение описываемого метода со стандартным, использующим квадратуру.

вольно широко распространено мнение об «ущербности» и некачественности такой обработки. В связи с этим, в данной работе дается обоснование корректности обработки радиолокационных сигналов без использования квадратурных каналов и описываются особенности такой обработки.

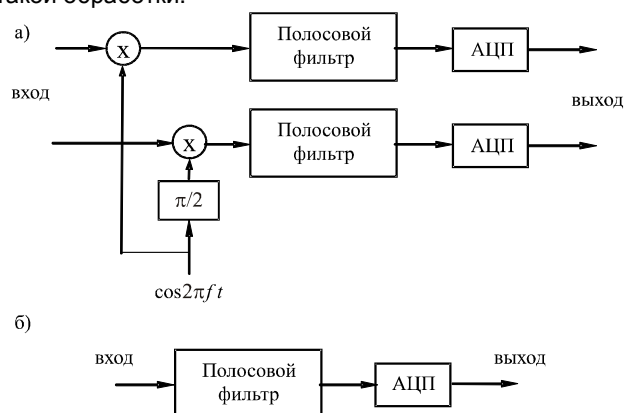
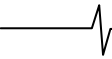


Рис. 2. Варианты построения АЦП.

Различные методы построения АЦП соответствуют в теоретическом плане различным способам представления сигналов. Можно выделить три основных способа представления: действительное, квадратурное и гильбертово [4,5]. Квадратурное представление сигналов соответствует квадратурной схеме АЦП, действительное – одноканальной схеме АЦП, гильбертово удобно при теоретическом анализе.

Перечисленные способы математического представления сигналов описываются во втором разделе. В третьем разделе рассматривается фильтрация аналоговых сигналов. Показывается, что при корректном выборе несущей частоты результаты фильтрации идентичны для всех перечисленных представлений. В четвертом разделе рассматриваются аналогичные условия идентичности для случая цифровых сигналов.



Способы представления сигналов и их взаимосвязь

Сигналы во временной области будем обозначать строчными буквами, их спектры – соответствующими прописными буквами, а нижние индексы r, q и h – для обозначения действительного, квадратурного и гильбертова представления соответственно. В случае отсутствия нижнего индекса представление может быть произвольным.

При действительном представлении радиолокационный сигнал имеет вид

$$s_r(t) = a(t) \cos[2\pi f_0 t + \theta(t)], \quad (1)$$

где $a(t)$ – амплитуда, $\theta(t)$ – фаза, f_0 – несущая частота сигнала. Спектр $S_r(f)$ сигнала (1) в силу действительности $s(t)$ обладает свойством комплексно-сопряженной симметрии: $S_r(f) = S_r^*(-f)$. Радиолокационный сигнал (1) характеризуется тем, что функции $a(t)$ и $\theta(t)$ изменяются медленно по сравнению с функцией $\cos(2\pi f_0 t)$.

При квадратурном представлении сигналу (1) соответствует комплексный сигнал

$$s_q(t) = u(t) \exp(2\pi j f_0 t), \quad (2)$$

где

$$u(t) = a(t) \exp[j\theta(t)]. \quad (3)$$

Выражение (1) можно представить в виде

$$s_r(t) = p(t) \cos(2\pi f_0 t) - q(t) \sin(2\pi f_0 t), \quad (4)$$

где

$$p(t) = a(t) \cos \theta(t); \quad q(t) = a(t) \sin \theta(t) \quad (5)$$

– квадратурные составляющие сигнала.

Из (4) следует, что квадратурные составляющие можно получить путем умножения сигнала (1) на функции $2\cos(2\pi f_0 t)$ и $-2\sin(2\pi f_0 t)$ и последующей низкочастотной фильтрации, что соответствует схеме квадратурного АЦП (рис. 2а).

Сравнивая (3) и (5), а также (1) и (2), нетрудно получить связь между указанными представлениями:

$$u(t) = p(t) + jq(t), \quad (6)$$

$$s_r(t) = 0,5[s_q(t) + s_q^*(t)]. \quad (7)$$

Из формул (2), (7) следуют выражения для спектров $S_q(f)$ и $S_r(f)$ сигналов (1) и (2) через спектр $U(f)$ ком-

плексной огибающей (3) (здесь и далее предполагается, что интегралы Фурье, также, как и другие интегралы, сходятся; это всегда имеет место при рассмотрении практических случаев):

$$S_q(f) = U(f - f_0), \quad (8)$$

$$S_r(f) = 0,5[S_q(f) + S_q^*(-f)] = 0,5[U(f - f_0) + U^*(-f - f_0)] \quad (9)$$

Гильбертово представление сигнала определяется выражением

$$s_h(t) = s_r(t) + j\hat{s}_r(t), \quad (10)$$

где

$$\hat{s}_r(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_r(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (11)$$

При этом спектр сигнала (10) равен

$$S_h(f) = \begin{cases} 2S_r(f), & f > 0, \\ S_r(f), & f = 0, \\ 0, & f < 0, \end{cases} \quad (12)$$

Рис. 3 иллюстрирует различия между спектрами S_r, S_q, S_h . На рисунке вид гипотетической функции $U(f)$ выбран из соображений наглядности; спектр $U(f - f_0)$ и его отдельные части заштрихованы вертикальными линиями, а спектр $U^*(-f - f_0)$ – равномерными точками. Заметим, что для случая финитного спектра $U(f)$, равного нулю при $|f| > A$, спектры S_r, S_q, S_h совпадают в области положительных частот с точностью до постоянного множителя, если $f_0 > A$. В общем случае величина различия спектров определяется “хвостами” функции $U(f)$ при $f < -f_0$.

Оптимальная фильтрация при различных представлениях сигналов

Оптимальная линейная фильтрация радиолокационного сигнала сводится к вычислению корреляционно-взвешенного интеграла [1,2,4,6]:

$$z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(\tau - t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)H(f)\exp(2\pi j f \tau)df, \quad (13)$$

где $x(t)$ – принятый сигнал, $h(t)$ – импульсная характеристика оптимального фильтра, а $X(f)$ и $H(f)$ – спектры этих функций, причем $x(t)$ и $h(t)$ должны иметь, строго говоря, гильбертово представление.

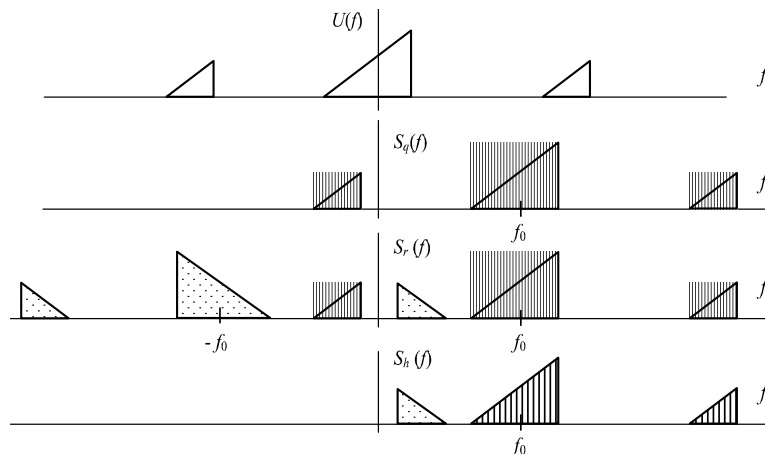


Рис. 3. Различия между спектрами S_r, S_q, S_h .

Пусть принимаемый сигнал $x_r(t)$ соответствует излучаемому (1) и отличается от него, как это обычно имеет место на практике, некоторой задержкой, амплитудой, доплеровским сдвигом F_1 и начальной фазой α . Тогда, выбирая соответствующим образом начало отсчета времени и масштабный коэффициент, имеем:

$$x_r(t) \cong a(t) \cos[2\pi(f_0 + F_1)t + \theta(t) + \alpha]. \quad (14)$$

Для спектров различных представлений принимаемого сигнала аналогично (8) и (9) получаем

$$X_q(f) = U(f - f_0 - F_1) \exp(j\alpha),$$

$$X_r(f) = 0,5[U(f - f_0 - F_1) \exp(j\alpha) + U^*(-f - f_0 - F_1) \exp(-j\alpha)], \quad (15)$$

а спектр $X_h(f)$ выражается через $X_r(f)$ согласно формуле (12).

Для эффективной оптимальной фильтрации сигнала на несущей частоте f_0 спектр $H(f)$ также должен быть сосредоточен у частоты f_0 . Поэтому импульсная характеристика фильтра также может быть представлена в виде, аналогичном (14):

$$h_r(t) = b(t) \cos[2\pi(f_0 + F_2)t + \psi(t)], \quad (16)$$

где F_2 – доплеровская частота, на которую настроен фильтр. При многоканальном приеме используется набор фильтров с различными частотами F_2 , перекрывающими необходимый доплеровский диапазон. Заметим, что $h(t)$ не учитывает начальную фазу α принимаемого сигнала (14), так как ее учет, как правило, не представляется возможным.

Обозначим символом $V(f)$ спектр комплексной огибающей $v(t) = b(t) \exp(j\psi(t))$ функции (16). Тогда спектры различных представлений $h(t)$ имеют вид

$$H_q(f) = V(f - f_0 - F_2),$$

$$H_r(f) = 0,5[V(f - f_0 - F_2) + V^*(-f - f_0 - F_2)], \quad (17)$$

а спектр $H_h(f)$ может быть получен по формуле (12).

В частности, для согласованного фильтра [4,5,6] $H(f) = S^*(f)$, $h(t) = s^*(-t)$.

Рассмотрим различия в выходном эффекте фильтра (13) при использовании различных представлений для сигнала $x(t)$ и импульсной характеристики фильтра $h(t)$. В случае гильбертовых представлений для обеих функций, подставив в (13) выражения для спектров из формул (12), (15), (17), получим:

$$z_{hh} = \exp(j\alpha)(J_1 + J_3) + \exp(-j\alpha)(J_2 + J_4), \quad (18)$$

где интегралы J_1, J_2, J_3, J_4 имеют вид

$$J_1 = \int_0^{\infty} U(f - f_0 - F_1) V(f - f_0 - F_2) \exp(2\pi j f \tau) df = \quad (19)$$

$$= \exp[2\pi j (f_0 + F_2) \tau] \int_{-f_0 - F_2}^{\infty} V(f) U(f - F) \exp(2\pi j f \tau) df;$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} U^*(-f - f_0 - F_1) V^*(-f - f_0 - F_2) \exp(2\pi j f \tau) df = \quad (20)$$

$$= \exp[-2\pi j (f_0 + F_2) \tau] \int_{-\infty}^{-f_0 - F_2} V^*(f) U^*(f - F) \exp(-2\pi j f \tau) df;$$

$$J_3 = \int_0^{\infty} U(f - f_0 - F_1) V^*(-f - f_0 - F_2) \exp(2\pi j f \tau) df; \quad (21)$$

$$J_4 = \int_0^{\infty} U^*(-f - f_0 - F_1) V(f - f_0 - F_2) \exp(2\pi j f \tau) df, \quad (22)$$

а величина F определяется выражением $F = F_1 - F_2$.

Вид функций, стоящих под знаком интеграла в J_1, J_2, J_3, J_4 для гипотетического случая, удобного для наглядной иллюстрации, приведен на рис. 4а, 4б, 4в соответственно.

Как нетрудно убедиться, интеграл J_1 представляет собой основной член в отклике фильтра, и при отсутствии рассогласования параметров ($F = 0, \tau = 0$) для случая согласованной фильтрации примерно равен энергии сигнала

$$\int_{-f_0}^{\infty} U(f) U^*(f) df.$$

Аналогичным образом интеграл J_2 для этого случая дает энергию “хвостов” спектра сигнала при $f < -f_0$ ($F = 0, \tau = 0$). Интегралы J_3, J_4 представляют собой комбинационные члены, и из рис. 4б, 4в наглядно видно, что при достаточно большой частоте f_0 они должны быть малы. Ниже этот вопрос рассматривается подробнее.

Выражения, аналогичные (18), нетрудно получить и для других представлений принятого сигнала и импульсной характеристики фильтра. Результаты этих вычислений сведены в таблицу 1. При этом используются следующие обозначения.

Если $J = \int_a^b g(x) dx$ –

некоторый интеграл, то символом \tilde{J} обозначен интеграл

$$\tilde{J} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx - J.$$

Рассмотрим выражения таблицы 1, отбросив на время клетку, соответствующую действительному представлению обеих функций. Все остальные выражения имеют, с точностью до постоянного множителя, в качестве основного члена интеграл $\exp(j\alpha) J_1$ и отличаются линейной комбинацией интегралов с индексами 2,3,4.

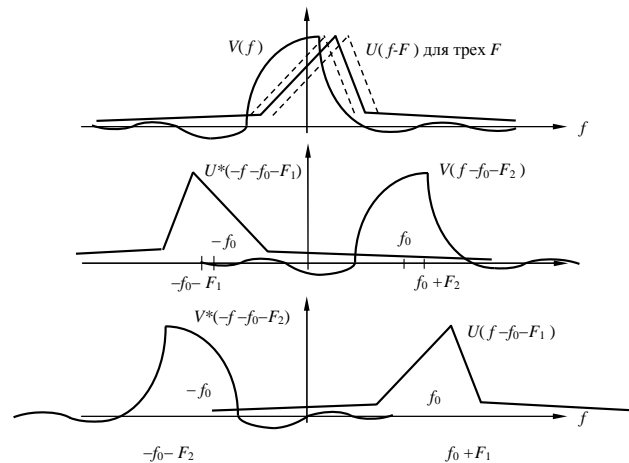


Рис. 4. Взаимное расположение спектров подинтегральных функций.

Результаты фильтрации для различных представлений сигнала и фильтра

| Представление фильтра | Представление сигнала | | |
|-----------------------|---|---|---|
| | гильбертово | квадратурное | действительное |
| гильбертово | $\exp(j\alpha)(J_1 + J_3) + \exp(-j\alpha)(J_2 + J_4)$ | $\exp(j\alpha)(J_1 + J_3)$ | $0,5\{\exp(j\alpha)(J_1 + J_3) + \exp(-j\alpha)(J_2 + J_4)\}$ |
| квадратурное | $\exp(j\alpha)J_1 + \exp(-j\alpha)J_4$ | $\exp(j\alpha)(J_1 + J_2^*)$ | $0,5\{\exp(j\alpha)(J_1 + J_2^*) + \exp(-j\alpha)(J_4 + \tilde{J}_4)\}$ |
| действительное | $0,5\{\exp(j\alpha)(J_1 + J_3) + \exp(-j\alpha)(J_2 + J_4)\}$ | $0,5\exp(j\alpha)(J_1 + J_2^* + J_3 + \tilde{J}_3)$ | $0,25\{\exp(j\alpha)(J_1 + J_2^* + J_3 + \tilde{J}_3) + \exp(-j\alpha) \cdot (J_1^* + J_2 + J_4 + \tilde{J}_4)\}$ |

Постоянные множители 0,5 и 0,25 в таблице отражают тот факт, что энергия действительного сигнала (1) вдвое меньше, чем комплексного (2). Однако при этом отношение «сигнал/шум» сохраняется постоянным, так как и мощность шумов в двухканальном варианте также выше. В связи с этим при анализе различий выражений таблицы 1 указанные коэффициенты можно не рассматривать. Покажем, что выбором достаточно большой величины f_0 каждый из интегралов с индексами 2, 3, 4, а значит и любые их линейные комбинации, могут быть сделаны произвольно малыми. Рассмотрим, например, интеграл J_3 . В силу неравенства Коши-Буняковского имеем:

$$|J_3|^2 \leq \int_0^\infty |U(f - f_0 - F_1)|^2 df \cdot \int_0^\infty |V(-f - f_0 - F_2)|^2 df \quad (23)$$

Для физически реализуемых сигнала и фильтра и устойчивого фильтра энергия функций $x(t)$ и $h(t)$ ограничена. Поэтому

$$\int_{-\infty}^\infty |U(f)|^2 df = c_1 < \infty \quad (24)$$

$$\int_{-\infty}^\infty |V(f)|^2 df = c_2 < \infty \quad (25)$$

Оценивая первый интеграл в (23) с помощью (24) и произведя замену переменных во втором, имеем

$$|J_3|^2 \leq c_1 \int_{-\infty}^{-f_0 - F_2} |V(f)|^2 df \quad (26)$$

Но из (25) следует, что для любого сколь угодно малого ϵ найдется такое A , что при $\beta > A$ выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{-\beta} |V(f)|^2 df < \epsilon.$$

Тогда из (26) имеем, $|J_3| \leq \sqrt{c_1 \epsilon}$ при $f_0 > A - F_2$. Так как ϵ произвольно мало, а величина F_2 ограничена, то доказываемое утверждение для интеграла J_3 справедливо. Аналогично производится доказательство и для других интегралов.

Таким образом, различия в выходном эффекте оптимального фильтра (13) для различных представлений сигнала и фильтра (кроме действительного представле-

ния обеих функций) пренебрежимо малы при достаточно большой величине несущей частоты f_0 , а соответствующие алгоритмы фильтрации эквивалентны.

Для случая действительного представления, как сигнала, так и фильтра, основной полезный член в выходной реакции z_{rr} равен $0,5 re[\exp(j\alpha) J_1]$ и имеет несущую вида $\cos(2\pi f t)$ вместо $\exp(2\pi j f t)$. В силу случайности начальной фазы α это приводит к тому, что в любой точке (τ, F) выходной эффект может быть равен нулю, и при вычислении функции z_{rr} в отдельных точках применять такой способ нецелесообразно. Если же функция z_{rr} рассчитывается на отрезке времени, то при несущей, существенно превосходящей полосу сигнала, огибающая функции z_{rr} «обрисовывается», тем не менее, хорошо. При малых значениях несущей указанный способ может привести к существенным потерям.

Во многих радиолокационных приложениях функции $x(t)$ и $h(t)$ в (13) можно считать функциями с финитным спектром [7]. Например, при обработке принимаемых радиолокационных сигналов входные цепи приемного устройства всегда имеют конечную полосу. Поэтому сигнал с финитным спектром является хорошей моделью для большинства приложений. Из приведенных выше формул нетрудно определить требования к несущей частоте f_0 для того, чтобы результаты фильтрации (13) были идентичны для всех представлений функций $x(t)$ и $h(t)$ с финитными спектрами. Рассмотрим наиболее интересный с практической точки зрения случай.

Пусть спектр $U(f)$ равен нулю вне интервала частот (a, b) , $V(f)$ — вне интервала (c, d) , а доплеровский диапазон соответствует интервалу (E, G) . Будем считать, для определенности, что несущая частота положительна $f_0 > 0$, а интервалы (a, b) и (c, d) содержат начало координат. Определим условия обращения в нуль интегралов таблицы 1 с индексами 2, 3, 4 при любых частотах F_1 и F_2 из доплеровского диапазона. Для интеграла J_2 получаем, что функции $V(f)$ и $U(f - F)$, стоящие под интегралом в (20), не равны нулю, соответственно, на интервалах (c, d) и $(a + F, b + F)$. Для того, чтобы интеграл (20) был равен нулю, достаточно, чтобы хотя бы одна из левых границ этих интервалов была бы больше $-f_0 - F_2$, откуда получаем условие

$$f_0 \geq \min(-a, -c) - E. \quad (27)$$

Интегралы $J_3, J_4, \tilde{J}_3, \tilde{J}_4$ обращаются в нуль, если области ненулевых значений подынтегральных функций в (21), (22) не пересекаются. Отсюда нетрудно получить условие

$$f_0 \geq 0,5(-c - a) - E. \quad (28)$$

Так как справедливо соотношение $0,5(y + z) \geq \min(y, z)$, то условие (28) жестче, чем (27). В частности, для наиболее интересного с практической точки зрения случая равенства интервалов ненулевых значений функций $U(f)$ и $V(f)$ из (28) получим

$$f_0 \geq -a - E. \quad (29)$$

Это выражение показывает, что результаты фильтрации идентичны при всех представлениях функций $x(t)$ и $h(t)$ уже при достаточно низкой частоте f_0 , примерно равной половине ширины спектра сигнала плюс половина доплеровского диапазона. Для таких низких частот понятия фазы и амплитуды сигнала, как правило, теряют смысл. Однако представление сигнала в виде (14) остается полезным, так как сигнал именно такой формы получается после пропускания сигнала вида (14) с высокочастотной несущей (для которого это представление является классическим) через смеситель, понижающий несущую до указанной величины.

Следующее существенное замечание по выражениям таблицы 1 состоит в том, что начальная фаза α фильтруемого сигнала линейно входит в фазу выходного эффекта фильтра, имеющую в области главного лепестка вид $\arg(J_1) + \alpha$. Это обстоятельство является существенным при использовании моноимпульсных методов пеленгации.

На основании анализа таблицы 1 можно сделать еще один важный вывод. Для каждого выражения результатов фильтрации во второй и четвертой колонке таблицы присутствуют два члена: один с фазовым множителем $\exp(j\alpha)$, другой – с множителем $\exp(-j\alpha)$. Так как интегралы при этих множителях, вообще говоря, ненулевые, то это означает, что модуль отклика фильтра зависит от начальной фазы сигнала α . Действительно, модуль выражения $\exp(j\alpha)A + \exp(-j\alpha)B$ меняется от $|A| + |B|$ до $|A| - |B|$ при изменении фазы α от 0 до 2π . Таким образом, наблюдается зависимость величины модуля отклика фильтра от фазы входного сигнала. В области главного лепестка функции неопределенности сигнала справедливо соотношение $|J_1| \gg |J_k|, |\tilde{J}_1| \gg |\tilde{J}_k|, k = 2, 3, 4$, и эта зависимость незначительна. В области же боковых лепестков эта зависимость в процентном отношении может быть значительной. Из таблицы 1 следует, что в случае использования квадратурного представления сигнала такой зависимости нет.

Цифровая оптимальная фильтрация

Перейдем к рассмотрению дискретного случая. При цифровой обработке из обрабатываемой функции $y(t)$ берутся выборки через интервал $\delta = 1/F_s$, где F_s – частота дискретизации. Для обозначения полученных при этом дискретных сигналов и функций от них будем использовать те же символы, что и для соответствующих функций непрерывного времени, но с добавлением индекса s . Тогда процесс дискретизации функции $y(t)$ дает функцию $y_s(k)$ дискретного аргумента k :

$$y_s(k) = y(k\delta), k = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty.$$

Спектр $Y_s(f)$ этой функции определяется выражением

$$Y_s(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_s(k) \exp(-2\pi j k \delta f). \quad (30)$$

Дискретизация приводит к наложению участков спектра $Y(f)$ [1], а именно, спектры $Y_s(f)$ и $Y(f)$ связаны соотношением

$$Y_s(f) = \frac{1}{\delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(f + kF_s). \quad (31)$$

Нетрудно видеть, что функция $Y_s(f)$ является периодической с периодом F_s , а ряд (30) является ее рядом Фурье, и, следовательно, справедливо выражение

$$y_s(k) = \delta \int_0^{F_s} Y_s(f) \exp(2\pi j k \delta f) df. \quad (32)$$

Для дискретных функций вместо интеграла (13) вычисляется сумма

$$z_s(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\delta)h(\tau - k\delta). \quad (33)$$

Здесь индекс s имеет несколько другой смысл, чем в (30), однако в данной статье это не приводит к недоразумениям. Заметим, что хотя функция (33) относится к случаю дискретных сигналов, она является функцией непрерывной переменной τ и может быть вычислена для любого τ . При цифровой обработке эта функция обычно вычисляется с шагом δ по переменной τ . При этом интегральная свертка (13) заменяется дискретной:

$$z_s(m\delta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s(k)h_s(m - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_s(m - k)h_s(k). \quad (34)$$

Определим связь между результатами цифровой (34) и аналоговой (13) фильтрации. При этом ограничимся для простоты наиболее часто используемым на практике случаем квадратурного представления импульсной характеристики фильтра. Тогда вместо (16) имеем

$$h_q(t) = b(t) \exp[2\pi j (f_0 + F_2)t + j\psi(t)].$$

Подставив это выражение в (13), получим для случая непрерывных переменных:

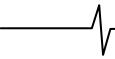
$$z(\tau, F) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)x(\tau - t, f_0 + F_1)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau - t, f_0 + F_1)b(t) \exp[2\pi j (f_0 + F_2)t + j\psi(t)]df, \quad (35)$$

где в аргументы функций x и z в явном виде внесена несущая $f_0 + F_1$ и относительный доплеровский сдвиг $F = F_1 - F_2$ соответственно. Вид функции x приведен для действительного случая в (14), а для других представлений может быть получен по формулам (2) – (11). Произведя в (35) замену переменных $f_1 = f_0 + F_1$, получим

$$z(\tau, F) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t, \tau, f_1) \exp(-2\pi j Ft) dt, \quad (36)$$

где

$$w(t, \tau, f_1) = x(\tau - t, f_1)b(t) \exp[2\pi j f_1 t + j\psi(t)].$$



Выражение (36) можно рассматривать как преобразование Фурье функции $w(t, \tau, f_1)$ по переменной t , а (33) – как соответствующее дискретное преобразование. В связи с этим из общей формулы (31), связывающей интегральное и дискретное преобразования Фурье, получим

$$z_s(\tau, F) = \frac{1}{\delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(\tau, F + kF_s). \quad (37)$$

Таким образом, результаты цифровой и аналоговой фильтрации связаны таким же соотношением, как и спектры соответствующих функций дискретного и непрерывного аргументов. Для случая согласованной фильтрации и квадратурного представления сигнала это соотношение получено и подробно проанализировано в [1].

Выразим теперь функцию $z_s(m\delta)$ (34) через спектры дискретизированных функций $x_s(k)$ и $h_s(k)$ аналогично тому, как это сделано в (13) для функций непрерывного аргумента. Подставив в (34) выражения, аналогичные (32), для $x_s(k)$ и $h_s(m-k)$ через спектры этих функций и производя несложные преобразования, получим:

$$z_s(m\delta) = \delta \int_0^{F_s} X_s(f) H_s(f) \exp(2\pi j m \delta f) df. \quad (38)$$

Прежде, чем перейти к анализу полученных соотношений, сделаем одно обобщающее замечание. При вычислении функции (38) шаг δ_1 по переменной τ , вообще говоря, может не совпадать с шагом δ по переменной t . Другими словами, функции $x(t)$ и $h(t)$ могут иметь различные частоты дискретизации. Практический смысл могут иметь случаи, когда эти частоты кратны. Можно показать, что и в этом случае формулы (34), (37), (38) остаются справедливыми, если произвести следующие изменения обозначений. Пусть $\delta = L\delta_0$, $\delta_1 = M\delta_0$, где L и M – взаимно-простые целые числа. Приведем последовательности выборок из функций $x(t)$ и $h(t)$ к одной частоте дискретизации $F_{s1} = 1/\delta_0$, вставив $L-1$ (соответственно $M-1$) нулевых отсчетов между каждыми двумя отсчетами функции $x(t)$ (соответственно $h(t)$). Для полученных новых функций $\bar{x}_s(k)$ и $\bar{h}_s(k)$ справедливы соотношения (34), (37), (38) при замене в (34), (38) δ на δ_0 , F_s на F_{s1} , а в (37) – δ на $LM\delta_0$ и F_s на $1/LM\delta_0$.

Вернемся к анализу соотношений (37), (38), позволяющих сделать вывод о необходимой частоте дискретизации. Проанализируем случай сигналов с финитным спектром. Пусть, как и в п.3, спектры $U(f)$ и $V(f)$ не равны нулю на интервалах (a, b) , и (c, d) соответственно, а доплеровский диапазон определяется интервалом (E, G) .

Рассмотрим сначала случай квадратурного представления сигнала и фильтра. Из сравнения (38) с (13) следует, что результаты аналоговой и цифровой фильтрации совпадают при $\tau = l \cdot \delta$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, если интервал $(A, A + F_s)$ при некотором A перекрывает области ненулевых значений функций $X_q(f)$ и $H_q(f)$. При этом не происходит наложения отрезков спектров $X_q(f)$ и $H_q(f)$ при дискретизации. Рассматривая выражения для спектров $X_q(f)$ и $H_q(f)$ второго раздела, нетрудно получить, что указанное условие эквивалентно неравенству

$$F_s \geq \max_{F_1, F_2 \in (E, G)} \{ \max(b + F_1, d + F_2) - \min(a + F_1, c + F_2) \} \quad (39)$$

Несколько завышенная оценка правой части этой формулы дает

$$F_s \geq \max(b, d) - \min(a, c) + G - E.$$

При равенстве интервалов (a, b) и (c, d) условие (39) упрощается:

$$F_s \geq W_c + \Delta F. \quad (40)$$

где $W_c = b - a$ – ширина спектра сигнала, а $\Delta F = G - E$ – величина доплеровского диапазона. Заметим, однако, что в общем случае минимально необходимая частота дискретизации может быть меньше, чем величина, задаваемая формулой (40). Например, при $b + E > d + G$ и $a + G < c + E$ формула (39) дает $F_s \geq b - a = W_c$.

Определим аналогичные условия для случая действительного представления сигнала. При этом спектр $X(f)$ определяется формулой (15) и содержит две области ненулевых значений. Для того, чтобы в данном случае интегралы (38) и (13) совпадали при $\tau = l \cdot \delta$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, достаточно, чтобы при дискретизации спектр $U^*(-f - f_0 - F_1)$ в (15) не наложился ни на спектр $U(f - f_0 - F_1)$, ни на спектр $H_q(f) = V(f - f_0 - F_2)$. Выразим эти условия в виде неравенств, воспользовавшись рис. 5, где изображен отрезок частотной оси около частоты f_0 . Сплошными линиями показаны спектры $U(f - f_0 - F_1)$ и $V(f - f_0 - F_2)$, а пунктирными линиями – наложения спектра $U^*(-f - f_0 - F_1)$ при дискретизации. На частотной оси отмечены точки, кратные $F_s/2$. Одинаковыми цифрами в кружках показаны размеры отрезков, дающих рассматриваемые ниже неравенства.

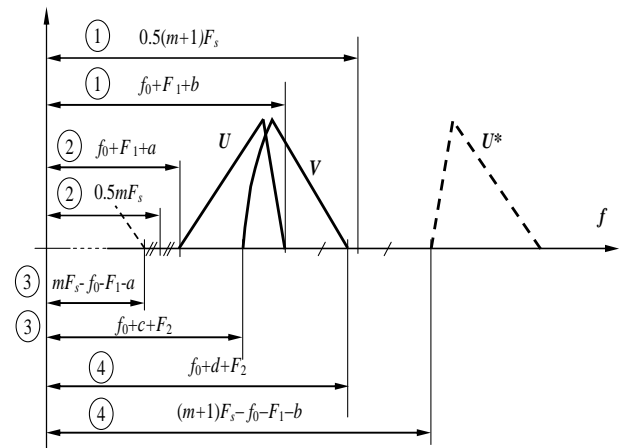


Рис. 5. Взаимное расположение спектров для действительного представления

Для того, чтобы спектры $U(f - f_0 - F_1)$ и $U^*(-f - f_0 - F_1)$ не наложились при дискретизации, необходимо, чтобы область ненулевого спектра $U(f - f_0 - F_1)$ для некоторого целого m располагалась внутри отрезка $[mF_s/2, (m+1)F_s/2]$, откуда получим (см. отрезки, обозначенные кружками с цифрами 1 и 2 на рис. 5):

$$\begin{cases} 2(f_0 + F_1 + b) \leq (m+1)F_s \\ mF_s \leq 2(f_0 + F_1 + a) \end{cases}$$

Для усиления этих неравенств положим в первом из них $F_1 = G$, а во втором $F_1 = E$:

$$\begin{cases} 2(f_0 + G + b) \leq (m+1)F_s \\ mF_s \leq 2(f_0 + E + a) \end{cases} \quad (41)$$

Складывая эти неравенства, получим:

$$F_s \geq 2(W_c + \Delta F). \quad (42)$$

Аналогично нетрудно получить условия, гарантирующие отсутствие наложения спектров $U^*(-f - f_0 - F_1)$ и $V(f - f_0 - F_2)$ (отрезки с цифрами 3 и 4 на рис. 5):

$$\begin{cases} 2(f_0 + G) + b + d \leq (m+1)F_s \\ mF_s \leq 2(f_0 + E) + a + c \end{cases} \quad (43)$$

Сложение этих неравенств дает условие:

$$F_s \geq W_c + W_f + 2\Delta F. \quad (44)$$

где $W_f = d - c$ – ширина спектра фильтра.

Объединяя (42) и (44) в одно неравенство, имеем окончательное условие для частоты дискретизации:

$$F_s \geq 2\Delta F + W_c + \max(W_c, W_f). \quad (45)$$

Сравнивая условия (45) и (40), получим, что в случае действительного представления сигнала минимальная частота дискретизации должна быть примерно вдвое выше, чем в случае квадратурного представления.

Условие (45) не исчерпывает неравенств (41) и (43). При обработке действительного сигнала несущая частота f_0 не может быть выбрана произвольно, а должна быть связана с частотой дискретизации F_s указанными соотношениями. Действительно, если, например, частоты f_0 и F_s кратны ($f_0 = kF_s$), то при дискретизации происходит наложение спектров $U(f - f_0)$ и $U^*(-f - f_0)$, что недопустимо. Объединяя четыре условия (41) и (43) в два, получим соотношения, которым должны удовлетворять частоты f_0 и F_s :

$$\begin{cases} 2(f_0 + G) + b + \max(b, d) \leq (m+1)F_s \\ mF_s \leq 2(f_0 + E) + a + \min(a, c) \end{cases} \quad (46)$$

При равных интервалах (a, b) и (c, d), а также при симметрии этих интервалов и интервала доплеровских частот относительно нуля, условия (46) упрощаются:

$$0,5(mF_s + \Delta F + W_c) \leq f_0 \leq 0,5[(m+1)F_s - \Delta F - W_c].$$

В литературе обычно предлагается частоту f_0 выбирать в середине интервала $[mF_s/2, (m+1)F_s/2]$. Тогда

$$f_0 = 0,25(2m+1)F_s,$$

а условия (46) приобретают вид

$$\begin{cases} F_s \geq 4G + 2b + 2\max(b, d) \\ F_s \geq -4E - 2a - 2\min(a, c) \end{cases} \quad (47)$$

При симметрии всех интервалов и равенстве интервалов (a, b) и (c, d) условия (47) являются частным случаем условия (44).

Таким образом, цифровая обработка действительного сигнала дает точный результат при соблюдении условий (45) и (46).

Аналогичным образом могут быть рассмотрены и другие случаи представления сигналов с конечными спектрами.

Для случая неконечных спектров результаты дискретной фильтрации несколько отличаются от результатов аналоговой фильтрации за счет эффекта наложения участков спектра при дискретизации. Однако эти отличия, как можно показать, имеют одинаковый порядок величины для случаев квадратурного и действительного представления сигналов, если частота дискретизации и несущая частота выбраны в

соответствии с рассмотренными соотношениями.

Итак, цифровая фильтрация для действительного и для квадратурного представлений сигнала дает эквивалентные результаты, если частота дискретизации в первом случае примерно вдвое выше. При этом вдвое увеличивается также и количество отсчетов сигнала за фиксированное время наблюдения. Однако это не только не приводит к увеличению объема вычислений, но часто даже сокращает его. Например, при фильтрации сигнала во временной области путем прямого вычисления суммы (34) каждое слагаемое требует для комплексных отсчетов сигнала четыре операции умножения и две операции сложения двух действительных чисел, а для действительных отсчетов – только 2 операции умножения. При фильтрации в частотной области [1] основная операция – быстрое преобразование Фурье – требует одинакового объема вычислений для комплексного сигнала из N отсчетов и для действительного сигнала из $2N$ отсчетов и т.д.

Заключение

Для любого представления радиолокационного сигнала и импульсной характеристики фильтра (кроме действительного представления обеих функций) результаты аналоговой фильтрации практически идентичны при выборе не слишком низкой несущей частоты. Для случая сигналов с конечным спектром несущая частота должна быть не менее половины ширины спектра плюс половина доплеровского диапазона. При этом в любом случае фильтрация сохраняет фазовые соотношения во входном сигнале, что дает возможность реализовать моноимпульсный метод пеленгации. При использовании представления входного сигнала, отличного от квадратурного, следует обращать внимание на зависимость боковых лепестков результата фильтрации от фазы входного сигнала.

Для цифровой фильтрации переход к одноканальной схеме аналого-цифрового преобразователя и дальнейшая обработка сигнала без использования квадратурных каналов являются вполне корректным методом построения систем цифровой фильтрации. При этом снимается довольно сложная техническая задача нейтрализации паразитного влияния разбалансов квадратурных каналов АЦП. Платой за это является повышение примерно вдвое частоты дискретизации сигнала. Повышается также и общее количество отсчетов сигнала, однако это не требует увеличения производительности цифровых устройств, так как операции с действительными числами проще.

Литература

1. Дж.Х. Маклеллан, Р. Дж. Пурди, Применение цифровой обработки сигналов в радиолокации, в сб. "Применение цифровой обработки сигналов", под ред. Э. Оппенгейма, М., Мир, 1980.
2. С.З. Кузьмин, Основы проектирования систем цифровой обработки радиолокационной информации, М., Радио и связь, 1986.
3. Д.Ю. Бобров, А.П. Доброжанский, Г.В. Зайцев и др., Цифровая обработка сигналов в многофункциональных РЛС, Цифровая обработка сигналов, № 4, 2001, стр. 2-12.
4. Справочник по радиолокации под ред. М. Скольника, т.1, М., Сов. Радио, 1976.
5. Ч. Кук, М. Бернфельд, Радиолокационные сигналы, М., Сов. Радио, 1971.
6. Я.Д. Ширман, В.Н. Манжос, Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех, М., Радио и связь, 1981.
7. Я.И. Хургин, В.П. Яковлев, Фinitные функции в физике и технике, М., Наука, 19