

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНО-ВЕСОВОГО ИЗМЕРЕНИЯ ЧАСТОТЫ СИГНАЛОВ

Глинченко А. С., к.т.н., профессор кафедры «Радиоэлектронные системы» Сибирского федерального университета, e-mail: toa12@yandex.ru

Тронин О. А., ст. преподаватель кафедры «Радиоэлектронные системы» Сибирского федерального университета, e-mail: toa12@yandex.ru

**Ключевые слова:** частота сигналов, спектральные измерения, частотные выборки, дискретное преобразование Фурье, метод, оценки погрешности.

**Математическое обоснование и обеспечение спектрального измерения частоты сигналов**

Известен метод цифрового некогерентного измерения частоты комплексных и вещественных периодических сигналов [1] по частотным выборкам (ЧВ) дискретного преобразования Фурье (ДПФ) дискретизированной с частотой дискретизации  $f_d$  (периодом  $T_d = 1/f_d$ ) реализации сигнала  $x(n)$  конечной длины  $N$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , взвешенной весовой функцией (ВФ)  $w(n)$ :

$$X(j\lambda_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot w(n) \cdot e^{-j\lambda_k n}, \quad X(jf_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot w(n) \cdot e^{-j f_k n T_d}. \quad (1)$$

Метод основывается на зависимости отношения амплитуд частотных выборок ДПФ  $X_k = |X(j\lambda_k)|$ , вычисленных на нормированных дискретных частотах  $\lambda_k = k \cdot (2\pi/N)$  (или физических частотах  $f_k = k \cdot f_d/N$ ),  $k = 0, 1, \dots, (N - 1)/2$ , от нормированной или физической ( $\lambda_c = (2\pi/N) \cdot (k + \alpha)$ ,  $F_c = (f_o/N) \cdot (k + \alpha)$ ) частоты сигнала, определяемой значениями целой ( $k$ ) и дробной ( $\alpha$ ) части числа периодов сигнала на длине реализации  $N$ . Значение  $k$  в этом методе находится по номеру частотной выборки наибольшей амплитуды  $X_k$ , а значение  $\alpha$  ( $-0,5 \leq \alpha \leq 0,5$ ) – по одному из отношений амплитуд соседних ЧВ  $R_{k+1} = X_{k+1}/X_k$ ,  $R_{k-1} = X_{k-1}/X_k$  (или обобщенно  $R_{k\pm 1} = X_{k\pm 1}/X_k$ ), связанному с  $\alpha$  известной функциональной зависимостью (функцией измерения)  $\alpha = \psi^{-1}(R_{k\pm 1})$ . Она является обратной функции отношения

$$\psi(\alpha, N) = W[(2\pi/N) \cdot (1 - \alpha)] / W[(2\pi/N) \cdot \alpha] = R_{k\pm 1} \quad (2)$$

преобразований Фурье ВФ

Приведены алгоритмы косвенной оценки частоты по отношениям амплитуд частотных выборок дискретного (быстрого) преобразования Фурье взвешенной реализации сигнала. Даны аналитические оценки погрешности измерения частоты вещественных сигналов. Предложены способы повышения точности измерений при реализации их с помощью компьютерных и микропроцессорных вычислительных средств.

$$W(\lambda) = N^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \cdot e^{-j\lambda n} \cdot e^{j\lambda(N/2)} \quad (3)$$

(частотной характеристики (ЧХ) ВФ) на частотах  $\lambda = \Delta\lambda_{k\pm 1} = \lambda_{k\pm 1} - \lambda_c = (2\pi/N)(\pm 1 \mp \alpha)$  и  $\Delta\lambda_k = \lambda_k - \lambda_c = -(2\pi/N) \cdot \alpha$ , приравненной к отношению амплитуд ЧВ  $R_{k\pm 1}$ .

Метод непосредственно применим для измерения частоты комплексного гармонического сигнала  $x(n) = X_m \cdot e^{j(2\pi F_c n T_d + \varphi)} = X_m \cdot e^{j(\lambda_c n + \varphi)}$ , ЧВ ДПФ которого  $X(j\lambda_k)$  и их амплитуды  $X_k$  определяются как

$$X(j\lambda_k) = X_m \cdot N \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\Delta\lambda_k \frac{N-1}{2}} \cdot W(\Delta\lambda_k), \quad X_k = X_m \cdot N \cdot W(\Delta\lambda_k). \quad (4)$$

Они зависят от амплитуды  $X_m$ , начальной фазы  $\varphi$  и частоты  $F_c$  ( $\lambda_c$ ) сигнала и от значений ЧХ ВФ  $W(\Delta\lambda_k)$ . На рис. 1, иллюстрирующем данный метод, показаны нормированная ЧХ ВФ  $W(\lambda)/W(0)$ , смещенная к частоте  $\lambda_c$ , и модули ЧВ ДПФ  $X_k/N$ ,  $X_{k\pm 1}/N$  на частотах  $\lambda_k$ ,  $\lambda_{k\pm 1}$ , которые пропорциональны (или равны при  $X_m = 1$ ) значениям ЧХ ВФ  $W(\Delta\lambda_k)$ ,  $W(\Delta\lambda_{k\pm 1})$ . В пределах главного лепестка ЧХ ВФ шириной  $\Delta\lambda_{\text{гл}} = D \cdot (2\pi/N)$  ( $D \geq 4$ ) на комплексный гармонический сигнал с частотой  $\lambda_c = (2\pi/N) \cdot (k + \alpha)$  или  $F_c = (f_o/N) \cdot (k + \alpha)$  откликаются  $D$  или  $D-1$  соседних каналов ДПФ с номерами  $k, k \pm 1, k \pm 2, \dots$  (на рис. 1  $D = 4$ ).

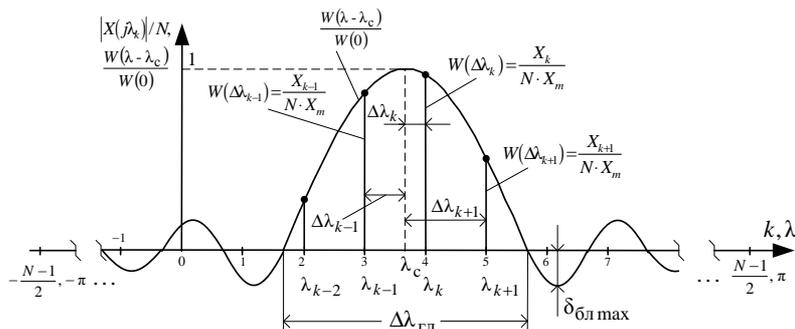


Рис. 1. Отклики каналов ДПФ на комплексный гармонический сигнал с частотой  $\lambda_c$  и амплитудой  $X_m=1$  и вид нормированной ЧХ ВФ (для случая  $\alpha < 0$ )

Оценка  $\alpha$  осуществляется по ЧВ  $X_{k\pm 1}$  большей амплитуды:  $X_{k\pm 1} = \max\{X_{k+1}, X_{k-1}\}$ ; ей же соответствует и знак  $\alpha_n = \psi(R_{k\pm 1})$ :  $\alpha_n > 0$  при  $X_{k\pm 1} = X_{k+1}$  и  $\alpha_n < 0$  при  $X_{k\pm 1} = X_{k-1}$ .

В общем случае функция измерения находится численно путем табулирования и обращения функции отношения  $\psi(\alpha, N) = R_{k\pm 1}$  по рассчитанной в соответствии с (3) ЧХ ВФ  $W(\theta)$  ( $\theta = \lambda / (2\pi/N) = k + \alpha$  – частота в бинах ДПФ) для значений  $k = 0, \alpha = 0, \dots, \pm 1, 5$ .

При длине ВФ  $N > (50 - 100)$  функции отношения (2) практически не зависят от значения  $N$ :  $\psi(\alpha, N) \approx \psi(\alpha)$ , что позволяет для ряда ВФ получить аналитические выражения для функций отношения и измерения, по которым возможно как проведение измерений, так и оценка погрешностей и поиск способов их уменьшения. К ним относятся, в частности, ВФ Ханна, Хэмминга, Блэкмана, Блэкмана-Хэрриса, Наттолла (косинусные ВФ), которые по одному или совокупности своих параметров отвечают конкретным задачам спектральных измерений [2]. Им соответствуют общие описания для ВФ  $w(n), n = 0, N-1$ :

$$w(n) = a_0 - a_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + a_2 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{N}n\right),$$

их ЧХ:  $W(\theta) = a_0 \cdot \frac{\sin(\theta \cdot \pi)}{\theta \cdot \pi} \frac{1 - b_2 \cdot \theta^2 + b_4 \cdot \theta^4}{1 - 1,25 \cdot \theta^2 + 0,25 \cdot \theta^4}$  (справедливых до  $\theta \approx k \leq (0,2 \div 0,3) \cdot (N/\pi)$ ) и функций отношения:

$$\psi(\alpha) = \frac{(2 + \alpha)1 - b_2 \cdot (1 - \alpha)^2 + b_4 \cdot (1 - \alpha)^4}{(3 - \alpha)1 - b_2 \cdot \alpha^2 + b_4 \cdot \alpha^4} \quad (5)$$

с коэффициентами

$$b_4 = \frac{1}{4 \cdot a_0} (a_0 - a_1 + a_2), \quad b_2 = \frac{1}{4 \cdot a_0} (5 \cdot a_0 - 4 \cdot a_1 + a_2) \quad (\text{табл. 1}).$$

Для ВФ Ханна с учетом ее коэффициентов аналитические выражения ЧХ, функции отношения и функции измерения имеют вид:

$$W(\theta) = 0,5 \cdot \frac{\sin(\theta \cdot \pi)}{\theta \cdot \pi} \left( \frac{1}{1 - \theta^2} \right);$$

$$\psi(\alpha) = \frac{1 + \alpha}{2 - \alpha}; \quad \alpha_n = \pm \frac{2R_{k\pm 1} - 1}{R_{k\pm 1} + 1} \quad (6)$$

Частотная характеристика и функция отношения ВФ Хэмминга определяются как

$$W(\theta) = a_0 \cdot \frac{\sin(\theta \cdot \pi)}{\theta \cdot \pi} \left( \frac{1 - (8/54) \cdot \theta^2}{1 - \theta^2} \right),$$

$$\psi(\alpha) = \frac{(1 + \alpha)}{(2 - \alpha)} \left[ \frac{1 - (8/54) \cdot (1 - \alpha)^2}{1 - (8/54) \cdot \alpha^2} \right] \quad (7)$$

(Примечание 1: значения ЧХ ВФ  $W(\theta)$  при  $\theta=1, \theta=2$  находятся как  $W(1) = (a_0/1,5) \cdot (1 - b_2 + b_4)$ ,  $W(2) = (a_0/3) \cdot (1 - 4 \cdot b_2 + 16 \cdot b_4)$ ).

Быстрое нахождение  $\alpha_n$  по неразрешаемым относительно  $\alpha$  функциям отношения (5), (7) возможно с помощью эффективного алгоритма вычисления полиномов

$q_0 + q_1 \cdot \alpha + \dots + q_m \cdot \alpha^m = q_0 + \alpha(q_1 + \alpha(\dots + \alpha \cdot q_m) \dots)$  [1], к которым приводятся уравнения  $\psi(\alpha) = R_{k\pm 1}$ , а при компьютерной реализации – с помощью стандартных функций вычисления их корней.

На рис. 2,а приведены графики функций измерения  $\alpha_n = \psi^{-1}(R_{k\pm 1})$  и  $\alpha_n = -\psi^{-1}(R_{k-1})$  для ВФ Ханна ( $D = 4$ ), рассчитанные в соответствии с (6).

При ширине главного лепестка ЧХ  $D \geq 4$  измерения выполняются по трем ЧВ, отношения амплитуд которых  $R_{k+1}$  и  $R_{k-1}$ , согласно функции измерения рис. 2, а (сплошные линии), ограничены снизу минимальным значением  $R'_{(k\pm 1)\min}$ , равным значению функции отношения  $\psi(\alpha)$  при  $\alpha = 0$ . При измерении частоты вещественных сигналов и сигналов в присутствии шумов и помех функции измерения автоматически расширяются до возможных при этом отношений амплитуд ЧВ  $R''_{(k\pm 1)\min} = \psi(\alpha)|_{\alpha=-0,5}$  и  $R'''_{(k\pm 1)\min} = \psi(\alpha)|_{\alpha=-1}$  (штриховые и штрихпунктирные линии на рис. 2, а). В таблице 2 приведены значения  $R'_{(k\pm 1)\min}$ ,  $R''_{(k\pm 1)\min}$  и  $R'''_{(k\pm 1)\min}$ , рассчитанные по функциям отношения описанных выше ВФ.

Таблица 1

ВФ	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$b_2$	$b_4$
Ханна	0,5	0,5	0	1/4	0
Хэмминга	0,54	0,46	0	43/108	1/27
Блэкмана	0,42	0,5	0,08	3/28	0
Блэкмана-Хэрриса-3	0,42323	0,49755	0,07922	0,12119	0,00289

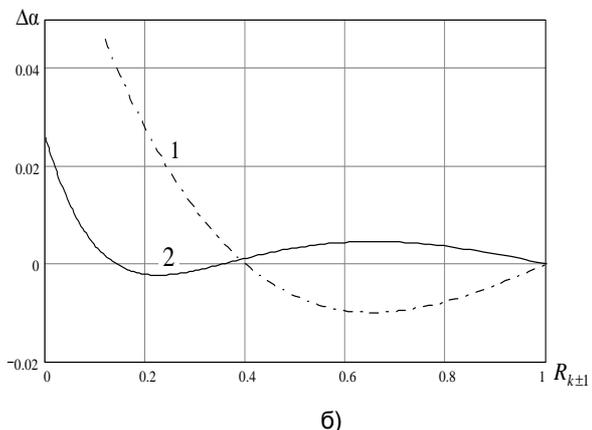
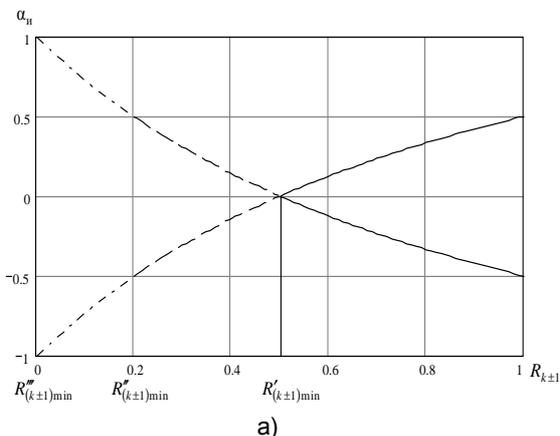


Рис. 2. Графики функции измерения для ВФ Ханна (а) и погрешностей полиномиального приближения функции измерения для ВФ Хэмминга (б)

ВФ	Ханна	Гаусса	Хэмминга	Блэкмана	Блэкмана-Хэрриса-3
$R'_{(k+1)\min}$	0,5	0,45404	0,4259259	0,595238	0,5878
$R''_{(k+1)\min}$	0,2	0,20615	0,1384615	0,33421	0,327854
$R'''_{(k+1)\min}$	0	0,0936	0	0,16	0,159204

При отсутствии аналитических выражений для функций отношения и измерения их приближенные описания могут быть получены путем аппроксимации логарифмической ЧХ ВФ по справочным данным ВФ. Достижимая при этом точность приближения (рис. 2,б) при аппроксимации полиномами 2-го (график 1) и 4-го (график 2) порядка, рассчитанными для ВФ Хэмминга, может быть достаточной для измерения частоты зашумленных сигналов, когда доминирующей является случайная составляющая погрешности.

**Измерение частоты вещественных гармонических сигналов**

При измерении частоты *вещественного гармонического сигнала* в соответствии с алгоритмом измерения частоты комплексных гармонических сигналов возникает погрешность, вызываемая наложением на измеряемые ЧВ дополнительной спектральной компоненты отрицательной частоты  $-\lambda_c$ , проходящей через боковые лепестки (БЛ) ЧХ ВФ. Ее влияние определяется вторым слагаемым выражения (8) ДПФ  $\tilde{X}(j\lambda_k)$  вещественного гармонического сигнала  $\tilde{x}(n) = X_m \sin(\lambda_c n + \varphi)$ , отличающим его от ДПФ  $X(j\lambda_k)$  (4) комплексного гармонического сигнала (с амплитудой  $X_m/2$  и начальной фазой  $\varphi - \pi/2$ ):

$$\tilde{X}(j\lambda_k) = (X_m/2) \cdot N \cdot e^{j(\varphi-\pi/2)} \cdot e^{-j\lambda_k \frac{N-1}{2}} \cdot W(\Delta\lambda_k) - (X_m/2) \cdot N \cdot e^{-j(\varphi+\pi/2)} \cdot e^{-j(\lambda_k+\lambda_c) \frac{N-1}{2}} \cdot W(\lambda_k + \lambda_c) = X(j\lambda_k) + \Delta X(j\lambda_k). \tag{8}$$

Разность амплитуд их ЧВ  $\Delta X_k = \tilde{X}_k - X_k$  максимальна по модулю при начальных фазах сигнала  $\varphi_{max1,2} = \pm(\pi/2) - \pi \cdot \alpha$  или  $\varphi_{max3,4} = \pi - \pi \cdot \alpha, -\pi \cdot \alpha$  и составляет

$$\Delta X_k = (X_m/2) \cdot N \cdot W(\lambda_k + \lambda_c) = (X_m/2) \cdot N \cdot W[(2\pi/N) \cdot (2k + \alpha)] \tag{9}$$

(минимуму  $\Delta X_k$  соответствует  $\varphi_{min} = \varphi_{max} \pm \pi/4$ ).

Изменение амплитуд ЧВ  $\tilde{X}_k, X_{k\pm 1}$  и их отношений

$$\tilde{R}_{k\pm 1} = (X_{k\pm 1} + \Delta X_{k\pm 1}) / (X_k + \Delta X_k) \tag{10}$$

приводит к отличию измеренных  $\alpha_n = \psi^{-1}(\tilde{R}_{k\pm 1})$  и истинных значений  $\alpha$ , определяющему погрешность оценки нормированной частоты  $d\alpha = \alpha_n - \alpha$  (выраженной в долях бина) и относительную погрешность измерения физической частоты  $dF/F = d\alpha/(k + \alpha)$ . Погрешность зависит от уровня БЛ ЧХ ВФ, скорости их спада и других параметров ВФ, а также от частоты сигнала, т. е. значений  $k$  и  $\alpha$ .

На рис. 3 приведены рассчитанные односторонние графики зависимости максимальной погрешности  $d\alpha$  от  $\alpha$  при использовании ВФ Ханна (а) и Хэмминга (б) (определяемые ими возможные значения погрешности заключены в пределах  $\pm d\alpha$ ).

В соответствии с общей закономерностью при увеличении  $k$  погрешность наложения уменьшается за счет уменьшения уровня боковых лепестков со скоростью, зависящей от вида ВФ (за исключением погрешности наложения для ВФ Хэмминга при  $k=2$ , а также ВФ Блэкмана-Хэрриса при малых  $k$ , что связано с особенностями первых БЛ их ЧХ). При изменении  $\alpha$  в пределах  $(0 \pm 0,5)$  уровень бокового лепестка изменяется от нуля при  $\alpha = \alpha_0$  до максимального положительного или отрицательного значения при  $\alpha = \alpha_m$ . При  $\alpha = \alpha_0$  погрешность измерения также равна нулю, а при  $\alpha = \alpha_m$  близка к максимальной. Значения  $\alpha_0$  и  $\alpha_m$  зависят от ширины главного лепестка ЧХ ВФ  $D$  и ширины ее БЛ. Для ВФ с шириной главного лепестка, кратной целому числу бин:  $D = 2 \cdot r, r = 1, 2, 3, \dots$  и шириной БЛ, равной 1 бину, (ВФ Ханна, Хэмминга, Блэкмана и др.)  $\alpha_0 = 0, \alpha_m = 0,5$ .

В случае ВФ Ханна с максимальным уровнем БЛ  $\delta_{blm} = -32$  дБ и  $D = 4$  уже при  $k > 2$  погрешность измерения становится меньше, чем у ВФ Хэмминга с  $\delta_{blm} = -43$  дБ,  $D = 4$  за счет более высокой скорости убывания БЛ ее ЧХ (соответственно  $-18$  и  $-6$  дБ на октаву).

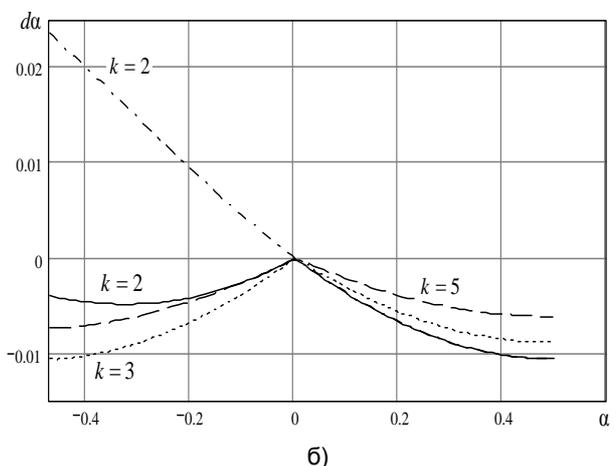
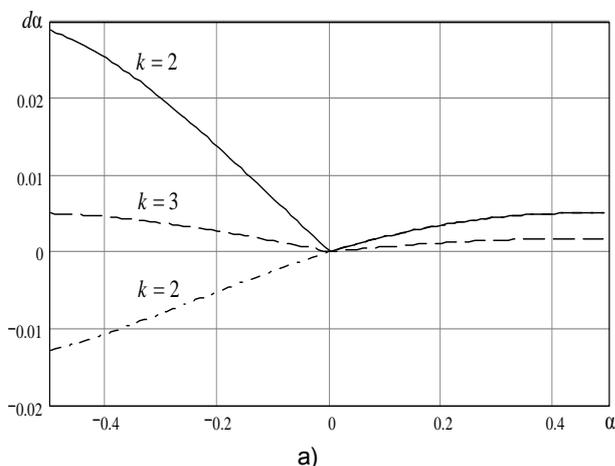


Рис. 3. Графики зависимости погрешности  $d\alpha_n$  от  $\alpha$  для ВФ Ханна (а) и Хэмминга (б)

Еще меньше погрешность измерения частоты для ВФ Блэкмана и Блэкмана-Хэрриса с  $\delta_{\text{блм}} = -58$  дБ при  $\nu = -18$  дБ на октаву и  $\delta_{\text{блм}} = -67$  дБ при  $\nu = -6$  дБ на октаву соответственно. Однако за счет большей ширины главного лепестка их ЧХ ( $D = 6$ ) возрастает минимальное значение числа периодов сигнала  $k_{\text{min}} \approx D/2$ , по которому возможно измерение частоты при  $\alpha > 0$  и  $\alpha < 0$ , а, следовательно, ухудшается разрешение измерителя частоты для многочастотных (полигармонических) сигналов и помех.

При выполнении соотношений  $\Delta X_k \ll X_k$ ,  $\Delta X_{k\pm 1} \ll X_{k\pm 1}$ , справедливых для всех ВФ, погрешность наложения  $d\alpha$  можно определить аналитически методом малых приращений по функции измерения  $\alpha = \psi^{-1}(R_{k\pm 1})$  как  $d\alpha = (\partial\alpha/\partial R_{k\pm 1})dR_{k\pm 1}$  и представить путем математических преобразований общим выражением:

$$d\alpha = \left( \frac{\partial\alpha}{\partial R_{k\pm 1}} \right) \frac{W(0)}{W[(2\pi/N)\alpha]}, \quad (11)$$

$$\left\{ \delta_{\alpha} \left[ \frac{2\pi}{N}(2k\pm 1 + \alpha) \right] - \delta_{\alpha} \left[ \frac{2\pi}{N}(2k + \alpha) \right] \cdot \psi(\alpha, N) \right\}$$

в котором  $\delta_{\alpha}$  соответствует относительным уровням соседних БЛ ЧХ ВФ, имеющим близкие значения, но противоположные знаки.

С помощью (11) можно найти значение погрешности  $d\alpha$  при любых значениях  $k$  и  $\alpha$ . Для ВФ с максимумом погрешности при  $\alpha = \alpha_m = 0,5$  (ВФ с параметром  $D = 2 \cdot r$ ) выражение (11) принимает вид:

$$d\alpha_{(0,5)} = \left( \frac{\partial\alpha}{\partial R_{k\pm 1}} \right)_{(0,5)} \cdot \frac{1}{\delta_{AM}} \Delta_{\alpha}(k),$$

$$\Delta_{\alpha}(k) = \delta_{\alpha} \left[ \frac{2\pi}{N}(2k\pm 1 + \alpha) \right] - \delta_{\alpha} \left[ \frac{2\pi}{N}(2k + \alpha) \right], \quad (12)$$

где  $\Delta_{\alpha}(k)$  – максимальная разность (сумма) соседних БЛ ЧХ ВФ;  $\delta_{AM} = W(\pi/N)/W(0)$  – коэффициент паразитной АМ. Знак  $\Delta_{\alpha}(k)$  при четном  $r$  совпадает со знаком  $\alpha$ , при нечетном  $r$  – противоположен ему.

Производные  $\partial\alpha/\partial R_{k\pm 1}$ , имеющие смысл коэффициентов чувствительности, находятся путем дифференцирования функций измерения или отношения:  $\partial\alpha/\partial R_{k\pm 1} = [\partial\psi(\alpha)/\partial\alpha]^{-1}$ . В таблице 3 приведены значения производных  $\partial\alpha/\partial R_{k\pm 1}$ , вычисленных при значениях  $\alpha = 0; 0,5; -0,5$  для описанных выше ВФ.

Предельную погрешность измерения при  $\alpha_m = \pm 0,5$  для ВФ с малым уровнем БЛ (с параметром  $D \geq 4$ ) можно определить по значению максимального БЛ  $\delta_{\text{блм}}$ , приводимому в справочных данных ВФ:

$$d\alpha_{(\pm 0,5)\text{пред}} = \pm \left( \partial\alpha/\partial R_{k\pm 1} \right)_{(0,5)} \cdot 2\delta_{\text{блм}}. \quad (13)$$

Однако оценка погрешности (13) является завышенной при  $k > k_{\text{min}}$  ( $k_{\text{min}} = 1$  при  $D = 4$ ,  $k_{\text{min}} = 2$  при  $D = 6$ ), так

как не учитывает скорости спада БЛ, значение которой приводится в справочных данных ВФ [2].

Скорость спада БЛ для большинства ВФ кратна 6 дБ на октаву или в линейных единицах кратна 2, т.е.  $\nu = 2^m$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ . С учетом скорости спада сумма соседних БЛ  $\Delta_{\alpha}(k)$  определяется выражением:

$$\Delta_{\alpha}(k) = \pm \delta_{\text{блм}} \left( \frac{(D/2) + 0,5}{2k + 0,5} \right)^m \cdot \left[ 1 + \left( \frac{2k + 0,5}{2k \pm 1 + 0,5} \right)^m \right]. \quad (14)$$

Первый множитель в (14) представляет относительную амплитуду БЛ, через который происходит наложение на ЧВ  $X_k$ , а второе слагаемое в прямых скобках – отношение амплитуд соседних БЛ:  $k$ -го и  $(k\pm 1)$ -го.

Для ВФ Ханна  $m = 3$ ,  $D = 4$ ,  $\delta_{AM} = 0,851$  и для  $k = 1$  в соответствии с (14) получаем  $d\alpha_{(0,5)} = 0,03$ . При  $k = 2$   $d\alpha_{(0,5)} = 0,006$ ; при  $k = 5$   $d\alpha_{(0,5)} = 6,75 \cdot 10^{-4}$ . Аналитические оценки погрешности достаточно хорошо согласуются с расчетными.

### Оценка частоты по расширенным функциям измерения

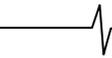
В базовом способе при использовании ВФ с шириной главного лепестка ЧХ  $D \geq 4$  оценка  $\alpha$  вычисляется по большему из отношений амплитуд ЧВ ДПФ:  $R_{k+1} = X_{k+1}/X_k$  или  $R_{k-1} = X_{k-1}/X_k$ ; им же определяется и знак измеренного значения  $\alpha$ . При таком способе оценки  $\alpha$  наблюдаются более высокие значения погрешности наложения  $d\alpha$  в области  $\alpha < 0$  (особенно при малых  $k$ ) (рис. 3).

В то же время с помощью расширенных функций измерения  $\alpha = \psi^{-1}(R_{k+1})$ ,  $\alpha = -\psi^{-1}(R_{k-1})$  (рис. 2, а) оценка  $\alpha$  возможна по отношению амплитуд одних и тех же ЧВ (желательно  $R_{k+1}$ ) во всем диапазоне значений  $\alpha = 0 \pm 0,5$  и соответствующем ему диапазоне отношений  $R_{k+1}$  от  $R''_{(k+1)\text{min}}$  до 1. На рис. 3, а, б штрихпунктирной линией показаны графики погрешности  $d\alpha$  при оценке значений  $\alpha < 0$  по отношению амплитуд ЧВ  $R_{k+1}$  для ВФ Ханна и Хэмминга (при  $k = 2$ ). Как видим, погрешность уменьшилась для ВФ Ханна (при  $\alpha = -0,5$   $d\alpha \approx -0,013$  вместо 0,03 при оценке  $\alpha$  по отношению  $R_{k-1}$ ). Но для ВФ Хэмминга (рис. 3, б) (как и некоторых других ВФ) уменьшения погрешности не происходит при малых  $k$  из-за особенностей первых БЛ их ЧХ, имеющих малую амплитуду.

Аналитически максимальная погрешность  $d\alpha$  оценки  $\alpha$  по ЧВ  $R_{k+1}$  при  $\alpha = -0,5$  определяется с помощью выражения (11) путем подстановки в него  $R_{k\pm 1} = R_{k+1}$ ,  $\alpha = -0,5$ ,  $\psi(-0,5, N) = R''_{(k+1)\text{min}}$  и вычисления производной расширенной функции измерения  $(\partial\alpha/\partial R_{k+1})$  при  $\alpha = -0,5$ , где в соответствии с графиками рис. 2, а наблюдается ее возрастание (табл. 3) (для ВФ Ханна до  $\partial\alpha/\partial R_{k+1}|_{(-0,5)} = 2,083$ ).

Таблица 3

ВФ	Прямоуг.	Ханна	Гаусса	Хэмминга	Блэкмана	Блэкмана-Хэрриса
$(\partial\alpha/\partial R_{k+1}) _{(0,5)}$	0,25	0,75	0,633	0,61	0,98	0,935
$(\partial\alpha/\partial R_{k+1}) _{(0)}$	1	1,333	1,395	1,271	1,565	1,5535
$(\partial\alpha/\partial R_{k+1}) _{(-0,5)}$	–	2,083	3,072	1,625	1,825	1,902



Логическим развитием данного *способа* является одновременное использование обоих отношений ЧВ  $R_{k+1} = X_{k+1}/X_k$  и  $R_{k-1} = X_{k-1}/X_k$ , в одинаковой степени несущих информацию об измеряемом значении  $\alpha$ , которое находится с помощью соответствующих им расширенных функций измерения (рис. 2, а).

В случае вещественного сигнала эти отношения за счёт влияния БЛ изменяют свои значения в одном направлении – либо оба увеличиваются, либо оба уменьшаются. Но соответствующие им функции измерения  $\alpha_{и(+)} = \psi^{-1}(R_{k+1})$  и  $\alpha_{и(-)} = -\psi^{-1}(R_{k-1})$  имеют противоположные наклоны, в результате чего одна оценка, например  $\alpha_{и(+)}$ , увеличивается, а другая  $\alpha_{и(-)}$  – уменьшается и наоборот. Степень отличия их изменений зависит от скорости уменьшения амплитуд соседних БЛ. По мере удаления от  $k_{\min}$  это отличие практически не заметно даже для ВФ с большой скоростью спада БЛ (например, ВФ Ханна).

Определяя  $\alpha_{и}$  как среднее значение оценок  $\alpha_{и(+)}$ ,  $\alpha_{и(-)}$ , т.е. их полусуммой, можно в значительной области значений  $\alpha$  скомпенсировать погрешности обеих оценок и повысить тем самым точность оценки  $\alpha_{и}$ . Математически эта оценка находится как

$$\alpha_{и}^* = \frac{1}{2}(\alpha_{и(+)} + \alpha_{и(-)}) = \frac{1}{2}[\psi^{-1}(R_{k+1}) + \psi^{-1}(R_{k-1})]. \quad (15)$$

Для ВФ Ханна этой оценке соответствуют функция измерения, определяемая выражением:

$$\alpha_{и}^* = \frac{3}{2} \frac{R_{k+1} - R_{k-1}}{(1 + R_{k+1})(1 + R_{k-1})}; \quad (16)$$

Следует отметить, что функции измерения (15), (16) автоматически учитывают и знак  $\alpha_{и}^*$ .

Для сравнения на рис. 4 приведены графики зависимости погрешности  $d\alpha$  по данному способу оценки  $\alpha$

для ВФ Ханна и Хэмминга при тех же  $k$ , что и на рис. 3. Они показывают уменьшение погрешности  $d\alpha$  как в ограниченной области значений  $\alpha$  (для ВФ Ханна при  $k=2$ ), так и при всех значениях  $\alpha = 0 \pm 0,5$  для ВФ Ханна, Хэмминга при  $k \geq 3$ . Поведение погрешности для ВФ Блэкмана и Блэкмана-Хэрриса при малых  $k$  подобно соответственно ВФ Ханна и ВФ Хэмминга.

**Алгоритм измерения частоты при оценке  $\alpha$  данным способом включает:** вычисление квадратов модулей ЧВ ДПФ (1), поиск и вычисление амплитуд наибольшей и соседних с ней ЧВ  $X_k, X_{k+1}, X_{k-1}$  и их отношений  $R_{k+1} = X_{k+1}/X_k, R_{k-1} = X_{k-1}/X_k$ ; определение по расширенным функциям измерения  $\psi^{-1}(R_{k+1}), \psi^{-1}(R_{k-1})$  значений  $\alpha_{и(+)}, \alpha_{и(-)}$  и их усреднение в соответствии с (15).

### Способы коррекции погрешности наложения

Дальнейшее повышение точности измерения частоты достигается коррекцией погрешности наложения, осуществляемой по первичным оценкам частоты, начальной фазы и амплитуды сигнала  $k, \alpha_{и}, \varphi_{и}, X_{m(i)}$  путем вторичной обработки той же считанной реализации сигнала с изменением или без изменения ее длины.

Способы коррекции погрешности наложения путем изменения длины реализации сигнала относительно базового значения  $N$  основываются на приведении первичной оценки  $\alpha_{и}$  к некоторому значению  $\alpha_0$ , которому соответствует минимальная погрешность оценки  $\alpha$ . Отвечающее этому новое значение длины реализации находится как

$$N^* = N + [(i + \Delta\alpha) \cdot n_{т(и)}]_{\text{целое}}, \quad (17)$$

где  $\Delta\alpha = \alpha_0 - \alpha_{и}$ ,  $n_{т(и)} = N/(k + \alpha_{и})$  – число выборок сигнала за период, вычисленное по оценке  $\alpha_{и}$ .

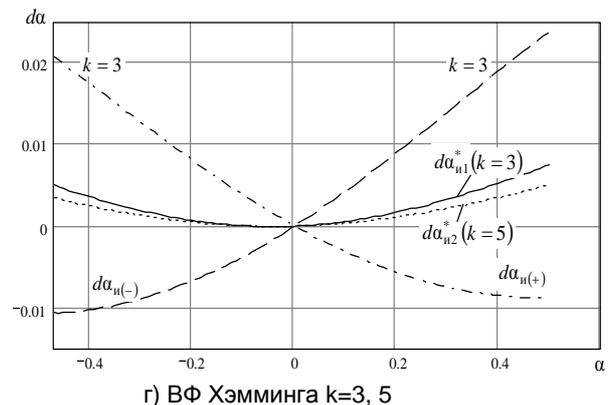
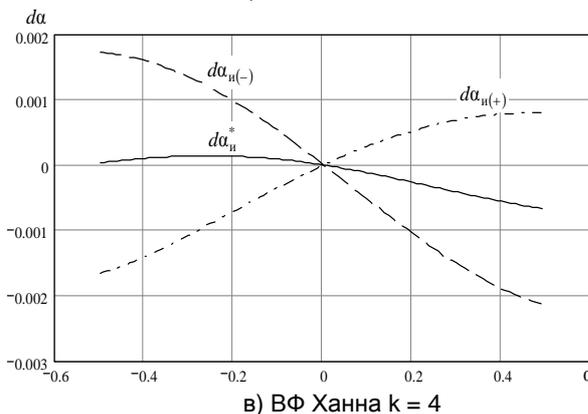
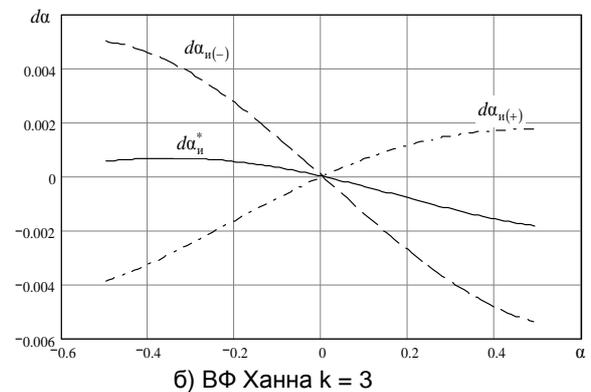
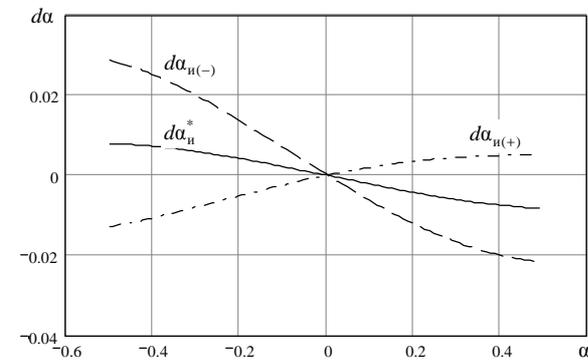


Рис. 4. Графики погрешности  $d\alpha^*$  для ВФ Ханна (а, б, в) и ВФ Хэмминга (г)

В качестве индекса  $i = i_{\min}, \dots, i_{\max}$  принимается значение  $i = i_0$ , при котором минимизируется разность

$$\left| (i + \Delta\alpha) \cdot n_{\tau(n)} - \left[ i + \Delta\alpha \right]_{\text{цчокр}} \cdot n_{\tau(n)} \right|.$$

Минимальное значение  $i$  находится из условия  $N^* \geq N$ :  $i_{\min} = \left[ 1 - \Delta\alpha \right]_{\text{цч}}$ , а максимальное  $i_{\max} = \left[ (0,5 \cdot N / n_{\tau(n)}) - \Delta\alpha \right]_{\text{цч}}$  – из условия не превышения  $N^*_{\max}$  общей считываемой и сохраняемой длины реализации сигнала  $x(n)$ , принятой равной  $N_1 = 1,5N$ . Это соответствует считыванию одного дополнительного периода сигнала при  $k = 2$ .

Приращению  $\Delta N$  на  $\pm 1$  соответствует изменение  $\alpha$  на величину  $\Delta\alpha_1 = \pm 1 / \left( n_{\tau(n)} \right) \approx \pm k / N$ , а путем поиска  $i$  в диапазоне  $i_{\min}, \dots, i_{\max}$  точность приближения  $\alpha_n$  к  $\alpha_0$  повышается до  $\pm 1/N$  (при  $i = i_0$ ).

В первом из данных способов первичная оценка  $\alpha_n$  приводится к значению  $\alpha_0 = 0$ , при котором для ВФ с частотами нулей ЧХ ВФ, кратными бину ДПФ (ВФ Ханна, Хэмминга, Блэкмана, Блэкмана-Хэрриса и др.), погрешность наложения теоретически равна нулю. При этом на реализации сигнала длиной  $N^*$  укладывается примерно целое число периодов сигнала  $k^* \approx N^* / n_{\tau(n)}$ .

Во втором способе  $\alpha_n$  приводится к значению  $\alpha_0 = -(\varphi_n / \pi) \pm 1/4$ , соответствующему начальной фазе сигнала  $\varphi_{\min} = \varphi_n = -\pi \cdot \alpha_0 \pm \pi/4$ , при которой погрешность оценки  $\alpha$  минимальна. В этом случае  $\Delta\alpha = -(\varphi_n / \pi) \pm 1/4 - \alpha_n$ , а знак перед коэффициентом  $1/4$  выбирается в соответствии со знаком первичной оценки фазы  $\varphi_n$ .

Степень повышения точности для обоих способов зависит от значения  $N$ , определяющего точность приближения  $\alpha_n$  к  $\alpha_0$ , от точности первичной оценки  $\alpha_n$ , а для способа коррекции по оценке фазы  $\varphi_n$  – от ее точности и значения  $\alpha_0$ , которое является случайным вследствие априорной неизвестности начальной фазы сигнала.

Второй способ коррекции обоснован для ВФ с частотами нулей ЧХ ВФ, некратными бину ДПФ (ВФ Гаусса, Кайзера и др.)

**Алгоритм измерения частоты данными способами включает следующие операции:** считывается реализация сигнала  $x(n)$  длиной  $N_1 = 1,5N$ ; формируется массив выборок  $x(n) \cdot w(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , по которому находятся первичные оценки  $k, \alpha_n, \varphi_n$  и вычисляются значения  $n_{\tau(n)} = N / (k + \alpha_n)$ ,  $\alpha_0 = -(\varphi_n / \pi) \pm 1/4$ ,  $\Delta\alpha = \alpha_0 - \alpha_n$  (для первого способа  $\alpha_0 = 0$ ),  $i_{\min} = \left[ 1 - \Delta\alpha \right]_{\text{цч}}$ ,  $i_{\max} = \left[ (0,5 \cdot N / n_{\tau(n)}) - \Delta\alpha \right]_{\text{цч}}$ ; находится значение  $i = i_0$ , минимизирующее разность

$$\left| (i + \Delta\alpha) \cdot n_{\tau(n)} - \left[ i + \Delta\alpha \right]_{\text{цчокр}} \cdot n_{\tau(n)} \right|;$$

по выражению (17) вычисляется новое значение  $N^*$ ; формируется реализация  $x(n) \cdot w(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N^*-1$ , по которой и вычисляются вторичные оценки  $k^*, \alpha_n^*, \varphi_n^*$  и измеренное значение частоты сигнала:  $\lambda_{c(n)} = (2\pi/N^*)(k^* + \alpha_n^*)$  или  $F_{c(n)} = (f_d / N^*)(k^* + \alpha_n^*)$ .

В таблице 4 приведены значения погрешности  $d\alpha_{n1}$ , соответствующие первому способу коррекции оценки  $\alpha_{n(+)}$  для ВФ Ханна при  $N = 100, k=2$ , которые меньше погрешности первичной оценки  $d\alpha$  в 10 и более раз.

Недостаток способов повышения точности с коррекцией длины реализации сигнала заключается в необходимости повторного взвешивания и вычисления ДПФ реализаций сигнала разной длины.

В следующих двух способах вторичные оценки параметров сигнала находятся без изменения длины обрабатываемой реализации сигнала.

Первый из них основывается на компенсации погрешности наложения, определяемой вторым слагаемым  $\Delta X(j\lambda_k)$  в выражении (8) ДПФ вещественного гармонического сигнала. Его можно приближенно найти по первичным оценкам параметров сигнала  $k, \alpha_n, \varphi_n, X_{m(n)}$  вычислением ДПФ взвешенного комплексного гармонического сигнала  $x_{(-)}(n) = (X_{m(n)} / 2) \exp\{-j[(2\pi/N)(k + \alpha_n) + \varphi_n + \pi/2]\}$  с частотой  $-\lambda_c = -(2\pi/N)(k + \alpha_n)$ :

$$X_{(-)}(j\lambda_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_{(-)}(n) \cdot w(n) \cdot e^{-j(2\pi/N)k \cdot n}, k = \overline{0, N-1}.$$

В результате сложения  $X_{(-)}(j\lambda_k)$  с ДПФ вещественного гармонического сигнала  $X(j\lambda_k)$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ , получается спектр  $X_{(+)}(j\lambda_k) = X(j\lambda_k) + X_{(-)}(j\lambda_k)$ , приближенно соответствующий ДПФ комплексного гармонического сигнала

$x_{(+)}(n) = (X_{m(n)} / 2) \exp\{-j[(2\pi/N)(k + \alpha_n) + \varphi_n + \pi/2]\}$ . По ДПФ  $X_{(+)}(j\lambda_k)$  и находятся уточненные оценки параметров сигнала  $k^*, \alpha_n^*, \varphi_n^*, X_{m(n)}^*$  с частично скорректированной погрешностью наложения. Степень повышения точности оценок параметров сигнала данным способом зависит от погрешности их первичных оценок. Способ непосредственно применим для любых ВФ и любых оценок нормированной частоты  $\alpha_{(+)}, \alpha_{(-)}, (\alpha_{(+)} + \alpha_{(-)})/2$ .

Алгоритмически более сложно (и менее точно) он реализуется функцией «Extract Single Tone Information» среды графического программирования Lab VIEW [3] по приближенным выражениям для ЧХ ВФ Ханна и базовому способу оценки  $\alpha$ . Получаемая погрешность оценки  $\alpha_n$  при  $k=2$  составляет порядка  $10^{-4} - 10^{-5}$ .

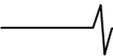
Второй способ повышения точности оценок заключается в смещении спектра вещественного сигнала  $X(j\lambda_k)$  на частоту  $(2\pi/N) \cdot \alpha_n$  путем умножения его взвешенной реализации на комплексный гармонический сигнал  $\exp[j(2\pi/N)\alpha_n \cdot n]$ . По вычисленному ДПФ их произведения

$$X^*(j\lambda_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot w(n) \cdot e^{j(2\pi/N)\alpha_n \cdot n} \cdot e^{-j\lambda_k \cdot n}, k = \overline{0, (N-1)/2}$$

и находятся уточненные оценки параметров сигнала  $k^*, \alpha_n^*, \varphi_n^*, X_{m(n)}^*$ .

Таблица 4

$\alpha$	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$d\alpha$	-0.0123	-0.0107	-0.0080	-0.0051	-0.0024	0,002	0,0035	0,0045	0,0050	0,005
$d\alpha_{n1}$	$-8,3 \cdot 10^{-4}$	$-1,1 \cdot 10^{-3}$	$-1,6 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$9,0 \cdot 10^{-4}$	$-8,8 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$-6,7 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	0
$d\alpha_{n2}$	$-6,4 \cdot 10^{-4}$	$-5,2 \cdot 10^{-4}$	$-4 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$5,8 \cdot 10^{-5}$	$-4,3 \cdot 10^{-5}$	$-7,6 \cdot 10^{-5}$	$6,6 \cdot 10^{-5}$	$6,4 \cdot 10^{-5}$	$-4,6 \cdot 10^{-5}$
$d\alpha_{n3}$	$-3,2 \cdot 10^{-5}$	$-2,6 \cdot 10^{-5}$	$-2 \cdot 10^{-5}$	$-4 \cdot 10^{-6}$	$-1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$-1 \cdot 10^{-6}$



Повышение точности оценок данным способом обусловлено тем, что зеркальная компонента спектра сигнала отрицательной частоты смещается к ближайшему нулю ЧХ ВФ и частично подавляется им.

Данный способ является алгоритмически наиболее простым, так как включает два идентичных цикла обработки сигнала и позволяет проводить измерения с разными ВФ. Его, как и другие способы коррекции погрешности наложения, можно применять многократно к одной и той же реализации сигнала для повышения точности измерения по уточненным вторичным оценкам параметров сигнала.

Значения погрешности этого способа для ВФ Ханна при  $N = 100$ ,  $k=2$ , полученные по одной ( $d\alpha_{и2}$ ) и по двум ( $d\alpha_{и3}$ ) уточняющим итерациям, приведены в табл. 4 и имеют достаточно малые значения.

Измеренные значения начальной фазы и амплитуды сигнала могут быть найдены совместно с оценкой частоты по ЧВ  $X(j\lambda_k)$  наибольшей амплитуды:

$$\varphi_{и} = \arg \{ X(j\lambda_k) \} + \pi/2 - \pi \cdot \alpha_{и};$$
$$X_{m(и)} = [2 \cdot X_k] / \{ N \cdot W[(2\pi/N) \cdot \alpha_{и}] \}.$$

Значение ЧХ ВФ находится как

$$W[(2\pi/N) \cdot \alpha_{и}] = N^{-1} \cdot \left| \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \cdot e^{-j(2\pi/N) \cdot \alpha_{и} \cdot n} \right|.$$

#### Заключение

Таким образом, сочетая эффективные способы первичной оценки дробной части частоты  $\alpha$  (выраженной в бинах) и способы повышения ее точности путем вторичной обработки той же считанной реализации сигнала, можно обеспечить высокую точность спектрального измерения частоты чистых вещественных гармонических сигналов. Эти способы в разных сочетаниях также дают хорошие результаты и при измерении частоты основной и высших гармоник комплексных и вещественных полигармонических сигналов при использовании соответствующих ВФ.

Рассмотренные в работе способы оценки частоты по отношению амплитуд соседних ЧВ, ближайших к измеряемой частоте сигнала (известные и новые), реализованы в измерителе параметров сигналов на базе персональной ЭВМ (сопрягаемой с источником сигналов

через устройство сбора данных NI M6251), обеспечивающем измерение в диапазоне частот до 200 кГц. Программное обеспечение измерителя создано в среде *Lab VIEW*. Оно предусматривает выбор способа оценки частоты, вида ВФ, числа выборок и частоты дискретизации сигнала, источника сигнала – внешнего или внутреннего (в режиме моделирования), статистическую обработку результатов измерений, а также совместное спектральное измерение амплитуды и фазы сигнала в соответствии с методами, изложенными в [4]. Полученные экспериментальные результаты хорошо согласуются с теоретическими.

#### Литература

1. Real-time high accuracy measurement of multifrequency waveforms. Narduzzi C., Offelli C. "IEEE Trans. Instrum. and Meas.", 1987, 36, №4, 964-970. (Контрольно-измерительная техника/ экспресс-информация// М.: ВИНТИ, 1990, №2).
2. Хэррис, Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье / Ф. Дж. Хэррис // ТИИЭР, т. 66. 1978. №1.
3. Суранов А. Я. Lab VIEW 8.20: Справочник по функциям. – М.: ДМК Пресс, 2007.
4. Глинченко, А. С. Измерение параметров сигналов в системах низкочастотной индуктивной электроразведки / А. С. Глинченко, О. А. Тронин // Датчики и системы. –2009. – № 9. – С. 14-18.

### RESEARCH OF SPECTRAL MEASUREMENT OF WEIGHTED SIGNALS FREQUENCY

*Glinchenko A. S., Tronin O. A.*

In article algorithms for an indirect measurement of a signal frequency under ratios of amplitudes frequency samples of the discrete (or fast) Fourier transform of a weighed signal are resulted, analytical estimations of a real signals frequency measurement error are given, ways of measurements accuracy rise by means of computer and microprocessor computing resources are offered.

#### *Уважаемые коллеги!*

Для тех, кто не успел оформить подписку на второе полугодие 2010 года через ОАО «Роспечать», сохраняется возможность приобретения журналов непосредственно в редакции по адресу: 107031, г. Москва, Рождественка, 6/9/20, стр. 1, Российское научно-техническое общество радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова, или оформить Заказ в соответствии с требованиями, выставленными на сайте журнала: [www.dsra.ru](http://www.dsra.ru).

Справки по телефонам: (495) 621-71-08, 621-06-10.

Факс: (495) 621-16-39.

E-mail: [nto.popov@mtu-net.ru](mailto:nto.popov@mtu-net.ru)

[tor@rgta.ryazan.ru](mailto:tor@rgta.ryazan.ru)