УДК 621.391

ТЕОРИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Пономарев В.А., *д.т.н., cik18@gossovet.udm.ru*
Пономарева О.В., *к.т.н., доцент Ижевского государственного технического университета, cik18@gossovet.udm.ru*

На основе системного подхода рассматривается развитие теоретических основ параметрического дискретного преобразования Фурье и анализ его применения в решении практических задач цифровой обработки сигналов.

Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, базис, параметрическое, экспоненциальные функции, дискретные сигналы.

Метод и алгоритмы дискретного преобразования Фурье (ДПФ) занимают важное место при цифровой обработке сигналов в различных областях научных исследований [1,2,3]. Преобразование Фурье в базисе параметрических дискретных экспоненциальных функций – параметрическое дискретное преобразование Фурье (ДПФ-П) [4,5], в настоящее время не получило столь широкого применения. И это несмотря на то, что исследователи в той или иной мере интуитивно используют свойства параметрических дискретных экспоненциальных функций (как правило, при $\theta = ½$) [2]. Например, каноническое разложение случайных функций, предложенное Пугачевым В.С., предполагает по умолчанию дополнение нулевыми отсчетами исходного сигнала до двойной длительности [4]. Аналогичное положение наблюдается и при расчете импульсных характеристик КИХ - фильтров [3]. По мнению авторов настоящей работы такая ситуация объясняется прежде всего тем, что отсутствуют исследования свойств ДПФ-П и определения роли и места данного преобразования в решении практических задач цифровой обработки сигналов.

Задача данной работы – исследование аналитических свойств ДПФ-П и анализ его применения в решении практических задач цифровой обработки сигналов.

Пара преобразований ДПФ-П в матричной форме задается следующими соотношениями [5]:

$$S_{N,\theta} = \frac{1}{N} F_{N,\theta} X_N, \tag{1}$$

$$X_N = F^*_{N,\theta} S_{N,\theta}, \quad 0 \le \theta < 1$$

или в обычной форме:

$$S_N(k,\theta) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n}, \quad k = \overline{0, N-1} \tag{1,а}$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k,\theta) W_N^{-(k+\theta)n}, \quad n = \overline{0, N-1}, \ 0 \le \theta < 1$$

где θ - параметр, * - знак комплексного сопряжения, $X_N = [x(0), x(1), \ldots, x(N-1)]^T$ - представление дискретного сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, в виде вектора N - мерного линейного пространства; T- знак транспонирования; $S_{N,\theta} = [s(0), s(1), \ldots, s(N-1)]^T$ - вектор коэффициентов разложения X_N по системе параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ – П), задаваемой матрицей $F_{N,\theta}$:

$$F_{N,\theta} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & . \ . & (N-1) & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ . \\ (N-1) \\ k \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^{\theta} & . \ . & W_N^{\theta(N-1)} \\ . & . & . \ . & . \\ 1 & W_N^{(N-1+\theta)} & . \ . & W_N^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{bmatrix} \end{array},$$

$$W_N = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}\right] \tag{2}$$

Дискретные функции вида

$$W_N^{(p+\theta)l} = \exp\left[-j\frac{2\pi}{N}(p+\theta)l\right], \quad p,l = \overline{0, N-1}$$

есть параметрические дискретные экспоненциальные функции (ДЭФ-П) - $def_p(p,l,\theta)$.

ДЭФ-П являются обобщением обычных ДЭФ и равны им при значении параметра θ=0. Матрица $F_{N,\theta}$ состоит соответственно из ДЭФ-П при $p=k$, $l=n$. Матрица $F_{N,\theta}$ - не симметрическая, в отличие от матрицы ДПФ, но является также унитарной.

Перечислим без доказательства основные свойства ДЭФ-П (доказательства даны в [4]):

1. ДЭФ-П в отличие от ДЭФ не являются функциями двух равноправных переменных p и l.
2. ДЭФ-П являются периодическими по переменной p и параметрически периодическими по переменной l с периодом N.
3. Система ДЭФ-П не мультипликативна по переменной p и мультипликативна по переменной l.
4. Среднее значение ДЭФ-П по переменной p равно нулю при $l \ne 0$, а по переменной l не равно нулю.
5. Система ДЭФ-П ортогональна по обеим переменным.
6. Система ДЭФ-П является полной системой, так как число линейно независимых функций равно размерности множества дискретных сигналов.

С помощью ДЭФ-П можно расширить понятие периодичности, из которого N – периодичность следует как частный случай. Определим параметрическую N – периодическую решетчатую функцию следующим выражением:

$$x_\theta(n) = x(n \mod N) W_N^{\theta\, N\, ent[n/N]} \tag{3}$$

где ent [ ] – операция взятия целой части. Отметим, что параметрическую N- периодичность можно интерпретировать как результат круговой перестановки внутри интервала $[0, N-1]$с фазовым сдвигом $\exp(j2\pi\theta)$. При θ =0 $x_\theta(n)-$есть N - периодическая функция, а при $\theta = 1/2$ приходим к понятию N - антипериодической функции

$$x_{1/2}(n+N) = -x_{1/2}(n), \tag{4}$$

В этих двух случаях функция $x_\theta(n)-$остается действительной; при $\theta \neq 0,\ 1/2$ функция $x_\theta(n)-$является комплексной. Используя понятие параметрической N-периодичности, можно показать, что выполняются следующие соотношения:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=m}^{r} x_\theta(n) W_N^{(k+\theta)n} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_\theta(n) W_N^{(k+\theta)n} \tag{5}$$

$$\sum_{k=m}^{r} S_N(k,\theta) W_N^{-(k+\theta)n} = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k,\theta) W_N^{-(k+\theta)n} \tag{6}$$

где $|r-m| = N-1$.

Рассмотрим основные свойства ДПФ-П. Введем символическое обозначение для ДПФ-П и ОДПФ-П, определяемых соотношениями (1,а)

$$x_\theta(n) \longleftrightarrow S_N(k,\theta),$$

где $x_\theta(n)$- решетчатая параметрическая N - периодическая функция; $S_N(k,\theta)-$спектр функции $x_\theta(n)$.

<u>Теорема линейности</u>. ДПФ-П линейно по определению. Это означает, что если $x_\theta(n) \longleftrightarrow S_N(k,\theta)$ и $y_\theta(n) \longleftrightarrow Q_N(k,\theta)$, то $\lambda_1 x_\theta(n) + \lambda_2 y_\theta(n) \longleftrightarrow \lambda_1 S_N(k,\theta) + \lambda_2 Q_N(k,\theta)$, где λ_1, λ_2- произвольный числа.

<u>Теорема сдвига</u>. Если $x_\theta(n) \longleftrightarrow S_N(k,\theta)$, то $x_\theta(m+n) \longleftrightarrow W_N^{-(k+\theta)m} S_N(k,\theta) = R_N(k,\theta).$

<u>Доказательство.</u> ДПФ-П решетчатой функций $x_\theta(n)$ равно:

$R_N(k,\theta) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_\theta(n+m) W_N^{(k+\theta)n}$. Положим $n+m=l,$тогда

$$R_N(k,\theta) =$$

$$\frac{1}{N}\sum_{l=m}^{N+m-1} x_\theta(l) W_N^{(k+\theta)(l-m)} = W_N^{-(k+\theta)m}\frac{1}{N}\sum_{i=m}^{N+m-1} x_\theta(l) W_N^{(k+\theta)l}$$

или с учетом (5): $R_N(k,\theta) = W_N^{-(k+\theta)m} S_N(k,\theta),$ аналогично $x_\theta(n-m) = -W_n^{(k+\theta)m} S_N(k,\theta).$

<u>Теорема корреляции.</u> Если $x_\theta(n) \longleftrightarrow S_N(k,\theta)$ и $y_\theta(n) \longleftrightarrow Q_N(k,\theta)$, то ДПФ-П круговой корреляции, определяемой соотношением

$$Z_\theta(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_\theta(m) y_\theta(n+m), \tag{7}$$

равен $U_N(k,\theta) = S_N^*(k,\theta) Q_N(k,\theta),$ где $Z_\theta(n) \longleftrightarrow U_N(k,\theta).$

<u>Доказательство.</u> ДПФ-П решетчатой функции равно

$$U_N(k,\theta) = \frac{1}{N^2}\sum_{m=0}^{N-1} x_\theta(m) \sum_{n=0}^{N-1} y_\theta(n+m) W_N^{(k+\theta)n}.$$

Из теоремы сдвига следует, что

$U_N(k,\theta) = Q_N(k,\theta)\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_\theta(m) W_N^{-(k+\theta)m}$ или

$$U_N(k,\theta) = Q_N(k,\theta) S_N^*(k,\theta).$$

Используя теорему корреляции, докажем справедливость теоремы Парсеваля для ДПФ-П.

Если $x_\theta(n) = y_\theta(n),$ то

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_\theta(n) x_\theta(n+m) = \sum_{k=0}^{N-1} \left|S_N(k,\theta)\right|^2 W_N^{-(k+\theta)n},$$

откуда, при m = 0, следует теорема Парсеваля

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \left|x_\theta(n)\right|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \left|S_N(k,\theta)\right|^2 \tag{8}$$

Для ДПФ-П, аналогично ДПФ, вводится понятие энергетического спектра и спектра мощности: $P_N(k,\theta) = \left|S_N(k,\theta)\right|^2,$

$G_N(k,\theta) = \frac{P_N(k,\theta)}{\Delta f} = N\left|S_N(k,\theta)\right|^2$, где $\Delta f = 1/N$.

Из теоремы сдвига непосредственно следует инвариантность энергетического спектра к сдвигу параметрической N - периодической решетчатой функции $x_\theta(n)$. Для действительной последовательности при значениях параметра $\theta = 0,\ 1/2$ энергетический спектр является четной функцией.

При решении практических задач цифровой обработки сигналов часто имеют дело с сигналами, у которых искусственно увеличен интервал определения одним из следующих способов [1]:

- растяжением сигнала;
- удлинением сигнала.

Различают два варианта растяжения сигнала:

- добавлением после каждого отсчета некоторого количества нулей (теорема растяжения 1);
- повторением каждого отсчета некоторого числа раз (теорема растяжения 2).

Существуют и два варианта удлинения сигнала:

- за счет добавления к сигналу справа нулевых отсчетов, число которых, как правило, кратно числу отсчетов исходного сигнала (теорема удлинения 1);
- за счет периодического повторения сигнала (теорема удлинения 2).

Очевидно, что операцией обратной растяжению сигнала является операция прореживания сигнала, а операцией обратной удлинению сигнала будет операция усечения сигнала.

В монографии [1] рассмотрено видоизменение базисной системы ВКФ для сигналов, подвергшихся таким преобразованиям. Однако, как справедливо отмечено авторами монографии, полученные результаты теряют смысл для N - ичной системы счисления и, следовательно, не могут быть применены для базисной системы ДЭФ. Заметим, что исследование, проведенное в [6] для базисной системы ДЭФ, выполнено лишь для двух вариантов удлинения сигнала и, естественно, не является полным.

Покажем, что с помощью ДПФ-П можно вскрыть сущность явлений, происходящих при такого рода преобразованиях исходного дискретного сигнала.

При значении параметра $\theta = 0$, ДПФ-П переходит в стандартное ДПФ с матрицей преобразования (система базисных функций) следующего вида:

$$\{def(k,n)\} = F_M = F_{Nr} =$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & . & . & . & (M-1) \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ (M-1)_k \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & W_M^1 & . & . & . & W_M^{(M-1)} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & W_M^{(M-1)} & . & . & . & W_M^{(M-1)(M-1)} \end{bmatrix}^n \end{array}, \tag{9}$$

$$W_M = \exp(-j\frac{2\pi}{M});\ M = Nr,\ r = 1,2,3,...$$

Обозначим множество номеров строк матрицы F_{Nr} через E:

$$E = \{0,1,2,..., Nr-1\}$$

Применив к множеству номеров строк E матрицы F_{Nr} отношение сравнимости по модулю r [1], получим r подмножеств классов вычетов по модулю r, мощность каждого из которых равна r.

Используя полученное разбиение, переупорядочим множество строк матрицы F_{Nr} и представим ее в виде блочной матрицы

$$A_{r,бл.} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & . & . & . & (r-1) \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ (r-1)_k \end{array} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & . & . & . & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & . & . & . & A_{2r} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{r1} & A_{r2} & . & . & . & A_{rr} \end{bmatrix}^n \end{array}, \tag{10}$$

где $A_{i,j},\ i,\ j = 1,2,...,r,$ – матрицы размером N, номера строк которых являются классами вычетов по модулю r.

Анализ структуры матрицы (10), проведенный в [7], показал, что матрицы $A_{i,j},\ i,\ j = 1,2,...,r,$ образующие первый столбец блочной матрицы $A_{r,бл.}$, представляются в общем виде следующим образом:

$$A_{i,1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & . & . & . & (N-1) \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ (N-1)_k \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^{(i-1)/r} & . & . & . & W_N^{\frac{(i-1)}{r}(N-1)} \\ 1 & W_N^{1+\frac{(i-1)}{r}} & . & . & . & W_N^{\left[1+\frac{(i-1)}{r}\right](N-1)} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & W_N^{\left[N-1+\frac{(i-1)}{r}\right]} & . & . & . & W_N^{\left[N-1+\frac{(i-1)}{r}\right](N-1)} \end{bmatrix}^n \end{array},$$

$$i = 1,...,r, \tag{11}$$

и при $\theta = (i-1)/r$ совпадают с матрицей ДЭФ-П (2).

А матрицы $A_{i,j},\ j = 1,2,...,r,\ \ i = 1,...,r,$ образующие строки блочной матрицы $A_{r,бл.}$, могут быть получены как кронекеровские произведения матрицы $A_{i,1},\ i = 1,...,r,$ на строки $C_j (j = 1,2,...,r)$ матрицы ДЭФ размерностью $r \times r$:

$$F_r = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & . & . & . & (r-1) \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ (r-1)_k \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & W_r^1 & . & . & . & W_r^{(r-1)} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & W_r^{(r-1)} & . & . & . & W_r^{(r-1)(r-1)} \end{bmatrix}^n \end{array},$$

$$W_r = \exp(-j\frac{2\pi}{r}). \tag{12}$$

Следовательно, блочная матрица (10) преобразуется к виду:

$$A_{r,бл.} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & . & . & . & (r-1) \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ (r-1)_k \end{array} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{11} & . & . & . & A_{11} \\ A_{21} & W_r^1 A_{21} & . & . & . & W_r^{(r-1)} A_{21} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{r1} & W_r^{(r-1)} A_{r1} & . & . & . & W_r^{(r-1)(r-1)} A_{r1} \end{bmatrix}^n \end{array}, \tag{13}$$

где $A_{ij} = A_{i1} \otimes C_j, \otimes -$ символ кронекеровского произведения;

$$G_j = \left[1, W_r^{(j-1)}, ..., W_r^{(j-1)(r-1)}\right],\ i = 1,2,...r;\ j = 1,2,...,r.$$

Обозначим множество номеров столбцов матрицы F_{Nr} через G:

$$G = \{0,1,2,..., Nr-1\}$$

Применив к множеству номеров столбцов G матрицы F_{Nr} отношение сравнимости по модулю r [1], получим r подмножеств классов вычетов по модулю r, мощность каждого из которых равна r.

Используя полученное разбиение, переупорядочим множество столбцов матрицы F_{Nr} и представим ее в виде блочной матрицы

$$B_{r,бл.} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & . & . & . & (r-1) \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ (r-1)_k \end{array} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & . & . & . & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & . & . & . & B_{2r} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ B_{r1} & B_{r2} & . & . & . & B_{rr} \end{bmatrix}^n \end{array}, \tag{14}$$

где $B_{ij}, i, j = 1,2,...r,$ - матрицы размером N, номера столбцов которых являются классами вычетов по модулю r.

Анализ структуры матрицы (14) показал, что матрицы $B_{ij}, i, j = 1,2,...r,$ образующие первую строку блочной матрицы $B_{r,бл.}$, представляются в общем виде следующим образом:

$$B_{i,1} =$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ (N-1)_k \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & ... & (N-1) \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ W_N^{(i-1)/r} & W_N^{1+\frac{(i-1)}{r}} & ... & W_N^{\left[N-1+\frac{(i-1)}{r}\right]} \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ W_N^{\frac{(i-1)}{r}(N-1)} & W_N^{\left[1+\frac{(i-1)}{r}\right](N-1)} & ... & W_N^{\left[N-1+\frac{(i-1)}{r}\right](N-1)} \end{bmatrix}^n \end{array},$$

$$i = 1,...,r, \tag{15}$$

А матрицы $B_{ij}, i, j = 1,2,...r,$ образующие столбцы блочной матрицы $B_{r,бл.}$, могут быть получены как кронекеровские произведения матрицы $B_{ij}, j = 1,...r,$ на строки $C_j\,(j = 1,2,...,r)$ матрицы ДЭФ размерностью $r \times r$ (12).

Следовательно, блочная матрица (14) преобразуется к виду:

$$B_{r,бл.} =$$

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ (r-1)_k \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & ... & (r-1) \end{array} \\
\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & ... & B_{1r} \\ B_{11} & W_r^1 B_{12} & ... & W_r^{(r-1)} B_{12} \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ . & . & .... & . \\ B_{11} & W_r^{(r-1)} B_{12} & ... & W_r^{(r-1)(r-1)} B_{1r} \end{bmatrix}^n \end{array}, \tag{16}$$

где $B_{ij} = B_{1,j} \otimes C_j$, $\otimes$ - символ кронекеровского произведения;

$$G_j = \left[1, W_r^{(j-1)},...,W_r^{(j-1)(r-1)}\right], i = 1,2,...r;\ j = 1,2....,r.$$

Проведя сравнение соотношений (2) и (15), приходим к выводу, что матрицы B_{ij}, образующие первую строку блочной матрицы $B_{r,бл.}$ (14), при $\theta = (i-1)/r$ задают разложение ДПФ-П по базисным функциям вида:

$$F_{\theta,N} =$$

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ . \\ (N-1)_k \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & ... & (N-1) \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ W_N^{\theta} & W_N^{(1+\theta)} & ... & W_N^{(N-1+\theta)} \\ . & . & .... & . \\ W_N^{\theta(N-1)} & W_N^{(1+\theta)(N-1)} & ... & W^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{bmatrix}^n \end{array} \tag{17}$$

где $W_N^{k(n+\theta)} = \exp\left[-j\dfrac{2\pi}{N}k(n+\theta)\right],\ k,\ n = \overline{0, N-1}.$

Матрицы $A_{r,бл.}$ (13) и $B_{r,бл.}$ (14) позволяют вскрыть структуру процессов, происходящих при рассмотренных выше преобразованиях исходного сигнала.

В случае растяжения сигнала, согласно теоремы 1, добавление *r* нулевых отсчетов после каждого отсчета приводит к тому, что матрицы $B_{1,j}, j = 2,3....r,$ «работают» с нулевыми отсчетами и, следовательно, в спектральной области происходит периодическое повторение спектра исходного сигнала *r* раз. На рис. 1 – приведен пример для *r* = 2. В случае же использования теоремы растяжения 2 (повторения каждого отсчета *r* раз), один и тот же сигнал подается на ДПФ-П при θ = 0, 1/*r*,…(*r*-1)/*r* с последующим суммированием согласно (16). На рис. 1 рассмотрен случай для *r* =2 (растяжение 2).

При удлинении сигнала (теорема удлинения 1) «работает» только первый столбец матрицы $A_{r,бл.}$ (13). При этом между спектральными отсчетами исходного сигнала «появляются» интерполированные отсчеты (рис.2).

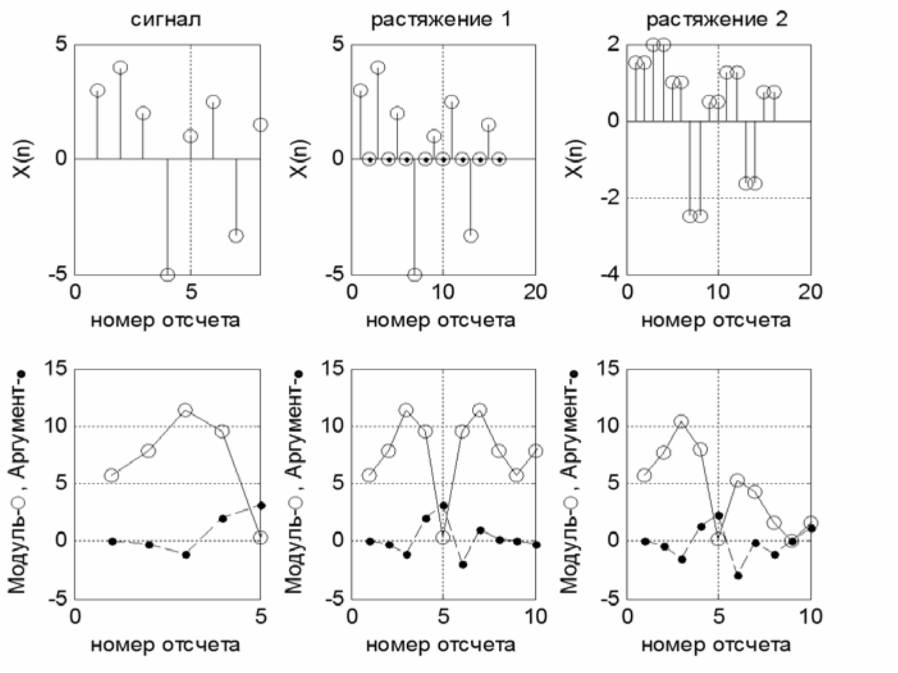

Рис. 1. Сигналы, подвергнутые растяжению 1 и 2 и их спектры

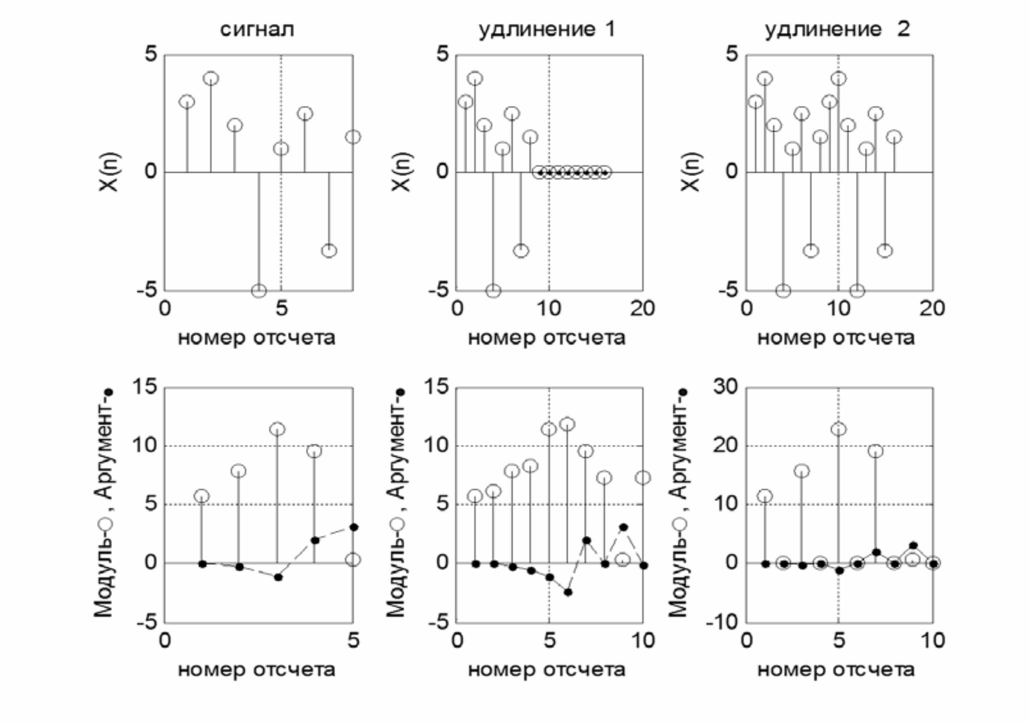

Рис. 2 Сигналы, подвергнутые удлинению 1 и 2 и их спектры

В случае же периодического повторения сигнала r раз спектр исходного сигнала «прореживается» r нулевыми отсчетами. На рис. 2 приведен пример для r = 2. Этот вывод становится очевидным, если принять во внимание следующее соотношение:

$$\sum_{n=0}^{r-1} A\ \exp(-j\frac{2\pi}{r})nk = A\frac{1-\exp(-j2\pi k)}{1-\exp(-j\frac{2\pi k}{N})} = 0, \text{при } k \neq 0$$

В заключении укажем некоторые задачи цифровой обработки сигналов, где применение ДПФ-П позволило, во-первых, существенно сократить время вычислений и требуемый объем памяти, во-вторых, провести анализ процессов, происходящих при соответствующих преобразованиях исходного дискретного сигнала:

- решение задач интерполяции (как в частотной так и временной областях) [4];
- локализация спектральных пиков[8] ;
- расчет импульсных характеристик КИХ – фильтров [7];
- определение свертки функций [4];
- вычисление корреляционных и взаимно-корреляционных функций [5];
- выявление скрытых периодичностей [5];
- вычисление ДПФ быстрыми алгоритмами в реальном масштабе времени, при существенном расширении диапазона анализируемых длительностей исходного сигнала [7].

Литература

1. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. - М.:Сов. Радио, 1975.-208с.
2. Пойда В.Н. Спектральный анализ в дискретных ортогональных базисах. Мн., «Наука и техника», 1978.-136с.
3. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ.-М.: ООО «Бином-Пресс», 2007 г.-656 с.-: ил.
4. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций // Радиоэлектроника и электроника. АН СССР.,-1984.-Т.29.-№8.-с. 1561-1570.
5. Пономарева О.В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах.// Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова. Серия: цифровая обработка сигналов и ее применение. Выпуск : 12, 1 том. М: 2010.-с.38-41.
6. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов. Пер с англ. Под редакцией А.М. Трахтмана- М.: Сов. Радио, 1973.-367с.
7. Пономарев В.А. Структура системы дискретных экспоненциальных функций//Автометрия, АНСССР СО – 1986.-№1.с.14-20.
8. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Параметрическое дискретное преобразование Фурье.// Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова. Серия: цифровая обработка сигналов и ее применение. Выпуск : 12, 1 том. М: 2010.с.139-140.

THEORY AND APPLICATION OF PARAMETRIC DISCRETE FOURIER TRANSFORM

Ponomarev V.A., Ponomareva O.V.

On the basis of a systematic approach is considered the development of theoretical foundations of parametric discrete Fourier transform and analysis of its application in solving practical problems of digital signal processing.