

УДК 621.396

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ РАДИОСВЯЗИ С ШУМОПОДОБНЫМИ СИГНАЛАМИ ПРИ МНОГОСТАНЦИОННОМ ДОСТУПЕ

Борисов В.И., Зинчук В.М., Лимарев А.Е.

Введение

В системах радиосвязи (СРС) как специального назначения, так и коммерческих (например, стандарт CDMA), широкое применение находят шумоподобные сигналы (ШПС) [1,2]. При работе СРС в пакетных радиосетях (ПРС) возникает проблема многостанционного доступа. Под многостанционным доступом понимается способность приемного устройства данной СРС принимать адресованные ему сигналы, несмотря на помехи, вызываемые передачей сигналов, предназначенных приемным устройствам других СРС [3]. При этом сигналы однотипных СРС, входящих в данную ПРС, в точке приема перекрываются по частоте и времени, создавая совокупность мешающих взаимных помех. Это, в свою очередь, приводит к тому, что закон распределения выходных статистик приемного устройства СРС в общем случае не является гауссовским. В силу этого, для оценки помехоустойчивости СРС с шумоподобными сигналами не всегда удается получить точные выражения средней вероятности ошибки (СВО) на бит информации, либо эти выражения оказываются настолько сложными, что нельзя выявить характер зависимости СВО на бит от основных параметров полезного сигнала и взаимных помех. В этих условиях для оценки СВО на бит представляется целесообразным использование различного вида границ, основанных на важнейших статистических неравенствах [4].

Так как для рассматриваемой задачи совокупность взаимных помех может быть представлена суммой независимых случайных величин, то для оценки СВО на бит наиболее целесообразно применение модифицированных границ Чернова [4], определенных на основе вычисления контурных интегралов. При этом границы Чернова задаются соотношениями, содержащими производящую функцию моментов случайной величины и параметр оптимизации, который позволяет получить наиболее точную границу.

Наряду с традиционным подходом к определению границ Чернова в статье рассмотрены возможности модификации на основе непосредственного использования контурного интеграла. Получена также асимптотическая оценка СВО на бит методом перевала [5].

Модели сигналов и помех

С целью упрощения дальнейшего анализа ограничимся рассмотрением ШПС с бинарной фазовой манипуляцией [1]. В этом случае при прямоугольной форме информационной последовательности $d(t)$ и псевдослучайной последовательности (ПСП) $p(t)$ сигнал можно описать выражением

$$S_0(t) = A_0 d(t) p(t) \cos(2\pi f_0 t + \Theta_0), \quad (1)$$

Приводятся выражения модифицированных границ Чернова для оценки средней вероятности ошибки на бит информации в системах радиосвязи с шумоподобными сигналами при действии взаимных помех, обусловленных многостанционным доступом. Получена асимптотическая оценка средней вероятности ошибки на бит путем вычисления контурного интеграла методом перевала.

где A_0, f_0, Θ_0 - амплитуда, несущая частота и фаза сигнала, соответственно.

Информационный сигнал $d(t)$ и сигнал ПСП $p(t)$ можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} d(t) &= \sum_n d_n U_T(t - nT), \\ p(t) &= \sum_i p_i f(t - iT_p), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где \sum_n, \sum_i означают суммирование по всем номерам n и i информационной и кодовой последовательности; U_T - прямоугольный импульс длительности T , равной длительности информационного символа; $\{d_n\}$ - последовательность двоичных информационных символов: $\{d_n\} = \dots, d_{-1}, d_1, d_2, \dots$; $f(t)$ - элементарный сигнал кодовой ПСП длительности T_p ; $\{p_i\}$ - последовательность положительных и отрицательных импульсов, имеющих в частном случае прямоугольную форму: $\{p_i\} = \dots, p_{-1}, p_0, p_1, p_2, \dots$.

При проведении анализа примем, что длительность информационного символа T в целое число раз больше длительности элемента ПСП T_p : $T = NT_p$. В этом случае ширина спектра шумоподобного сигнала в N раз больше ширины спектра информационного сигнала.

Предположим, что оптимальный прием ШПС на фоне аддитивного белого гауссовского шума $n(t)$ обеспечивается с помощью когерентного корреляционного приемника. На рис.1 приведены структурная схема приемника и совокупность воздействующих на него сигналов. Суммарный сигнал $y(t)$ можно записать в виде:

$$y(t) = \sum_{i=1}^k A_i d_i(t - \tau_i) p_i(t - \tau_i) \cos(2\pi f_0 t + \theta_i) + n(t). \quad (3)$$

При этом статистика на выходе приемника, согласованного по времени и фазе с сигналом $s_1(t)$, может быть представлена зависимостью

$$Z(T) = \pm \frac{A_1 T}{2} + \sum_{i=2}^k J_i(d_i \tau_i \theta_i) + n_T, \quad (4)$$

$$\text{где } J_i(d_i \tau_i \theta_i) = A_i \cos \theta_i [d_{i-1} \rho_{i1}(\tau_i) + d_{i,0} \hat{\rho}_{i1}(\tau_i)], \quad (5)$$

$$n_T = \int_0^T n(t) p_1(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_1) dt.$$

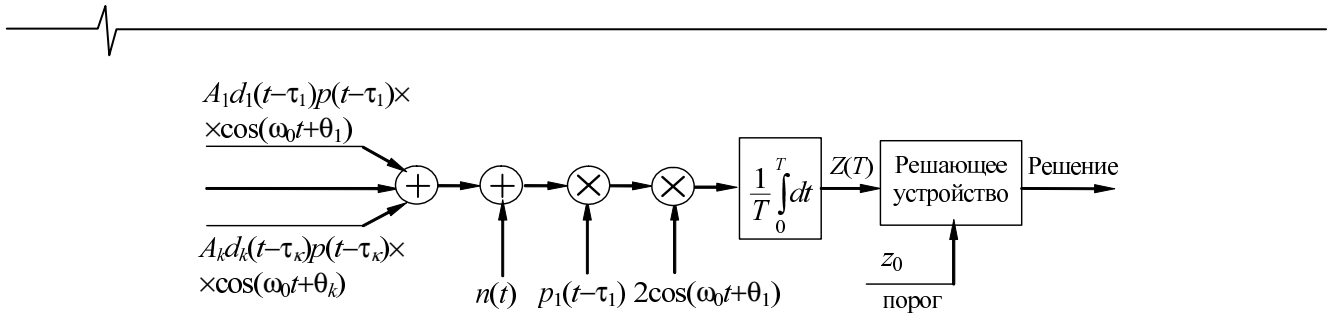


Рис.1. Структурная схема приемника и совокупность помех.

В формулах (3)-(5) обозначено: A_i – амплитуда мешающих сигналов (полагаем, что A_i является детерминированной величиной); τ_i , θ_i – задержка по времени и фазе мешающего сигнала относительно опорного сигнала (параметры τ_i и θ_i считаются случайными равномерно распределенными величинами на промежутке $[0, T]$ и $[0, 2\pi]$ соответственно); $J(\cdot)$ – случайная величина, характеризующая сумму взаимных помех и зависящая от информационных символов, фазовых задержек и задержек по времени (в силу симметрии распределений случайных фаз и знаков информационной последовательности величины $J(\cdot)$ имеет нулевое математическое ожидание и симметричное относительно нуля распределение [3,6]); d_i – информационная последовательность, которую можно представить в виде стационарного стохастического процесса, принимающего значения ± 1 с вероятностью 0,5 через моменты времени, кратные T ; d_{i-1} , $d_{i,0}$ – части (отрезки) двух соседних информационных символов i -го мешающего сигнала, поступающие на вход интегратора (при этом полагаем, что d_{i-1} , $d_{i,0}$ – независимые случайные величины, принимающие значения ± 1 с вероятностью 0,5); $\rho_{i1}(\tau_i)$, $\hat{\rho}_{i1}(\tau_i)$ – частичные взаимокорреляционные функции (ВКФ):

$$\left. \begin{aligned} \rho_{i1} &= \int_0^{\tau_i} P_i(t - \tau_i) P_i(t) dt, \\ \hat{\rho}_{i1} &= \int_{\tau_i}^T P_i(t - \tau_i) P_i(t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В случае, когда величины d_{i-1} и $d_{i,0}$ имеют один и тот же знак, сумма $\rho_{i1}(\tau_i)$ и $\hat{\rho}_{i1}(\tau_i)$ представляет собой ВКФ, расширяющих спектры сигналов последовательностей $\rho_1(t)$ и $\rho_i(t)$.

На выходе решающего устройства (см. рис.1) принимается решение в пользу символа “единица”, если статистика $Z(T) \geq 0$, а при $Z(T) < 0$ – в пользу символа “минус единица”. Решение будет принято с ошибкой, если $Z(T) < 0$, когда $d(t) = +1$, или $Z(T) \geq 0$, если $d(t) = -1$.

Средняя вероятность ошибки на бит информации

В соответствии с приведенным выше правилом принятия решения СВО на бит P_E может быть представлена в следующей общей форме:

$$P_E = P_r(J + n_T < -\lambda) = P_r(J + n_T \geq \lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} f_{J+n_T}(x) dx, \quad (7)$$

где $f_{J+n_T}(x)$ – плотность распределения случайной

величины $J + n_T$; $\lambda = A_1 T / 2$, $J = \sum_{i=2}^k J_i(d_i, \tau_i, \theta_i)$

Для дальнейшего анализа введем в рассмотрение производящую функцию моментов случайной величины [7]

$$\Lambda_{J+n_T}(u) = E\{\exp(J + n_T)u\}, \quad (8)$$

где $E\{\cdot\}$ означает операцию усреднения. Так как случайные величины $J(\cdot)$ и n_T независимы, то, используя свойства производящей функции моментов, имеем

$$\Lambda_{J+n_T}(u) = \Lambda_J(u) \Lambda_{n_T}(u), \quad (9)$$

где

$$\Lambda_J(u) = E_J\{\exp(Ju)\}, \quad (9a)$$

$$\Lambda_{n_T}(u) = E_{n_T}\{\exp(n_T u)\}. \quad (9b)$$

Плотность распределения $f_{J+n_T}(x)$ является обратным преобразованием Лапласа от производящей функции моментов случайной величины [7]

$$f_{J+n_T}(x) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} \Lambda_{J+n_T}(u) \exp(xu) du. \quad (10)$$

После подстановки (10) в (7) и интегрирования по x получим выражение для СВО на бит в виде контурного интеграла

$$P_E = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} \frac{1}{u} \Lambda_J(u) \Lambda_{n_T}(u) \exp(\lambda u) du, \quad (11)$$

где β – параметр оптимизации, значение которого лежит между сингулярными точками функций $\Lambda_J(u)$, $\Lambda_{n_T}(u)$ и началом координат. Учитывая то, что n_T – гауссовская случайная величина с нулевым средним и дисперсией σ^2 , ее производящая функция моментов имеет вид:

$$\Lambda_{n_T}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(ux - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \exp\left(\frac{u^2\sigma^2}{2}\right). \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получим

$$P_E = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} \frac{1}{u} \Lambda_J(u) \exp\left(\lambda u + \frac{u^2\sigma^2}{2}\right) du. \quad (13)$$

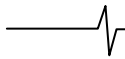
Контурный интеграл можно представить как интеграл от действительной переменной y . В этом случае вдоль контура интегрирования имеем $u = \beta + jy$, $du = jdy$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} P_E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta + jy} \exp\left[-(\beta + jy)\lambda + (\beta + jy)^2 \frac{\sigma^2}{2}\right] \Lambda_J(\beta + jy) dy = \\ &= \exp\left[-\lambda\beta + \frac{\beta^2\sigma^2}{2}\right] I, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta + jy} \exp\left[-jy(\lambda - \beta\sigma^2) - \frac{y^2\sigma^2}{2}\right] \Lambda_J(\beta + jy) dy. \quad (15)$$

Заметим, что зависимость для СВО на бит P_E (14) практически аналогична выражению для СВО на бит, полученному в [8] методом аналитического продолжения



характеристической функции $f_j(x)$ случайной величины $J(\cdot)$ в комплексную область. Отличие заключается в том, что в интеграле (15) вместо производящей функции $\Lambda_j(\beta+jy)$ используется характеристическая функция.

Границы Чернова

Модифицированная верхняя граница Чернова.

Для нахождения верхней границы СВО на бит применим к интегралу (15) неравенство вида:

$$\left| \int_a^B f(x) dx \right| \leq \int_a^B |f(x)| dx, \tag{16}$$

в результате получим

$$I \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\beta+jy|} \left| \exp{jy\left(-\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\right)} \exp\left(-\frac{y^2\sigma^2}{2}\right) \right| \Lambda_j(\beta+jy) |dy| \tag{17}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{|\beta+jy|} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2+y^2}}, \quad \left| \exp{jy\left(-\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\right)} \right| = 1,$$

$$|\Lambda_j(\beta+jy)| = |E\{\exp(\beta J) \exp(jy)\}| \leq \Lambda_j(\beta),$$

выражение (17) примет вид:

$$I \leq \frac{1}{2\pi\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2\sigma^2}{2}\right) \Lambda_j(\beta) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta\sigma} \Lambda_j(\beta). \tag{18}$$

После подстановки (18) в (14) получим выражение для модифицированной верхней границы Чернова

$$P_E \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta\sigma} \exp\left(-\lambda\beta + \frac{\beta^2\sigma^2}{2}\right) \Lambda_j(\beta) = G_M^B(\lambda, \beta) \tag{19}$$

для любого $\beta > 0$.

В [6] приведена верхняя граница Чернова, полученная на основе неравенства Чебышева,

$$G_0^B(\lambda, \beta) = \exp\left(-\lambda\beta + \frac{\beta^2\sigma^2}{2}\right) \Lambda_j(\beta). \tag{20}$$

Легко заметить, что верхняя граница (19) отличается от классической (общепринятой) верхней границы (20) на величину множителя $1/(\sqrt{2\pi}\beta\sigma)$. Поэтому выражение (19) будем называть *модифицированной верхней границей Чернова*. Наличие множителя в (19) обеспечивает более точную верхнюю границу для СВО на бит.

Модифицированная нижняя граница Чернова.

Для определения нижней границы Чернова воспользуемся действительной частью интеграла (15). При этом экспоненциальную функцию запишем в виде: $e^{jy} = \cos(y) + j \sin(y)$; умножим числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\beta+jy$ и воспользуемся неравенствами

$$\cos(y) \geq 1 - y^2/2 \quad \text{и} \quad \sin(y) \geq -1 \quad \text{для всех } y.$$

В этом случае получим неравенство для интеграла (15)

$$I \geq \frac{1}{2\pi} E\{\exp(\beta J)\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta^2+y^2} [\beta(1-D_1y^2) - |y|] \exp\left(-\frac{\sigma^2 y^2}{2}\right) dy, \tag{21}$$

$$\text{где } D_1 = [J^2 - 2J(\lambda - \beta\sigma^2) + (\lambda - \beta\sigma^2)^2]/2. \tag{22}$$

Производя усреднение (21) по случайной переменной J аналогично [8], получим

$$I \geq \frac{1}{2\pi} \Lambda_j(\beta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta^2+y^2} [\beta(1-D_2y^2) - |y|] \exp\left(-\frac{\sigma^2 y^2}{2}\right) dy, \tag{23}$$

где

$$D_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\Lambda_j(\beta)} [\Lambda_j''(\beta) - 2(\lambda - \beta\sigma^2) \Lambda_j'(\beta) + (\lambda - \beta\sigma^2)^2 \Lambda_j(\beta)]. \tag{24}$$

Интегрируя (23), получим

$$I \geq \Lambda_j(\beta) \left[\frac{1}{2} \exp\left(\frac{\sigma^2\beta^2}{2}\right) (1+\beta^2 D_2) \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta\sigma}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\beta^2 D_2}{\sqrt{2\pi}\beta\sigma} - \frac{1}{\pi(\beta\sigma)^2} \right], \tag{25}$$

где $\operatorname{erfc}(x)$ – дополнительная функция ошибок:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-x^2) dx, \tag{26}$$

которую для $x \geq 0$ можно аппроксимировать выражением

$$\operatorname{erfc}(x) \geq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-x^2)}{x + \sqrt{x^2 + 2}}. \tag{27}$$

На основе (14), (25) и (27) может быть получена нижняя граница для СВО

$$P_E \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta\sigma} \exp\left(-\lambda\beta + \frac{\sigma^2\beta^2}{2}\right) \Lambda_j(\beta) \left(\frac{2}{1+a} - \beta^2 D_2 \frac{a-1}{a+1} - \frac{2}{\sqrt{2\pi}\beta\sigma} \right) = G_M^H(\lambda, \beta) \tag{28}$$

для любого $\beta > 0$; где $G_M^H(\lambda, \beta)$ обозначает модифицированную нижнюю границу Чернова,

$$a = \left[1 + \frac{4}{(\beta\sigma)^2} \right]^{1/2}.$$

Сопоставляя (19) и (28), можно записать:

$$G_M^H(\lambda, \beta) \leq P_E \leq G_M^B(\lambda, \beta). \tag{29}$$

При этом модифицированная нижняя граница Чернова (28) отличается от модифицированной верхней границы Чернова (19) наличием множителя

$$C = \frac{2}{1+a} - \beta^2 D_2 \frac{a-1}{a+1} - \frac{2}{\sqrt{2\pi}\beta\sigma}. \tag{30}$$

Оптимальное значение параметра β .

Для получения наиболее точной оценки границ Чернова (19) и (28) необходимо определить такие значения параметра β , одно из которых минимизирует $G_M^B(\lambda, \beta)$, а второе – максимизирует $G_M^H(\lambda, \beta)$. Минимизация $G_M^B(\lambda, \beta)$ и максимизация $G_M^H(\lambda, \beta)$ приводит к решению достаточно сложных уравнений. В этом случае можно ограничиться квазиоптимальным значением параметра β , минимизирующим функцию $\beta G_M^B(\lambda, \beta)$ и максимизирующим функцию $\beta G_M^H(\lambda, \beta)$ или любую другую монотонную функцию от $G_M^B(\lambda, \beta)$ и $G_M^H(\lambda, \beta)$ (например, логарифмическую).

Рассмотрим нахождение квазиоптимального параметра применительно к модифицированной верхней границе Чернова (19). Как показано в [6], необходимое условие минимума $\beta G_M^B(\lambda, \beta)$ приводит к уравнению вида:

$$\frac{d}{d\beta} \ln \{\beta G_M^B(\lambda, \beta)\} = -\lambda + \beta\sigma^2 + \frac{d}{d\beta} \ln \Lambda_j(\beta) = G(\lambda, \beta) = 0. \tag{31}$$

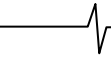
Так как $\beta > 0$ и J – центрированная случайная величина, то

$$\frac{d}{d\beta} \ln \Lambda_j(\beta) = \frac{\Lambda_j'(\beta)}{\Lambda_j(\beta)} \Big|_{\beta=0} = 0$$

и, следовательно,

$$G(\lambda, 0) = -\lambda < 0. \tag{32}$$

Используя (31), свойства производящей функции моментов случайной величины и неравенство Иенсена [7], можно показать, что при $\beta = \lambda/\sigma^2$ имеет место



$$G(\lambda, \lambda/\sigma^2) = \frac{\Lambda'_j(\lambda/\sigma^2)}{\Lambda_j(\lambda/\sigma^2)} > 0, \quad (33)$$

Таким образом, из (32) и (33) видно, что происходит чередование знака, и поэтому квазиоптимальное значение β^* для модифицированной верхней границы Чернова заключено в интервале $[0, \lambda/\sigma^2]$. В [8] для определения модифицированной нижней границы Чернова предлагается квазиоптимальное значение параметра β выбирать также, как и для случая модифицированной верхней границы Чернова, из интервала $[0, \lambda/\sigma^2]$. При этом член D_2 (24) выражения (23) может быть записан в виде:

$$0 \leq D_2 = \frac{1}{2} \frac{\Lambda''_j(\beta) \Lambda_j(\beta) - [\Lambda'_j(\beta)]^2}{\Lambda_j^2(\beta)} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\beta^2} \ln \Lambda_j(\beta). \quad (34)$$

Приближенная оценка максимального значения частичных взаимокорреляционных функций. Приведем оценку максимального значения частичных ВКФ (6) $\rho_{i1}(\tau_i)$ и $\hat{\rho}_{i1}(\tau_i)$, которые возникают при наличии задержки по времени между ПСП i -го сигнала и опорной ПСП. Заметим, что время задержки i -го сигнала относительно опорного может быть как больше, так и меньше нуля. Положим вначале для определенности, что $\tau_i = lT_p$, где T_p – длительность элементарного импульса ПСП. Тогда интегральные выражения (6) можно записать в виде сумм:

$$\rho_{i1}(\tau_i) = \sum_{j=0}^{l-1} p_j^{(1)} p_{N-l+j}^{(i)}, \quad (35)$$

$$\hat{\rho}_{i1}(\tau_i) = \sum_{j=l+1}^N p_j^{(1)} p_{j-1}^{(i)}. \quad (36)$$

Для проведения дальнейшего анализа введем соотношения, используя результаты [9]:

$$C_{i1}(m) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{N-1-m} p_{j+m}^{(1)} p_j^{(i)} & \text{при } 0 \leq m \leq N-1, \\ \sum_{j=0}^{N-1-m} p_j^{(1)} p_{j-m}^{(i)} & \text{при } 1-N < m < 0. \end{cases} \quad (37)$$

Теперь выражения (35) и (36) можно записать через соотношения (37). Для рассматриваемого на рис.2 случая, когда время задержки отрицательно, при $m=l-N$ получим

$$C_{i1}(l-N) = \sum_{j=0}^{N-1+l-N} p_j^{(1)} p_{j-l+N}^{(i)} = \sum_{j=0}^{l-1} p_j^{(1)} p_{N-l+j}^{(i)}. \quad (38)$$

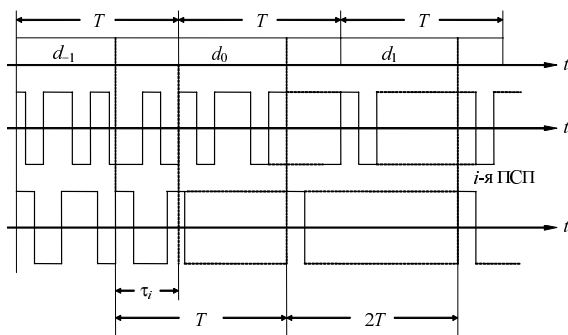


Рис.2. Эпюры сигналов и расширяющих спектр последовательностей.

Таким образом, из (38) и (35) следует, что для $\tau_i = -lT_p$, имеет место равенство

$$\rho_{i1}(\tau_i) = C_{i1}(l-N)T_p. \quad (39)$$

При $m=l$ на основе (37) получим

$$C_{i1}(l) = \sum_{j=0}^{N-1+l} p_j^{(1)} p_{j-m}^{(i)}. \quad (40)$$

Используя (36) и (40), можно записать:

$$\hat{\rho}_{i1}(\tau_i) = C_{i1}(l)T_p. \quad (41)$$

Так как в общем случае время задержки

$$lT_p \leq \tau_i \leq (l+1)T_p, \quad (42)$$

то (39) и (41) можно переписать в виде:

$$\rho_{i1}(\tau_i) = C_{i1}(l-N)T_p + [C_{i1}(l+1-N) - C_{i1}(l-N)](\tau_i - lT_p), \quad (43)$$

$$\hat{\rho}_{i1}(\tau_i) = C_{i1}(l)T_p + [C_{i1}(l+1) - C_{i1}(l)](\tau_i - lT_p). \quad (44)$$

Для относительно больших баз сигналов $N \gg 1$ вторыми слагаемыми в (43) и (44) можно пренебречь.

В соответствии с [9] введем в рассмотрение периодическую ВКФ (ПВКФ)

$$\theta_{i1}(l) = \sum_{j=0}^{N-1} p_{j+1}^{(1)} p_j^{(i)} = C_{i1}(l) + C_{i1}(l-N) \quad (45)$$

и так называемую “нечетную” ПВКФ

$$\hat{\theta}_{i1}(l) = C_{i1}(l) - C_{i1}(l-N). \quad (46)$$

Заметим, что

$$\left. \begin{aligned} \theta_{i1}(l) &= \theta_{i1}(N-l), \\ \hat{\theta}_{i1}(l) &= -\hat{\theta}_{i1}(N-l). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Оба свойства (47) следуют из того, что $C_{i1}(l) = C_{i1}(-l)$. Используя приведенные соотношения для $\rho_{i1}(\tau_i)$ и $\hat{\rho}_{i1}(\tau_i)$, оценим вклад i -й взаимной помехи $J_i(d_i, \tau_i, \theta_i)$ (5) в суммарную помеху J для двух случаев соответствия информационных символов полезного сигнала и i -й помехи:

1. $d_{i-1} = d_{i,0}$,
2. $d_{i-1} \neq d_{i,0}$.

В обоих случаях имеем

$$d_{i-1}\rho_{i1}(\tau_i) = d_{i-1}\{\theta_{i1}(l)T_p + [\theta_{i1}(l+1) - \theta_{i1}(l)](\tau_i - lT_p)\}, \quad (48)$$

$$d_{i-1}\hat{\rho}_{i1}(\tau_i) = d_{i-1}\{\hat{\theta}_{i1}(l)T_p + [\hat{\theta}_{i1}(l+1) - \hat{\theta}_{i1}(l)](\tau_i - lT_p)\}, \quad (49)$$

где вторым слагаемым можно пренебречь, и тогда величина $d_{i-1}\rho_{i1}(\tau_i) + d_{i-1}\hat{\rho}_{i1}(\tau_i)$ будет представлять собой ПВКФ вида:

$$r_{i1}(\tau_i) = \theta_{i1}(l)T_p + \hat{\theta}_{i1}(l)T_p. \quad (50)$$

В [10] показано, что для M -последовательностей, широко используемых в СРС, максимальное значение ПВКФ $r_{i1}(\tau_i)$ однозначно связано с базой сигнала N и ограничено диапазоном $(1,5 \div 6)/\sqrt{N}$.

Асимптотическая оценка средней вероятности ошибки

Используемый ранее контурный интеграл (11) может быть применен для получения асимптотической оценки СВО на бит $P_E(\lambda)$ при $\lambda \gg 1$. С этой целью воспользуемся одним из наиболее распространенных методов – методом перевала [5], который применяется для оценки контурных интегралов вида:

$$F(\lambda) = \int_C \varphi(z) \exp[f(z, \lambda)] dz, \quad (51)$$

где $\varphi(z), f(z, \lambda)$ – функции аналитические в некоторой области, содержащей контур интегрирования. Как известно [5], сущность метода перевала состоит в том, что при больших значениях λ величина интеграла (51) в основном определяется тем участком пути интегрирования, на котором $\text{Re}\{f(z, \lambda)\}$ достигает наибольшего значения. При этом путь интегрирования следует деформировать таким образом, чтобы он проходил через точку перевала z_0 , в которой $f'(z_0, \lambda) = 0$.

Используя [5], асимптотическое значение интеграла (51) можно записать в виде:

$$F(\lambda) \sim \varphi(z_0) \exp[f(z_0, \lambda)] \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(z_0, \lambda)|}}. \quad (52)$$

На основе адекватности контурных интегралов (11) и (51) можно записать

$$f(z, \lambda) = -z\lambda + z^2\sigma^2/2 + \ln \Lambda_J(z),$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}},$$

$$f''(z, \lambda) = \sigma^2 + \frac{d^2}{dz^2} \ln \Lambda_J(z) = \sigma^2 + C, \quad (53)$$

где $C = \frac{d^2}{dz^2} \ln \Lambda_J(z)$.

Седловая точка z_0 , как было отмечено ранее, находится из условия

$$\frac{df(z, \lambda)}{dz} = -\lambda + \sigma^2 z + \frac{\Lambda'(z)}{\Lambda(z)} = 0.$$

Выполнив соответствующие преобразования с учетом контура интегрирования и перейдя от z_0 к β , получим выражение асимптотической оценки для вероятности ошибки

$$\bar{P}_E(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta\sigma}} \exp\{-\beta\lambda + \beta^2\sigma^2/2\} \Lambda_J(\beta) \frac{1}{\sqrt{1+C/\sigma^2}}. \quad (54)$$

Из сравнения (19) и (54) видно, что асимптотическая оценка СВО на бит $\bar{P}_E(\lambda)$ отличается от модифицированной верхней границы Чернова на множитель $1/\sqrt{1+C/\sigma^2} < 1$, т.е.,

$$\bar{P}_E(\lambda) = G_M^B(\lambda, \beta) \frac{1}{\sqrt{1+C/\sigma^2}}. \quad (55)$$

Расчет верхней и нижней границ Чернова и асимптотической оценки средней вероятности ошибки

Для построения границы Чернова $G_M^B(\lambda, \beta)$ и асимптотической оценки СВО на бит $\bar{P}_E(\lambda)$ рассмотрим случай, когда между опорным сигналом и i -й взаимной помехой отсутствует синхронизация как по фазе, так и по времени задержки. При этом суммарная помеха J определяется из выражений (4) и (5). Применительно к данной помехе требуется найти производящую функцию моментов случайной величины $\Lambda_J(\beta)$, параметр C в (54), а также квазиоптимальное значение параметра β .

На основе (9а) производящая функция может быть записана в виде:

$$\Lambda_J(\beta) = E_{\theta_i, \tau_i} \left[\exp \left(\beta \sum_{i=2}^k R_i \cos \theta_i \right) \right], \quad (56)$$

где $E_{\theta_i, \tau_i}(x)$ означает усреднение по случайной фазе θ_i и случайному времени τ_i . Параметр R_i можно представить в виде:

$$R_i = \frac{A_i}{2} \frac{(1,5 \div 6)}{\sqrt{N}}.$$

В этом случае производящую функцию получим усреднением (56) только по фазовым задержкам

$$\Lambda_J(\beta) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{k-2} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \exp \left[\beta \sum_{i=2}^k R_i \cos \theta_i \right] d\theta_2 \dots d\theta_k = \prod_{i=2}^k I_0(\beta R_i), \quad (57)$$

где $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

В соответствии с (53) определим параметр C

$$C = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\beta^2} \ln \Lambda_J(\beta), \quad (58)$$

где $\ln \Lambda_J(\beta) = \sum_{i=2}^k \ln I_0(\beta R_i)$.

Учитывая, что $I_0'(z) = I_1(z)$, после дифференцирования (58) получим

$$\frac{d}{d\beta} \ln \Lambda_J(\beta) = \sum_{i=2}^k \frac{R_i I_1(\beta R_i)}{I_0(\beta R_i)}. \quad (59)$$

Вторая производная от $\ln \Lambda_J(\beta)$ имеет вид:

$$\frac{d^2}{d\beta^2} \ln \Lambda_J(\beta) = \sum_{i=2}^k R_i^2 \frac{[I_1'(\beta R_i) I_0(\beta R_i) - I_1^2(\beta R_i)]}{I_0^2(\beta R_i)}. \quad (60)$$

Используя свойства производных от модифицированных функций Бесселя [9]

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^m [I_\nu(z) z^\nu] = z^{\nu-m} I_{\nu-m}(z),$$

получим, что при $m = \nu = 1$

$$I_1'(z) + I_1(z)/z = I_0(z). \quad (61)$$

Из (60) с учетом (61) следует

$$\frac{d^2}{d\beta^2} \ln \Lambda_J(\beta) = \sum_{i=2}^k R_i^2 \left[1 - \frac{[I_1(\beta R_i)]^2}{I_0^2(\beta R_i)} - \frac{-I_1^2(\beta R_i)}{I_0^2(\beta R_i)} \right]. \quad (62)$$

Для малых значений аргумента βR_i

$$I_\nu(z) = (z/2)^\nu / \Gamma(\nu+1),$$

где $\Gamma(\nu+1)$ – гамма-функция:

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(0) = 1,$$

откуда $\frac{I_1(z)}{I_0(z)} = \frac{z}{2}$. (63)

После подстановки (63) в (62) окончательно получим, что параметр C при малых значениях βR_i имеет вид:

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^k R_i^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta^2 R_i^2}{4} \right). \quad (64)$$

Квазиоптимальное значение параметра β для рассматриваемого вида помехи при расчете модифицированной верхней границы Чернова может быть найдено из уравнения (31), которое с учетом (59) и равенства $I_0'(z) = I_1(z)$, можно записать в виде:

$$\sum_{i=2}^k \frac{R_i I_1(\beta R_i)}{I_0(\beta R_i)} + \beta \sigma^2 - \lambda = 0. \quad (65)$$

В частном случае, при малой мощности взаимных помех $\beta R_i \ll 1$, уравнение (65) может быть решено в явном виде.

На основе изложенного [6], имеем

$$\beta^* = \frac{\lambda}{\sigma^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^k \frac{R_i^2}{\sigma^2} \right)}. \quad (66)$$

Ввиду сложности выражения для модифицированной нижней границы Чернова $G_M^H(\lambda, \beta)$ (28) не удастся определить в явном виде оптимальное значение параметра β из решения уравнения

$$\frac{d}{d\beta} [G_M^H(\lambda, \beta)] = 0.$$

В свою очередь, предложенный в [8] подход для использования в нижней границе Чернова позволяет рассчитать $G_M^H(\lambda, \beta)$ только для малых значений отношения сигнал-шум E_s/G_0 и незначительного числа взаимных помех $k=2, \dots, 10$. Поэтому для определения нижней границы СВО на бит СРС с шумоподобными сигналами в условиях взаимных помех требуются другие методические подходы.

По приведенным выражениям были выполнены расчеты по определению верхней границы Чернова (19) и

асимптотической оценки СВО на бит (54) в зависимости от соотношения сигнал-шум E_s/G_0 при квазиоптимальном значении β^* (66). В качестве параметров использовались: число взаимных помех $k=2, 3, 5, 8, 10$; база сигнала $N=127, 511$; отношение помеха-шум $E_i/G_0=5$ дБ. При этом полагалось, что энергия каждой взаимной помехи E_i равна энергии сигнала E_s .

Результаты расчетов $G_M^B(\lambda, \beta^*)$ и $\bar{P}_E(\lambda)$ в виде графиков приведены на рис.3-4.

Кроме того, на этих же рисунках для сравнения изображена зависимость СВО на бит P_{E0} при когерентном приеме двоичных противоположных сигналов в отсутствие взаимных помех (штриховая кривая)

$$P_{E0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{E_s/G_0}).$$

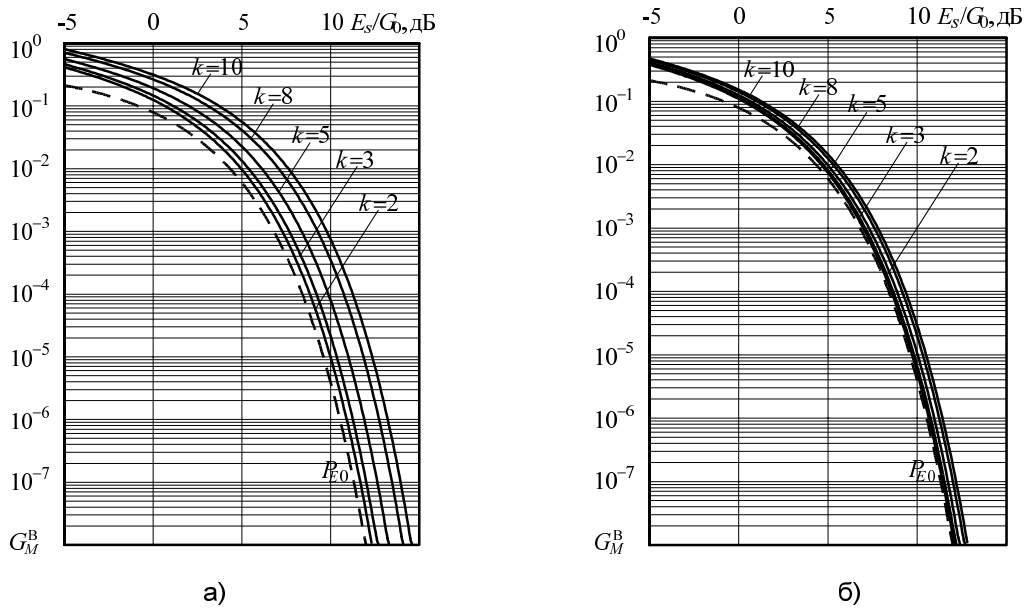


Рис.3. Зависимость верхней границы Чернова для СВО на бит от отношения сигнал-шум при $E_i/G_0=5$ дБ и а) $N=127$, б) $N=511$.

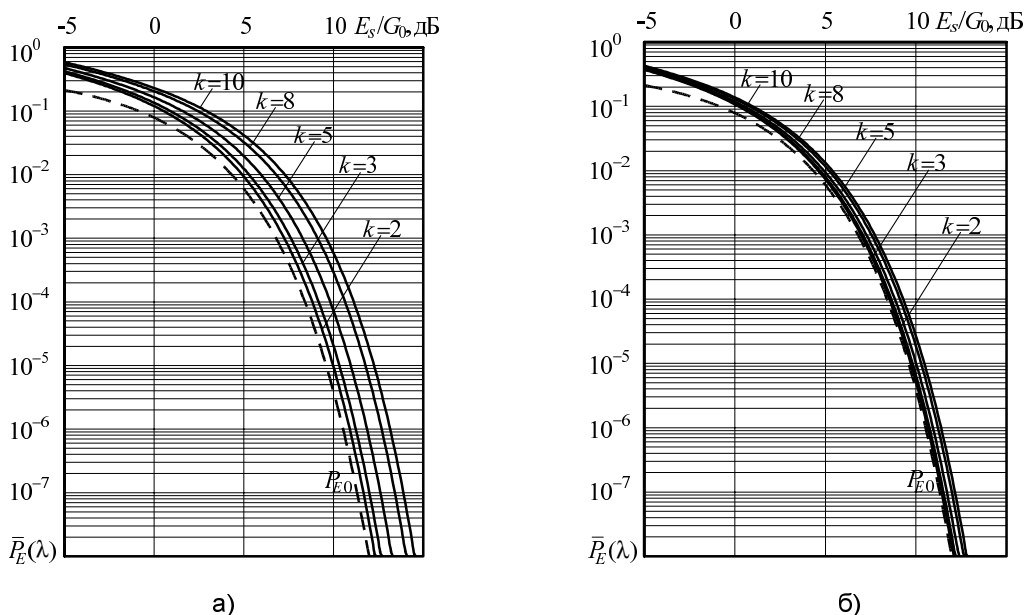


Рис.4. Зависимость асимптотической оценки СВО на бит от отношения сигнал-шум при $E_i/G_0=5$ дБ и а) $N=127$, б) $N=511$.

Заключение

Выполненный анализ показал, что для оценки помехоустойчивости СРС с шумоподобными сигналами в условиях воздействия взаимных помех, обусловленных многостанционным доступом, могут быть использованы модифицированная верхняя граница Чернова, а также асимптотическая оценка СВО на бит, полученные путем вычисления контурных интегралов. При данных методах определения СВО на бит допускается отсутствие синхронизации между опорным сигналом и взаимными помехами как по фазе, так и по времени прихода.

Приведенные на рис.3-4 графики модифицированной верхней границы Чернова и асимптотической оценки СВО на бит позволяют сделать ряд выводов. Верхняя граница Чернова $G_M^B(\lambda, \beta)$ и асимптотическая оценка СВО на бит $\bar{P}_d(\lambda)$ практически не отличаются при принятых для расчета исходных данных и сближаются, чем больше базы сигналов. Влияние взаимных помех тем сильнее, чем меньше база сигналов. При этом СВО на бит резко повышается с увеличением числа взаимных помех. С ростом базы сигналов СВО на бит уменьшается и при малом числе взаимных помех приближается к СВО на бит при отсутствии помех.

Литература

1. Помехозащищенность систем радиосвязи с расширением спектра сигналов модуляцией несущей псевдослучайной последовательностью./ В.И.Борисов, В.М.Зинчук,

- А.Е.Лимарев и др. Под ред. В.И.Борисова. – М.: Радио и связь, 2003, -640 с.
2. Simon M.K., Omura J.K., Sholtz R.A., Levitt B.K. Spread spectrum communications. Handbook. – Electronic Edition, McGraw-Hill. Inc., 2002, -1215 p.
3. Персли М.Б. Расширение спектра сигналов в пакетных радиосетях. Пакетные радиосети. Тематический выпуск./ ТИИЭР, 1987, т.75, №1, сс.140-162.
4. Коржик В.И., Финк Л.М., Щелкунов К.Н. Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений. Справочник. – М.: Радио и связь, 1981, -232 с.
5. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987, -688 с.
6. Борисов В.И., Зинчук В.М., Лимарев А.Е., Мухин Н.П. Методы оценки помехоустойчивости систем радиосвязи с широкополосными сигналами в условиях взаимных помех./ Теория и техника радиосвязи, 1997, вып.1, сс.3-23.
7. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения в 2-х тт. Т.2/Пер. с англ. Ю.В.Прохорова. – М.: Мир, 1967, -738 с.
8. Advanced digital communications./ K.Feher und ed. – Englewood Clifff, N.J.: Prentice Hall Inc., 1987, -736 с.
9. Pursley M.B. Performance evaluation for phase – coded spread – spectrum multiple – access communication. Part 1: System analysis./ IEEE Trans. Commun., 1977, v.Com-25, №8, pp.795-799.
10. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Радио и связь, 1985, -364 с.
11. Справочник по специальным функциям/ Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. Пер. с англ. – М.: Наука, 1979, -832 с.

Уважаемые коллеги!

Предлагаем вам принять участие в формировании тематических выпусков журнала «Цифровая обработка сигналов» и размещению рекламы продукции (услуг) Вашей фирмы на его страницах. В случае положительного решения просим представить в редакцию журнала Ваши предложения по плановому размещению информационных материалов и макет рекламы продукции (услуг) Вашей фирмы с указанием желаемого её месторасположения: обложка (2-я, 3-я или 4-я стр.), цветная внутренняя полоса (объем полосы).

В 2008 году планируется выпуск 4-х номеров журнала (тираж до 1000 экз.). Журнал распространяется по подписке через агентство «Роспечать» в России, СНГ и странах Балтии (индекс 82185), а также на Выставках: «Цифровая обработка сигналов и ее применение – DSPA'2008», «ExpoElectronica», «СвязьЭкспокомм», «ЭЛЕКТРОНИКА: компоненты, оборудование, технологии» (г. Москва) и др.

Размещение рекламы Вашей фирмы на страницах журнала «Цифровая обработка сигналов» на плановой основе (не менее 2-х полных или 4-х половинчатых рекламных полос в течение года) предоставит Вам следующие возможности и права:

1. Первоочередное право расположения рекламных материалов на всех обложках (кроме 1-й) и страницах журнала.
2. Публикация представленных Вами рабочих (рекламных) материалов (статей) объемом до 6 полос в каждом очередном номере (в счет оплаченной рекламы).
3. Установка баннера Вашего сайта (или логотипа вашей организации) на 1-й странице сайта журнала «Цифровая обработка сигналов» (www.dspra.ru) в течение всего года, что привлечет внимание к продукции (услугам) Вашей фирмы новых участников на рынке DSP-технологий (ежедневно фиксируется до 100 и более посещений сайта www.dspra.ru).
4. Предоставление до 10 экз. очередного выпуска журнала.

Ориентировочная стоимость рекламных услуг:

- 4-я (внешняя) страница цветной обложки - 20 тысяч рублей.
- 2-я и 3-я (внутренние) страницы цветной обложки - 13 тысяч рублей.
- 1\2 цветной внутренней полосы - 7 тысяч рублей.
- 1\2 черно-белой внутренней полосы – 1 тысяча рублей.

Ждем Ваших предложений.

С наилучшими пожеланиями, зам. главного редактора
д.т.н., профессор Витязев Владимир Викторович

Предложения прошу направлять по адресу: E-mail: tor@rgta.ru или info@dspra.ru