

УДК 621.317.332

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ ПРИ СПЕКТРАЛЬНО-ВЕСОВЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Глинченко А. С., к.т.н., профессор кафедры «Радиоэлектронные системы» Сибирского федерального университета, AGlinchenko@sfu-kras.ru

Тронин О. А., ст. преподаватель кафедры «Радиоэлектронные системы» Сибирского федерального университета, toa12@yandex.ru

Ключевые слова: спектрально-весовые измерения, полигармонические сигналы, дискретное преобразование Фурье, частотные выборки, интерполяционные оценки.

Интерполяционные оценки частоты сигнала

Спектрально-весовые измерения параметров гармонических сигналов или гармонических составляющих сложных полигармонических сигналов выполняются по частотным выборкам дискретного (быстрого) преобразования Фурье (ЧВ ДПФ (БПФ)) их взвешенных весовой функцией (ВФ) $w(n)$ реализаций $x(n)$ конечной длины N :

$$X(jf_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot w(n) \cdot e^{-j2\pi f_k n T_d},$$

$$X(jk) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot w(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N} k \cdot n}, \quad (1)$$

где $n = 0, 1, \dots, N-1$ – номер выборки сигнала и ВФ; $k = 0, 1, \dots, N-1$ – текущий номер ЧВ ДПФ. В случае комплексного гармонического сигнала $x(n) = X_m \cdot e^{j(2\pi f_c n T_d + \varphi)}$ с амплитудой X_m , начальной фазы φ и измеряемой частотой F_c амплитуды ЧВ ДПФ

$$X_k = X_m \cdot N \cdot |W(\Delta\theta_k)|$$

прямо пропорциональны значениям частотной характеристики (преобразования Фурье) ВФ $W(\Delta\theta_k)$ на нормированных частотах $\Delta\theta_k = k - \theta_c = k - F_c / (f_d / N)$:

$$W(\Delta\theta_k) = N^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N} \Delta\theta_k \left(n - \frac{N}{2} \right)}$$

где $f_d = 1/T_d$ – частота (период) дискретизации сигнала.

На этой пропорциональной зависимости и основывается косвенный метод измерения частоты сигнала [1] по отношению амплитуд двух ближайших к частоте сигнала ЧВ ДПФ, который исследован в [2]. Реализация этого метода осложняется тем, что для каждой ВФ находится своя функция измерения, представляющая в данном случае зависимость оценки частоты от отношения амплитуд ЧВ ДПФ.

В данной работе, тематически связанной с [2], исследуется метод измерения частоты сигнала [3], основывающийся на интерполяции частотных характеристик (ЧХ) ВФ в области их главного лепестка шириной $\Delta f_{\text{гл}} = D \cdot (f_d / N)$, $D \geq 4$ по измеряемым значениям амплитуд ЧВ X_k , X_{k+1} , X_{k-1} – ближайшей к частоте сигнала (наибольшей амплитуды X_k) и соседних с ней.

Рассмотрены способы повышения точности интерполяционных оценок частоты и измеряемых совместно с нею амплитуд и начальных фаз гармонических и полигармонических сигналов, которые эффективно реализуются с помощью компьютерных измерительных технологий.

При использовании ступенчатой (С), параболической (П) и логарифмической параболической (ЛП) интерполяций это позволяет получить независимые от вида ВФ оценки частоты, выраженные через амплитуды этих ЧВ:

$$\alpha_{\text{н(с)}} = \frac{X_{k+1} - X_{k-1}}{X_{k-1} + X_k + X_{k+1}}; \quad \alpha_{\text{н(п)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{X_{k-1} - X_{k+1}}{X_{k-1} - 2X_k + X_{k+1}};$$

$$\alpha_{\text{н(лп)}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln X_{k-1} - \ln X_{k+1}}{\ln X_{k-1} - 2 \ln X_k + \ln X_{k+1}}. \quad (2)$$

Оценки (2) определяют дробную часть измеренной нормированной частоты сигнала $\alpha_{\text{н}} = 0, \pm 0,5$, выраженной в бинах ДПФ (один бин равен f_d / N), которая совместно с номером $k = k_{\text{н}}$ ЧВ наибольшей амплитуды X_k определяет измеренную нормированную частоту сигнала $\theta_{\text{н}} = k_{\text{н}} + \alpha_{\text{н}}$ и физическую частоту $F_{\text{н}} = (f_d / N) \cdot (k_{\text{н}} + \alpha_{\text{н}})$, которые соответствуют их точным значениям $\theta_c = k_c + \alpha_c$ и $F_c = (f_d / N) \cdot (k_c + \alpha_c)$.

Относительная погрешность оценки частоты $dF_{\text{н}} / F = d\alpha_{\text{н}} / (k_c + \alpha_c)$ возрастает при малых значениях $k_{\text{н}} = k_c$ (малом числе периодов сигнала на длине реализации) и существенно зависит от погрешности $d\alpha_{\text{н}}$ оценки $\alpha_{\text{н}}$.

Интерполяционные и другие оценки амплитуды и начальной фазы сигнала

По положению и значению максимума ЧХ ВФ и логарифмической ЧХ ВФ, интерполированных параболой, совместно с оценками частоты сигнала (2) могут быть найдены и оценки его амплитуды:

$$X_{m(\text{н})} = \frac{2}{N \cdot W(0)} \left[X_k - \frac{1}{4} \cdot \frac{(X_{k-1} - X_{k+1})^2}{X_{k-1} - 2X_k + X_{k+1}} \right]; \quad (3)$$

$$\ln X_{m(\text{лп})} = \ln \left[\frac{2X_k}{N \cdot W(0)} \right] - \frac{1}{8} \cdot \frac{(\ln X_{k-1} - \ln X_{k+1})^2}{\ln X_{k-1} - 2 \ln X_k + \ln X_{k+1}}; \quad (4)$$

$$X_{m(\text{лп})} = \exp(\ln X_{m(\text{лп})})$$

Используя оценки частоты $\alpha_{\text{н(п)}}$, $\alpha_{\text{н(лп)}}$ (2), выражения (3), (4) преобразуем к виду:

$$X_{m(n)} = \frac{2X_k}{N \cdot W(0)} \left[1 - \frac{\alpha_{n(n)}}{2X_k} \cdot (X_{k-1} - X_{k+1}) \right];$$

$$X_{m(m)} = \frac{2X_k}{N \cdot W(0)} \left(\frac{X_{k+1}}{X_{k-1}} \right)^{\frac{\alpha_{m(m)}}{4}}. \quad (5)$$

При найденной интерполяционной оценке частоты можно также получить зависящие от вида ВФ оценки амплитуды и начальной фазы сигнала по одной ЧВ $X(jk)$ наибольшей амплитуды:

$$X_{m(n)(k)} = 2 \cdot X_k / [N \cdot W(\alpha_n)],$$

$$\varphi_{n(k)} = \arg\{X(jk)\} + \pi/2 - \pi \cdot \alpha_n \quad (6)$$

и по трем средневзвешенным ЧВ X_k, X_{k+1}, X_{k-1} :

$$\bar{X}_{m(n)} = \frac{2}{N} \cdot \frac{X_k \cdot W(\alpha_n) + X_{k-1} \cdot W(1+\alpha_n) + X_{k+1} \cdot W(1-\alpha_n)}{W^2(\alpha_n) + W^2(1+\alpha_n) + W^2(1-\alpha_n)}. \quad (7)$$

$$\bar{\varphi}_n = \frac{\varphi_{n(k)} \cdot X_k^2 + \varphi_{n(k-1)} \cdot X_{k-1}^2 + \varphi_{n(k+1)} \cdot X_{k+1}^2}{X_k^2 + X_{k-1}^2 + X_{k+1}^2}, \quad (8)$$

где $\varphi_{n(k\pm 1)} = \arg\{X[j(k\pm 1)]\} + \pi/2 - \pi \cdot (1 \pm \alpha_n)$.

*Примечание: оценки амплитуды (3–7) непосредственно соответствуют вещественному гармоническому сигналу; для комплексного сигнала их нужно поделить на 2.

Методические погрешности интерполяционных оценок

В случае комплексного гармонического сигнала погрешность оценок частоты (2) и амплитуды (3–5) связана с неточностью интерполяции ЧХ ВФ и является их методической погрешностью. Косвенно она влияет и на погрешности оценок амплитуды и начальной фазы (6–8). Погрешности интерполяции зависят от значения частоты α , вида ВФ и способа интерполяции. Их можно непосредственно найти с помощью (1–8) как разности измеренных и заданных значений частоты $d\alpha_m = \alpha_n - \alpha$, амплитуды $dX_{m(m)} = X_{m(n)} - 1$ и начальной фазы $d\varphi_m = \varphi_n - \varphi$ комплексного гармонического сигнала единичной амплитуды. Возможно и косвенное определение методической погрешности интерполяции путем замены в (2–8) амплитуд ЧВ X_k, X_{k+1}, X_{k-1} на пропорциональные им значения ЧХ ВФ $X_k = W(\Delta\theta_k) = W(\alpha)$, $X_{k+1} = W(\Delta\theta_{k+1}) = W(1-\alpha)$, $X_{k-1} = W(\Delta\theta_{k-1}) = W(1+\alpha)$ (для оценок амплитуды – с учетом масштабирующего множителя $2/N$) или перехода к отношениям $X_{k\pm 1} / X_k = W(1 \mp \alpha) / W(\alpha) = \psi(\pm\alpha)$, где $\psi(\alpha)$ – функция отношения, соответствующая конкретной ВФ. Погрешностью $d\alpha_m$ определяются и зависящие от нее составляющие погрешности оценки начальной фазы (6) по k -й ЧВ $d\varphi_{(k)\alpha} = -\pi \cdot d\alpha_{(m)}$ и средневзвешенной оценки (8) по k -й и $k\pm 1$ -й ЧВ $d\varphi_{(k\pm 1)\alpha} = \mp \pi \cdot d\alpha_{(m)}$.

Для косинусных ВФ вида

$$w(n) = a_0 - a_1 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{N} n\right) + a_2 \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{N} n\right)$$

(Ханна, Хэмминга, Блэкмана, Блэкмана-Хэрриса-3) с коэффициентами a_0, a_1, a_2 , приведенными в табл. 1 [4], при $N > (50 - 100)$ можно воспользоваться обобщенным аналитическим выражением их ЧХ [5]:

$$W(\theta) = \frac{\sin(\pi \cdot \theta)}{\pi \cdot \theta} \left(a_0 + a_1 \frac{\theta^2}{1-\theta^2} + a_2 \frac{\theta^2}{4-\theta^2} \right). \quad (9)$$

При $\theta = 1, \theta = 2$ ЧХ ВФ имеют значения $W(1) = a_1/2; W(2) = a_2$.

Выражение (9) расширяется и на ВФ, содержащие три и более косинусных члена [5]. Коэффициенты таких ВФ с минимальной спектральной утечкой приводятся в [4, 6] и других источниках.

С помощью (9) можно аналитически выразить и функции отношения $\psi(\alpha)$ [2].

Например, для ВФ Ханна

$$W(\theta) = 0,5 \cdot \frac{\sin(\pi \cdot \theta)}{\pi \cdot \theta} \left(\frac{1}{1-\theta^2} \right), \quad \psi(\alpha) = \frac{1+\alpha}{2-\alpha}. \quad (10)$$

При этом оценки частоты и амплитуды гармонического сигнала, которые можно использовать для косвенного определения погрешности интерполяции, имеют вид:

$$\alpha_{n(c)} = \frac{6 \cdot \alpha}{(8 + \alpha^2)}; \quad \alpha_{n(n)} = \frac{3}{4} \frac{\alpha}{(1 - \alpha^2)};$$

$$\alpha_{n(m)} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-\alpha}{2+\alpha} \cdot \frac{2-\alpha}{1+\alpha}\right) / \ln\left(\frac{1-\alpha}{2+\alpha} \cdot \frac{1+\alpha}{2-\alpha}\right); \quad (11)$$

$$X_{m(n)} = \frac{\sin(\pi \cdot \alpha)}{\pi \cdot \alpha} \left(\frac{1}{1-\alpha^2} \right) \left[1 + \frac{\alpha_{n(n)}}{2} \cdot \frac{3\alpha}{4-\alpha^2} \right];$$

$$X_{m(m)} = \frac{\sin(\pi \cdot \alpha)}{\pi \cdot \alpha} \left(\frac{1}{1-\alpha^2} \right) \left(\frac{1+\alpha}{2-\alpha} \cdot \frac{2+\alpha}{1-\alpha} \right)^{\alpha_{n(m)}/4}. \quad (12)$$

На рис. 1 приведены графики методической погрешности оценки частоты (а) и амплитуды (б) для ВФ Ханна, относящиеся к ступенчатой (1), параболической (2) и логарифмической параболической (3) интерполяциям.

Наибольшая погрешность оценки частоты присуща ступенчатой интерполяции (график 1). Погрешность ее почти линейно зависит от α . Наименьшей является методическая погрешность логарифмической параболической интерполяции, не превышающая $\pm 0,01$ по частоте и $0,038$ по амплитуде. Это характерно и для других ВФ, что говорит о близости логарифмических ЧХ ВФ к квадратической параболе.

Также для всех способов интерполяции методическая погрешность равна нулю при $\alpha = 0$, а для параболической и логарифмической параболической и при $\alpha = 0,5$ (по частоте).

Таблица 1

ВФ	a_0	a_1	a_2	D	$\delta_{\text{блmax}}$, дБ	ν , дБ/окт
Ханна	0,5	0,5	0	4	-32	-18
Хэмминга	0,54	0,46	0	4	-43	-6
Блэкмана	0,42	0,5	0,08	6	-58	-18
Блэкмана-Хэрриса-3	0,42323	0,49755	0,07922	6	-67	-6

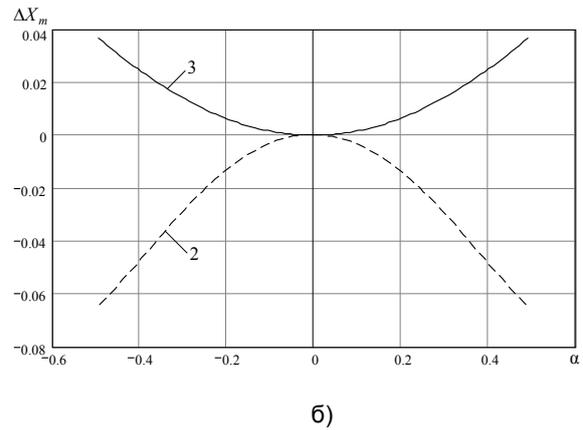
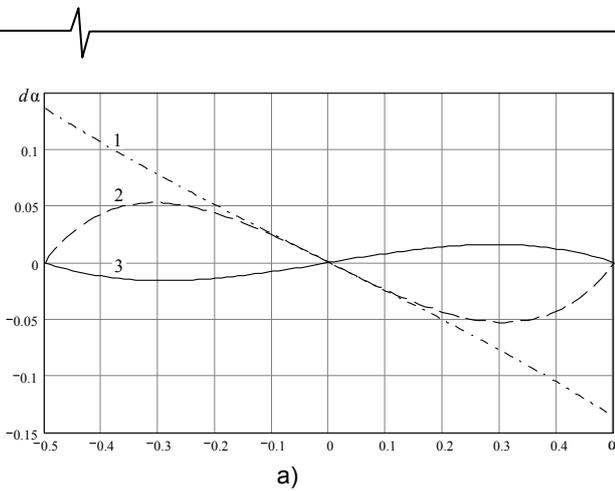


Рис. 1. Графики методической погрешности оценки частоты (а) и амплитуды (б) для ВФ Ханна

Способы коррекции методической погрешности интерполяции

Двум способам определения методической погрешности интерполяции соответствуют два способа ее коррекции: с использованием ЧХ конкретной ВФ и без ее использования.

Первый из них основывается на соотношениях (2) с учетом замен $X_k = W(\alpha)$, $X_{k+1} = W(1-\alpha)$, $X_{k-1} = W(1+\alpha)$, определяющих функциональную связь интерполяционных оценок частоты α_n с ее истинным значением α : $\alpha_n = \alpha + d\alpha_m = f(\alpha)$. Разрешая ее относительно α , можно с помощью обратной функции $f^{-1}(\alpha_n)$ (функции коррекции) получить оценку частоты $\alpha_n^* = f^{-1}(\alpha_n) = \alpha$ с исключенной методической погрешностью $d\alpha_m$.

В случае ВФ Ханна оценки частоты со скорректированной методической погрешностью для ступенчатой и параболической интерполяций находятся аналитически как

$$\alpha_{n(c)}^* = \frac{3 - \sqrt{9 - 8 \cdot \alpha_{n(c)}^2}}{\alpha_{n(c)}}; \quad \alpha_{n(n)}^* = \frac{-3 + \sqrt{9 + 64 \cdot \alpha_{n(n)}^2}}{8 \cdot \alpha_{n(n)}}. \quad (13)$$

По скорректированной оценке частоты α_n^* для конкретной ВФ можно получить и скорректированные интерполяционные оценки амплитуды:

$$X_{m(n)}^* = \frac{X_{m(n)}}{A_{(n)}(\alpha_n^*)},$$

$$A_{(n)}(\alpha_n^*) = \frac{W(\alpha_n^*)}{W(0)} \cdot \left\{ 1 - \frac{\alpha_{n(n)}}{2 \cdot W(\alpha_n^*)} \cdot [W(1+\alpha_n^*) - W(1-\alpha_n^*)] \right\}; \quad (14)$$

$$X_{m(m)}^* = \frac{X_{m(m)}}{A_{(m)}(\alpha_n^*)}, \quad A_{(m)}(\alpha_n^*) = \frac{W(\alpha_n^*)}{W(0)} \cdot \left[\frac{W(1-\alpha_n^*)}{W(1+\alpha_n^*)} \right]^4. \quad (15)$$

Коррекция методической погрешности данным способом лишает интерполяционные измерения их важного преимущества – независимости функций измерения от вида используемой ВФ.

В способе исключения (коррекции) методической погрешности, не зависящем от вида ВФ, по найденной с помощью (2) первичной оценке частоты $\theta_n = k + \alpha_n = k + \alpha + d\alpha_m$, содержащей методическую погрешность $d\alpha_m$, формируется комплексный корректирующий сигнал $v_{k1}(n) = \exp[(2\pi/N) \cdot \theta_n \cdot n]$, для которого также путем взвешивания и вычисления ДПФ находится измеренное значение $\alpha_{n(k1)}$, определяемое как

$\alpha_{n(k1)} = \alpha + d\alpha_m + d\alpha_{m(k1)}$. Оно также содержит методическую погрешность $d\alpha_{m(k1)} = \alpha_{n(k1)} - \alpha_n$, которая несколько отличается от методической погрешности первичной оценки $d\alpha_m$, так как соответствует другой заданной частоте сигнала $\alpha_n \neq \alpha$. Вычитая эту погрешность из α_n , получаем уточненную оценку α_n со скорректированной методической погрешностью: $\alpha_n^* = \alpha_n - d\alpha_{m(k1)} = \alpha + (d\alpha_m - d\alpha_{m(k1)})$ или $\alpha_n^* = 2\alpha_n - \alpha_{n(k1)}$. Нескорректированная составляющая методической погрешности при этом составляет $d(d\alpha_m) = d\alpha_m - d\alpha_{m(k1)}$.

Если степень уменьшения методической погрешности оценки частоты недостаточна или необходимо совместно скорректировать погрешность интерполяционной оценки амплитуды, то выполняется второй цикл коррекции уже с использованием уточненной оценки α_n^* . Для этого снова формируется комплексный сигнал $v_{k2}(n)$ с частотой $\theta_n^* = k + \alpha_n^*$, для которого находится измеренное значение $\alpha_{n(k2)} = \alpha + d(d\alpha_m) + d\alpha_{m(k2)}$, вычисляется уточненное значение методической погрешности $d\alpha_{m(k2)} = \alpha_{n(k2)} - \alpha_n^*$ и искомое уточненное значение оценки частоты $\alpha_n^{**} = \alpha_n - d\alpha_{m(k2)}$ или $\alpha_n^{**} = \alpha_n + \alpha_n^* - \alpha_{n(k2)}$. По измеренной на этом цикле коррекции амплитуде комплексного сигнала $X_{m(n)(ком)}$ определяется и скорректированное значение амплитуды сигнала: $X_{m(n)}^* = X_{m(n)} \cdot (2 - X_{m(ком)})$.

Реально для компенсации методической погрешности достаточно двух – трех циклов коррекции.

Использование скорректированной оценки частоты обеспечивает и повышение точности оценок амплитуды и начальной фазы, определяемых (6–8).

Следует заметить, что при наличии в интерполяционной оценке частоты других не интерполяционных (ни) составляющих погрешности $\alpha_n = \alpha + d\alpha_m + d\alpha_{ни}$, например, погрешности наложения или случайной погрешности, то корректируется погрешность интерполяции, которая соответствует частоте $\alpha + d\alpha_{ни}$, а не ее истинному значению α .

Погрешности интерполяционного измерения параметров вещественных гармонических сигналов и способы их уменьшения

Интерполяционные и другие рассмотренные выше оценки параметров вещественного гармонического сигнала $\tilde{x}(n) = X_m \sin(\lambda_c n + \varphi)$ находятся по тем же функ-

циям измерения (2–8), что и для комплексных сигналов. Но оценки параметров вещественных сигналов в отличие от комплексных содержат дополнительную методическую погрешность, вызываемую наложением на измеряемые ЧВ спектральной компоненты отрицательной частоты $-\theta_c$, проходящей через боковые лепестки (БЛ) ЧХ ВФ. Погрешность наложения зависит от уровня БЛ ЧХ ВФ, скорости их спада и других параметров ВФ, а также от частоты сигнала (значений k , α) и его начальной фазы.

Аналитически это влияние отражает второе слагаемое выражения (16) ДПФ $\tilde{X}(jk)$ вещественного гармонического сигнала $\tilde{x}(n) = X_m \sin(\lambda_c n + \varphi)$, которым оно отличается от ДПФ $X(jk)$ (1) комплексного гармонического сигнала с амплитудой $X_m/2$:

$$\tilde{X}(jk) = (X_m/2) \cdot N \cdot e^{j(\phi - \frac{\pi}{2} + \alpha \cdot \pi)} \cdot W(\alpha) + (X_m/2) \cdot N \cdot e^{-j(\phi - \frac{\pi}{2} + \alpha \cdot \pi)} \cdot W(2k + \alpha) = X_k \cdot e^{j\phi_k} + \Delta X_k \cdot e^{j\phi_{\Delta k}}, \quad (16)$$

где $W(2k + \alpha)$ соответствует значениям ЧХ ВФ в области боковых лепестков с учетом их знака (плюс или минус).

Разность амплитуд ЧВ $\Delta X_k = \tilde{X}_k - X_k$ максимальна по модулю при значениях начальной фазы сигнала $\varphi_{\max 1,2} = (\pm\pi/2) - \alpha \cdot \pi$, $\varphi_{\max 3} = \pi - \alpha \cdot \pi$, $\varphi_{\max 4} = -\alpha \cdot \pi$ и составляет $\Delta X_k = (X_m/2) \cdot N \cdot W(2k + \alpha)$. При этом максимальные по модулю значения имеют и максимальные погрешности наложения интерполяционных оценок частоты и амплитуды сигналов и минимальные – оценок начальной фазы.

Минимум модуля разности векторов

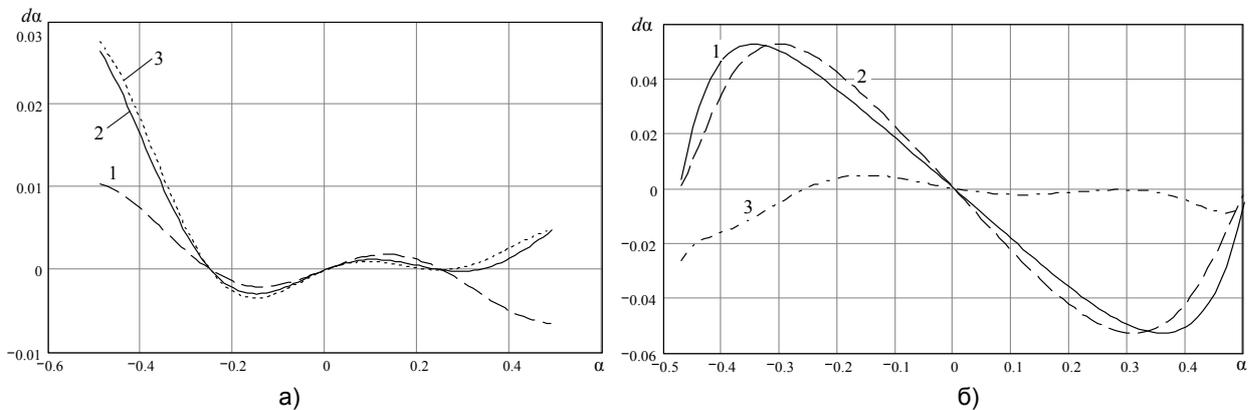


Рис. 2. Графики погрешностей оценок частоты для ВФ Ханна, $k=2$, $\varphi=0$ (а); $k=2$, $\varphi=\pi/2$ (б)

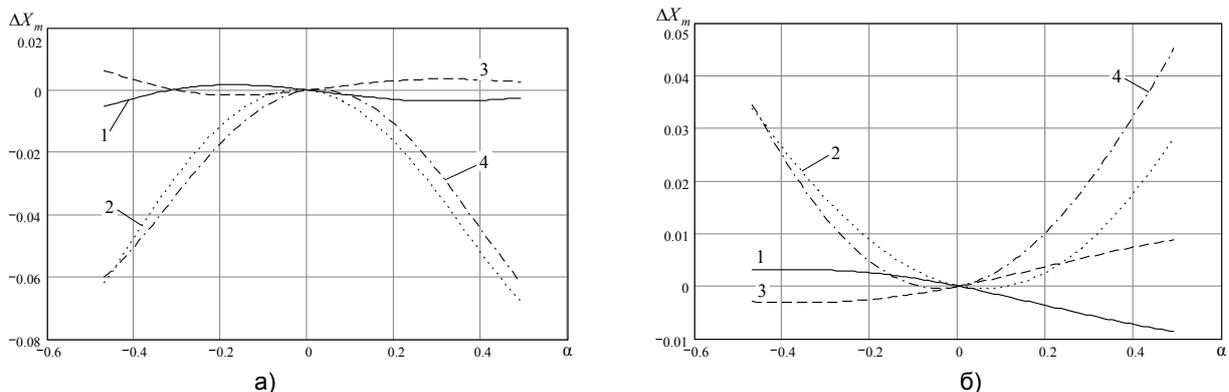


Рис. 3. Графики погрешностей оценок амплитуды для ВФ Ханна и параболической (а) и логарифмической параболической (б) интерполяций

$\Delta X_k = |\tilde{X}(jk) - X(jk)|$ имеет место при начальной фазе сигнала $\varphi_{\min} = \varphi_{\max} \pm \pi/4$. Этому отвечают минимальные по модулю погрешности наложения оценок частоты и амплитуды сигналов и максимальные – оценок начальной фазы.

Погрешности наложения могут быть найдены как по аналитическим выражениям ЧХ ВФ, так и путем моделирования.

На рис. 2, а приведены графики зависимости погрешности наложения оценки частоты α_n^* от заданного значения α для ВФ Ханна при $k=2$ и $\varphi=0$. Они получены путем предварительной коррекции методической погрешности интерполяции первым способом, зависящим от вида ВФ. График 1 соответствует ступенчатой интерполяции, 2 – логарифмической параболической интерполяции и 3 – параболической интерполяции.

Графики при начальной фазе $\varphi_{\max} = (\pi/2) - \alpha \cdot \pi$ являются зеркальными относительно оси абсцисс и определяют область возможных значений этой погрешности. С увеличением k погрешность наложения уменьшается в соответствии со значением и скоростью убывания боковых лепестков ЧХ ВФ (см. табл. 1) (в отличие от погрешности интерполяции, которая не зависит от k).

Для параболической интерполяции такие же графики при $k=2$ и $\varphi=\pi/2$ получены путем двукратной коррекции погрешности интерполяции вторым (итерационным) способом, не зависящим от вида ВФ (рис. 2, б). Графики рис. 2, б соответствуют: 1 – погрешности интерполяции, вычисленной в первом цикле коррекции; 2 – погрешности интерполяции, вычисленной во втором цикле коррекции; 3 – погрешности наложения после второго цикла коррекции.

Как видим, уже после второго цикла коррекции погрешности интерполяции графики погрешности наложения рис. 2, а и б практически не отличаются (по модулю).

На рис. 3 приведены графики зависимости погрешности наложения оценок амплитуды от частоты для ВФ Ханна при параболической (а) и логарифмической параболической (б) интерполяции, соответствующие начальной фазе сигнала $(\pi/2) - \pi\alpha$ (1) и $-\pi\alpha$ (3). Графики получены путем предварительной коррекции погрешности интерполяции оценок с помощью (14), (15). Здесь же показаны и зависимости суммарной методической погрешности (погрешности интерполяции и наложения) от частоты (график 2 при $\varphi = \pi/2 - \pi\alpha$ и график 4 $\varphi = -\pi\alpha$).

Рассчитанные для сравнения погрешности наложения для *зависящих от вида ВФ* неинтерполяционных оценок амплитуды (6), (7) (не приводимые в данной работе), соизмеримы с погрешностью их оценок (5), но при использовании в (6), (7) интерполяционной оценки частоты они дополнительно требуют предварительной коррекции ее погрешности интерполяции. Это обосновывает преимущество использования интерполяционных оценок частоты и амплитуды при их совместном измерении.

Минимальное значение измеряемой нормированной частоты θ_{\min} для вещественных гармонических сигналов в зависимости от ширины главного лепестка ЧХ ВФ (параметра D , табл. 1) составляет $\theta_{\min} = (D/2) - 0,5$ при $D = 4$ и $\theta_{\min} = (D/2) - 1$ при $D = 6$.

Коррекция погрешности наложения

Дальнейшее повышение точности измерения параметров сигналов достигается *коррекцией погрешности наложения*. Коррекция осуществляется по первичным оценкам частоты, начальной фазы и амплитуды сигнала k_n , α_n , φ_n , $X_{m(n)}$ путем *вторичной* обработки той же реализации сигнала $x(n)$ с изменением или без изменения ее длины. Способы коррекции погрешности наложения для оценок частоты по соотношению амплитуд ЧВ ДПФ рассмотрены в [2]. Они же применимы и для интерполяционных оценок частоты.

Первый способ коррекции, выполняемый по первичной оценке частоты, основывается на приведении базового числа выборок сигнала N к значению N^* , соответствующему ближайшему целому числу периодов сигнала на длине реализации: $N^* = \lceil N \cdot k_n / (k_n + \alpha_n) \rceil_{\text{цел.окр.}}$. Так как значение N^* может быть больше N (при $k_n = 2$ и $\alpha_n = -0,5$ $N_{\max}^* = (4/3) \cdot N$), то дополнительное число выборок должно считываться сразу при вводе сигнала.

Во втором способе коррекции используется зависимость погрешности наложения от начальной фазы сигнала, что позволяет по ее измеренному значению и оценке частоты найти новое число выборок сигнала N^* , при котором приведенная начальная фаза сигнала отвечает условию минимума погрешности наложения.

Если на интервале $(N_{\max}^* - N)$ укладывается более одного периода сигнала, то точность коррекции способами 1, 2 можно повысить, как это показано в [2].

В третьем способе по трем первичным оценкам параметров сигнала k_n , α_n , φ_n и $X_{m(n)}$ сигнала формируется комплексный гармонический сигнал отрицательной частоты $-\theta_n$, который умножается на весовую функцию $w(n)$, и его N -точечное ДПФ вычитается из ДПФ взвешенной реализации сигнала. Разность их ДПФ в случае точной коррекции не

содержит погрешности наложения.

В *способе 4* погрешность наложения корректируется путем формирования комплексного гармонического сигнала $v_{k2}(n) = \exp[j(2\pi/N)\alpha_n \cdot n]$, который умножается на входной сигнал $x(n)$, смещая его спектр на частоту α_n . В результате зеркальная компонента спектра вещественного сигнала оказывается в области нулей ЧХ каналов ДПФ и частично подавляется ими. По получаемой оценке частоты α'_n затем находится ее скорректированное значение $\alpha_n^* = \alpha'_n - \alpha_n$.

Способы 3, 4 реализуются по базовой длине реализации сигнала N .

Точность коррекции снижается с увеличением числа используемых для коррекции первичных оценок параметров сигнала. Поэтому для интерполяционных оценок частоты и амплитуды наиболее приемлемы способы коррекции 1, 4, которые выполняются по первичной оценке частоты, в том числе и многократно.

В табл. 2 приведены значения погрешности оценки частоты $d\alpha_n^{**}$ после коррекции методической погрешности и погрешности наложения по способу 4. Они рассчитаны для ВФ Ханна при $k = 2$.

Сравнение данных табл. 2 и рис. 2, а показывает высокую эффективность способов повышения точности интерполяционных оценок частоты.

Погрешности наложения оценок амплитуды и начальной фазы вещественных гармонических сигналов корректируются совместно с коррекцией оценки частоты и уменьшаются до значений того же порядка.

При измерении частоты по малому числу периодов сигнала k ($k = 2, 3, 4$) можно совместно использовать разные виды интерполяции, дающие наименьшую погрешность наложения в зависимости от измеряемых значений k и α .

Измерение параметров полигармонических сигналов

Рассмотренные интерполяционные и другие способы оценки параметров гармонических сигналов применимы и для измерения параметров основной и высших гармоник полигармонических сигналов (ПГС). Теми же способами для каждой гармоники ПГС выполняется и коррекция погрешности интерполяции. Особенности измерения параметров ПГС связаны с коррекцией погрешности наложения, которая имеет место, как для вещественных, так и для комплексных ПГС (из-за влияния соседних гармоник). Наиболее приемлемы для них первый и третий способы коррекции. В первом способе коррекция осуществляется по первичной оценке частоты первой гармоники, при этом неточность коррекции для высших гармоник возрастает с увеличением их номера. Наложение за счет этих гармоник ослабляется при использовании ВФ с высокой скоростью убывания боковых лепестков. Способом 3 могут одновременно корректироваться погрешности наложения от всех значимых гармоник сигнала по первичным оценкам их частоты, амплитуды и начальной фазы, но по сложности реализации и достигаемой точности коррекции этот способ уступает первому.

Минимальное значение измеряемой нормированной частоты θ_{\min} для ПГС в зависимости от ширины главного лепестка ЧХ ВФ (параметра D , см. табл. 1) составляет $\theta_{\min} = D - 1$ при $D = 4$ и $\theta_{\min} = D - 2$ при $D = 6$.

α		-0,5	-0,4	-0,2	0,2	0,4	0,45	0,5
$d\alpha_{\Pi}^{**}$	С	1,1E-4	6,6E-5	-5,4E-8	1,3E-7	-1,6E-7	-3,0E-7	7,1E-8
	П	2,8E-4	1,9E-5	-6,0E-7	5,7E-9	3,8E-7	4,9E-7	3,1E-7
	ЛП	2,8E-4	4,5E-5	-4,2E-7	6,4E-9	1,4E-7	2,9E-7	3,1E-7

Измерение параметров сигналов в шумах

Измерения параметров сигналов в шумах осуществляются путем усреднения амплитудных спектров или спектров мощности при несинхронизированном непрерывном вводе ансамбля реализаций сигнала и путем временного или векторного частотного усреднения при синхронизированном вводе реализаций сигнала с одинаковыми (в математическом ожидании) начальными фазами.

По усредненной первичной оценке частоты сигнала возможна коррекция методической погрешности интерполяционных оценок параметров сигнала, а для вещественных сигналов (а также комплексных ПГС) и погрешности наложения. Коррекция этих погрешностей обоснована, если значения их соизмеримы или больше случайной погрешности измерения, вызываемой шумами.

Поиск частоты дискретизации сигнала

Измерению параметров сигналов предшествует автоматический поиск необходимой частоты дискретизации, соответствующей измеряемой частоте сигнала и заданному числу выборок N . Поиск осуществляется на уровне поддиапазонов частот с постоянными значениями частоты дискретизации, на которые автоматически разбивается заданный диапазон измеряемых частот сигнала. Возможен и ручной поиск по выводимым графикам амплитудных спектров сигнала, соответствующим разным значениям частоты дискретизации.

В случае полигармонического сигнала частота дискретизации находится таким образом, чтобы все измеряемые гармоники сигнала, число которых задано, попадали в один поддиапазон с соответствующей им полосой частот $0-f_{\text{дл}}/2$. При этом могут быть измерены параметры каждой гармоники сигнала и значение его коэффициента гармоник.

Более подробное изложение вопросов поиска частоты дискретизации, измерения параметров ПГС и измерений в шумах, эффективность которых является не менее значимым критерием для сравнения различных спектральных оценок параметров сигналов, в том числе и рассмотренных в данной работе, выходит за ее рамки.

Заключение

Возможность выбора разных интерполяционных оценок параметров сигналов и способов уменьшения погрешностей обеспечивает функциональную гибкость основывающихся на них компьютерных спектрально-весовых измерений. Такие измерения эффективно реализуются с помощью инструментальных средств сбора данных и среды графического программирования *Lab VIEW* корпорации *National Instruments* [7], которые использованы и при апробации рассмотренных в работе алгоритмов измерения.

Обеспечение возможного с помощью рассмотренных в данной работе и в [2] способов уменьшения относи-

тельной погрешности измерения частоты чистых сигналов до 10^{-4} – 10^{-6} при малом числе периодов сигнала на длине реализации практически ограничивается относительной нестабильностью частоты используемого опорного генератора. Такого же порядка составляют и методические погрешности скорректированных оценок амплитуды и начальной фазы сигналов (в радианах).

Литература

1. Real-time high accuracy measurement of multifrequency waveforms. Narduzzi C., Offelli C. "IEEE Trans. Instrum. and Meas.", 1987, 36, №4, 964-970. (Контрольно-измерительная техника/ экспресс-информация// М.: ВИНТИ, 1990, №2).
2. Глинченко, А. С. Исследование спектрально-весового измерения частоты сигналов/ А. С. Глинченко, О. А. Тронин // Цифровая обработка сигналов. –2010. – № . – С. - .
3. Software-Tool zur Simulation der Signulanalise in der Phasen – Doppler – Anemometrie. Wricdt T., "tm", 1993, 60, №3, 106–110 (нем.). (Программные инструментальные средства для моделирования анализа сигналов в фазовой доплеровской анемометрии. – Контрольно-измерительная техника/ экспресс-информация// М.: ВИНТИ, 1994, №16, с.5–11).
4. Хэррис, Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье / Ф. Дж. Хэррис // ТИИЭР, т. 66. 1978. №1.
5. Гутников, В. С. Фильтрация измерительных сигналов. –Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-е, 1990. – 192 с.
6. A frequency-domain procedure for accurate real-time signal parameter measurement. Offelli C., Petri D. "IEEE Trans. Instrum. and Meas.", 1990, 39, №2, 363–368 (англ.). (Процедура измерения в реальном масштабе времени параметров сигнала в частотной области. – Контрольно-измерительная техника/ экспресс-информация// М.: ВИНТИ. 1991. №27. С.12–22).
7. Автоматизация физических исследований и эксперимента: компьютерные измерения и виртуальные приборы на основе Lab VIEW7/ Под ред. Бутырина П. А. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 264 с.

INCREASE OF INTERPOLATION ESTIMATIONS ACCURACY OF SIGNALS PARAMETERS AT SPECTRAL-WEIGHT MEASUREMENTS

Glinchenko A. S., Tronin O. A.

In article algorithms of digital measurement of frequency, amplitude and phase of harmonic and polyharmonic signals under the interpolated frequency responses of weight function which are not dependent on its kind are investigated. Ways of measurement errors reduction to the values limited to instability of the basic frequency oscillator are shown.