

МЕТОДЫ МНОГОСКОРОСТНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С САМООРГАНИЗУЮЩЕЙСЯ СТРУКТУРОЙ: ЭКВАЛАЙЗЕРЫ С ДИНАМИЧЕСКИМ ВЫБОРОМ ПОРЯДКОВ АДАПТИВНЫХ ФИЛЬТРОВ

Линович А.Ю., к.т.н., доцент, старший научный сотрудник Рязанского государственного радиотехнического университета, e-mail: rsrtu@yandex.ru

Ключевые слова: эквалайзер, динамический выбор порядка, многоканальный фильтр, многоскоростная обработка сигналов.

Введение

Многоканальные адаптивные фильтры (МАФ), в которых внутриканальная обработка проводится на пониженной частоте дискретизации, имеют ряд преимуществ перед одноканальными адаптивными фильтрами [1–3]. С одной стороны, благодаря независимой обработке разных участков спектра разными каналами МАФ, удаётся существенно повысить скорость и точность настройки. С другой стороны, использование методов многоскоростной обработки сигналов даёт возможность значительно сократить объём вычислительных затрат, что особенно важно для повышения эффективности реализации адаптивных алгоритмов в реальном времени.

В предлагаемой вниманию читателя статье рассмотрен один из способов дальнейшего совершенствования МАФ, заключающийся в предоставлении каждому внутриканальному адаптивному фильтру самостоятельного выбора наилучшего (по некоторому критерию) порядка. Поскольку дальнейшее повествование ограничено рассмотрением МАФ с настройкой внутри каналов по алгоритму НСКО с нормировкой шага адаптации³ [4], в основе которого лежит нерекурсивный адаптивный фильтр, то порядок адаптивного фильтра равен числу его весовых коэффициентов и равен длине воспроизводимой им импульсной характеристики, выраженной в отсчётах, взятых с частотой дискретизации обрабатываемого этим фильтром сигнала. Известно, что алгоритм НСКО прост в реализации и нетребователен к вычислительным затратам. Вместе с тем его низкая скорость настройки во многих случаях оказывается серьёзным недостатком, побуждая разработчиков цифровых устройств обработки сигналов искать альтернативные пути решения. Одним из таких путей является переход к многоканальной структуре построения адаптивного фильтра [1–3]. Сам по себе переход к многоканальной адаптивной обработке при использовании методов многоскоростной обработки сигналов [5, 6] позволяет существенно снизить вычислительные затраты и значительно повысить каче-

Статья посвящена многоканальным адаптивным фильтрам, в которых используются принципы самоорганизации, и особенностям построения эквалайзеров на их основе. Приводятся результаты имитационного моделирования разработанных эквалайзеров, полученные для двухлучевой модели беспроводного канала связи, подтверждающие ряд преимуществ предложенного подхода.

ство работы адаптивных устройств. Но, как будет показано далее, введение специальной процедуры динамического выбора порядков внутриканальных адаптивных фильтров обеспечивает значительное улучшение характеристик МАФ. Несмотря на то, что основное внимание в статье уделено решению задачи обратного моделирования, решаемой в эквалайзерах аппаратуры передачи данных, многие положения нетрудно расширить на случай решения задачи прямого моделирования.

Структура МАФ в общем виде

Классическая структура МАФ описана во многих учебных и научных изданиях, посвящённых цифровым адаптивным фильтрам. В упрощённом виде она показана на рис. 1.

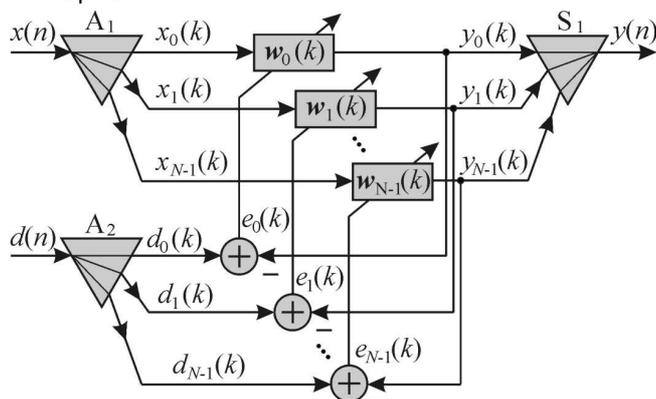


Рис. 1. Структурная схема МАФ

Подсистемы анализа A1 и A2 расщепляют входной сигнал $x(n)$ и обучающий сигнал $d(n)$ на N спектральных полос $x_0(k), x_1(k), \dots, x_{N-1}(k)$ и $d_0(k), d_1(k), \dots, d_{N-1}(k)$, соответственно. S1 – подсистема синтеза, выполняющая объединение выходных сигналов $y_0(k), y_1(k), \dots, y_{N-1}(k)$ в результирующий выходной сигнал МАФ $y(n)$. Поскольку спектры внутриканальных сигналов занимают более узкие полосы частот, чем спектры входного и выходного сигналов МАФ, в подсистемах анализа выполняется переход на более низкую частоту дискретизации, а в подсистеме синтеза исходная частота дискретизации восстанавливается. То есть, адаптивная обработка сиг-

³ В англоязычной литературе этот алгоритм широко известен и носит название «Normalized least-mean square (NLMS) algorithm» [1, 4].

налов проводится на пониженной частоте. Набор внутриканальных адаптивных фильтров состоит из N трансверсальных фильтров: $w_0(k), w_1(k), \dots, w_{N-1}(k)$. Здесь и далее в статье индексы n и k – индексы времени, предназначенные для нумерации отсчётов дискретных сигналов, определённых на высокой и на пониженной частотах дискретизации, соответственно. Для успешного функционирования МАФ подсистемы А1 и А2 по своим свойствам должны быть строго одинаковыми, а подсистема S1 должна быть надлежащим образом оптимизирована.

Алгоритм настройки МАФ с адаптивным выбором порядков внутриканальных фильтров

Из многочисленных работ по теории адаптивной фильтрации [1, 4, 7] известно, что при решении задачи обратного моделирования в классе нерекурсивных цифровых цепей предельная точность полученного решения, как правило, оказывается тем выше, чем выше порядок адаптивного фильтра (рис. 2), при условии отсутствия аддитивного шума в принимаемом сигнале.

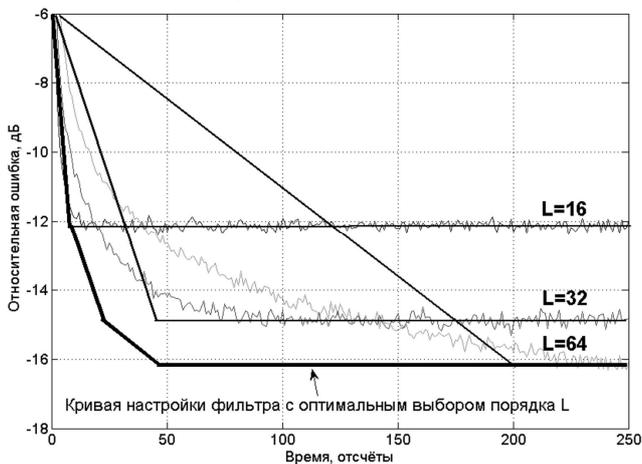


Рис. 2. Увеличение порядка фильтра позволяет повысить точность настройки, быстродействие при этом снижается

Однако при наличии в принимаемом сигнале аддитивного шума нельзя достичь нулевой среднеквадратической ошибки (СКО). Анализ формул, описывающих процедуру обновления вектора весовых коэффициентов алгоритма НСКО [4], показывает, что для адаптивных фильтров достаточно высокого порядка дисперсия сигнала ошибки содержит дополнительную составляющую, вызванную отклонением вектора весовых коэффициентов от оптимального вектора настройки под действием аддитивного шума (рис. 3).

Первую составляющую ошибки, вызванную усечением импульсной характеристики адаптивного фильтра в результате ограничения его порядка конечной величиной L , обозначим $\xi_s(L)$. Функция $\xi_s(L)$ является невозрастающей, на рис. 3 ей соответствует кривая, стремящаяся к нулю с ростом L . Вторую составляющую, наличие которой обусловлено действием шума, обозначим $\xi_{ш}(L)$. Функция $\xi_{ш}(L)$ увеличивается по мере роста L с линей-

ной (или даже сверхлинейной) скоростью⁴. В результате, наиболее эффективное решение задачи обратного моделирования методами адаптивной фильтрации достигается при выборе порядка фильтра в пределах некоторого диапазона, ограниченного окрестностью точки минимума зависимости $\xi_{\sigma}(L) = \xi_s(L) + \xi_{ш}(L)$. В приведённом на рис. 3 примере оптимальная величина порядка фильтра лежит в диапазоне значений от 25 до 40.

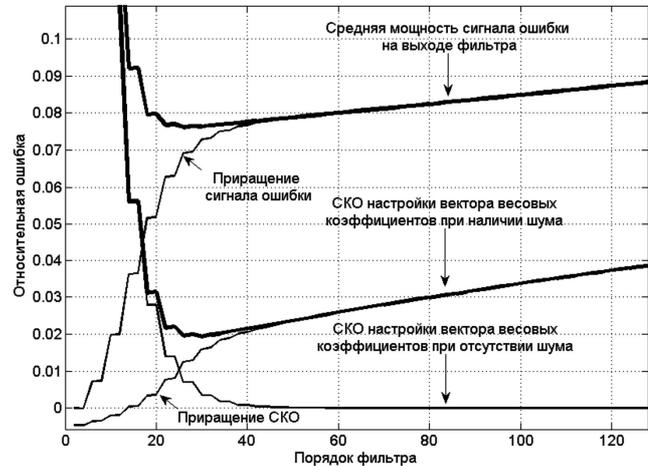
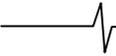


Рис. 3. Наличие шума снижает эффективность фильтров высокого порядка

Всё сказанное выше справедливо для стационарных систем. Если частотные характеристики моделируемой системы меняются с течением времени, то эквалайзер более высокого порядка медленнее реагирует на происходящие изменения. Поэтому эквалайзер меньшего порядка снова оказывается более предпочтительным. Однако вид функции $\xi_{\sigma}(L)$ при моделировании нестационарных систем изменяется со временем, а следовательно, изменяется и положение точки минимума. Функцию $\xi_{\sigma}(L)$ в данном случае можно рассматривать в каждый момент времени как сечение функции двух переменных $\xi_{\sigma}(L, t)$.

Для организации динамического выбора порядка внутриканальных адаптивных фильтров, входящих в состав МАФ, воспользуемся процедурой, описанной в [3]. Критерием оптимальности в данной процедуре является степень приближения к такому равновесному состоянию, когда среднеквадратические ошибки основного и вложенного фильтров равны. Понятие вложенного фильтра поясняется на рис. 4. Множество весовых коэффициентов вложенного фильтра является подмножеством весовых коэффициентов основного фильтра, полученных исключением ΔL коэффициентов с наименьшими порядковыми номерами и ΔL коэффициентов с наибольшими порядковыми номерами. Поскольку весовые коэффициенты нерекурсивного фильтра, по сути, являются дискретными отсчётами воспроизводимой фильтром импульсной характеристики, то импульсную

⁴ Правило обновления весовых коэффициентов алгоритма НСКО [1, 7] содержит линейный член поправки: $w(n+1) := w(n) + \mu \alpha x(n)$. Если входной сигнал $x(n)$ является стационарным в широком смысле сигналом, то флуктуации всех весовых коэффициентов в установившемся режиме оказываются приблизительно одинаковыми и ошибка при вычислении выходного сигнала $y(n) = w^T(n) x(n)$ растёт линейно по мере увеличения числа весовых коэффициентов – порядка фильтра.



характеристику вложенного фильтра можно рассматривать как результат усечения импульсной характеристики основного фильтра.

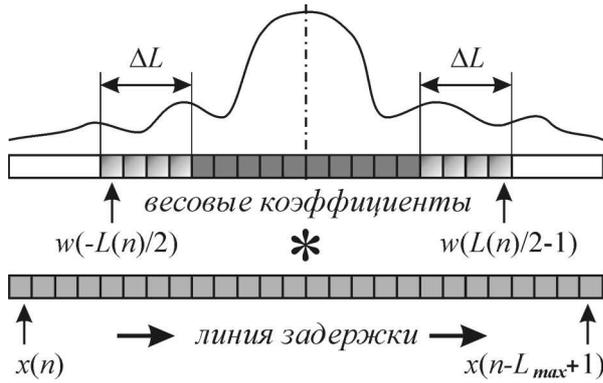


Рис. 4. Схема, поясняющая принцип выбора оптимального порядка

Выходной сигнал нерекурсивного фильтра $y(n)$ находится путём вычисления свёртки его импульсной характеристики $w(n)$ (вектора его весовых коэффициентов) с последовательностью отсчётов входного сигнала $x(n)$, продвигающихся по линии задержки фильтра. Причём векторы $w(n)$ и $x(n)$ одинаковы по длине, но поскольку рассматривается фильтр переменного порядка, то это означает, что их длина изменяется со временем. Сигнал ошибки настройки выражается разностью обучающего сигнала $d(n)$ и рассчитанного выходного сигнала $y(n)$:

$$e(n) = d(n) - \mathbf{w}^T(n)\mathbf{x}(n). \quad (1)$$

Обозначим вектор весовых коэффициентов и вектор отсчётов линии задержки вложенного фильтра, соответственно, как $\mathbf{w}_{\text{эл}}(n)$ и $\mathbf{x}_{\text{эл}}(n)$. Тогда сигнал ошибки вложенного фильтра:

$$e_{\text{эл}}(n) = d(n) - \mathbf{w}_{\text{эл}}^T(n)\mathbf{x}_{\text{эл}}(n). \quad (2)$$

Если использовать среднеквадратический критерий оценки, то из двух фильтров следует отдать предпочтение тому, который обеспечивает меньшую дисперсию ошибки. В большинстве практических задач, решаемых в реальном времени, опираются на приближённую оценку дисперсии, которую получают по ограниченному числу наблюдений K . Выполняя оценку дисперсии сигнала ошибки по ограниченному фрагменту, состоящему из K отсчётов сигнала ошибки, и применяя итеративный подход к выбору оптимального порядка адаптивного фильтра, запишем условие выбора оптимального порядка:

$$L(K \cdot (n+1)) = L(K \cdot n) + \text{sign} \left(\sum_{j=K \cdot n}^{K \cdot (n+1)-1} |e_{\text{эл}}(j)|^2 - \sum_{j=K \cdot n}^{K \cdot (n+1)-1} |e(j)|^2 \right). \quad (3)$$

Здесь функция $\text{sign}(x)$ определяется следующим образом:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (4)$$

Для N -канального МАФ, схема которого изображена на рис. 1, условие (3) превращается в систему, состоящую из N условий:

$$L_i(K \cdot (k+1)) =$$

$$= L_i(K \cdot k) + \text{sign} \left(\sum_{j=K \cdot k}^{K \cdot (k+1)-1} |e_{\text{эл},i}(j)|^2 - \sum_{j=K \cdot k}^{K \cdot (k+1)-1} |e_i(j)|^2 \right), \quad (5)$$

где $i = 0, \dots, N-1$ – порядковый номер канала МАФ.

Описанный выше алгоритм настройки МАФ и вычислительные затраты на выполнение соответствующих действий, измеренные в операциях комплексного умножения, приводятся в табл. 1.

Разработка подсистемы анализа-синтеза

Вопросы оптимального проектирования подсистем анализа-синтеза с передискретизацией рассмотрены в [8–10]. Ограничимся рассмотрением класса комплексных подсистем анализа-синтеза с равномерным разбиением по частоте. Если входной сигнал разбивается по частоте на N полос (рис. 1) равной ширины $f_{\text{кв}}/N$, то частоту дискретизации, согласно теореме Котельникова, можно понизить в N раз. Однако при решении задач цифровой частотной селекции у каждого фильтра всегда существуют некоторые переходные зоны на границах полосы пропускания, из-за чего возникают нежелательные эффекты наложения спектров вблизи этих граничных частот. Поэтому при построении МАФ частоту дискретизации понижают не в N раз, а немного меньше – в M раз ($M < N$). Запас по частоте, выраженный соотношением

$$K_{\text{плд}} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{M_i} \cdot 100\% = \frac{N}{M} \cdot 100\% \quad (6)$$

называют показателем передискретизации (ППД)⁵. Здесь i – порядковый номер канала МАФ. В общем случае коэффициенты децимации в разных каналах могут быть выбраны различными, но в данной статье будем рассматривать более простой случай, когда коэффициент децимации одинаков для всех каналов.

Расчёт подсистемы анализа-синтеза сводится к решению задачи оптимизации. Примерно десять лет назад наиболее известные методы расчёта предполагали использование оптимизации в классе нерекурсивных цифровых цепей при условии линейности фазы фильтра-прототипа. В последнее время стали широко известны более эффективные пути решения. В частности, в [9, 10] предлагается отказаться от требования линейности фазы и свести оптимизационную задачу к поиску минимума выпуклой целевой функции при наличии ограничений. Постановка задачи минимизации принимает следующий вид. Требуется найти минимум остаточной энергии зоны непрозрачности фильтра-прототипа:

$$\mathbf{g}^T \tilde{\mathbf{r}}_h \rightarrow \min_{\tilde{\mathbf{r}}_h}, \quad (7 \text{ а})$$

$$\text{при ограничениях } \tilde{\mathbf{v}}(\omega)^T \tilde{\mathbf{r}}_h \leq \xi_2^2 \text{ для всех } \omega \in [\pi/M, \pi], \quad (7 \text{ б})$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(\omega)^T \tilde{\mathbf{r}}_h \leq \xi_3^2 \text{ для всех } \omega \in [0, \pi/M), \quad (7 \text{ в})$$

$$\|\mathbf{S} \tilde{\mathbf{r}}_h\|_2 \leq \frac{\xi_4}{\sqrt{2}}, \quad (7 \text{ г})$$

⁵ В англоязычной литературе этот термин носит устойчивое название «oversampling ratio (OSR)».

$$[\tilde{\mathbf{r}}_h]_0 = \frac{M}{N}, \quad (7 \text{ д})$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(\omega)^T \tilde{\mathbf{r}}_h \geq 0 \text{ для всех } \omega \in [0, \pi]. \quad (7 \text{ е})$$

Фильтр-прототип представляет собой низкочастотный фильтр. Условие (7 а) соответствует поиску фильтра с минимальной остаточной энергией в зоне непрозрачности. Вместо импульсной характеристики фильтра-прототипа оптимизируются отсчеты автокорреляционной функции (АКФ) \mathbf{r}_h , вернее её правой половины $\tilde{\mathbf{r}}_h$, так как АКФ всегда симметрична. Элементы вектора \mathbf{g} получаются следующим образом: $[\mathbf{g}]_0 = 1 - 1/M$, $[\mathbf{g}]_m = -2 \sin(\pi m / M) / (\pi m)$ для $m \geq 1$. Если АКФ обладает чётной симметрией и содержит нечётное число коэффициентов, элементы вектора $\tilde{\mathbf{v}}(\omega)$ находятся следующим образом: $[\tilde{\mathbf{v}}(\omega)]_0 = 1$, $[\tilde{\mathbf{v}}(\omega)]_m = 2 \cos(m\omega)$ для $m \geq 1$.

Коэффициенты ξ_2 , ξ_3 и ξ_4 вводят желаемые ограничения: ξ_2 ограничивает уровень лепестков АЧХ в полосе подавления фильтра, ξ_3 задаёт неравномерность АЧХ, ξ_4 определяет ортогональность банка фильтров и отвечает за степень перекрытия АЧХ смежных каналов⁶. Ограничивающее условие (7 г) можно переписать в форме

$$\sum_{i>0} r_h [iM]^2 \leq \frac{\xi_4^2}{2}. \quad (8)$$

Как следует из (8), S может быть составлена из строк единичной матрицы размером $L \times L$ с номерами $iM + 1$, где $i > 0$.

Условие (7 д) использовано для нормировки энергии, теряемой в процессе децимации входного сигнала. Последнее условие (7 е) вытекает непосредственно из свойств АКФ.

Задача оптимизации (7) имеет линейную целевую функцию, три линейных ограничения-неравенства (7 б), (7 в) и (7 е), одно ограничение-неравенство в форме выпуклой квадратичной функции (7 г) и одно линейное ограничение-равенство (7 д). Следовательно, задача (7) относится к классу задач выпуклой оптимизации. Для решения такого рода задач в программе «MATLAB» имеется специальный пакет готовых функций «CVX», свободно доступный в сети «Интернет» [11]. Готовый пример программы, выполняющей расчёт АКФ приводится в табл. 2. Результатом расчёта является вектор «rtilde_h», содержащий центральный коэффициент и правую ветвь коэффициентов АКФ искомого фильтра-прототипа. Полученная с помощью данной программы АКФ (после дополнения левой ветвью) показана на рис. 5. Все коэффициенты АКФ должны быть вещественными по определению, в то же время коэффициенты импульсной характеристики нерекурсивного цифрового фильтра, соответствующего АКФ, могут быть комплексными величинами.

⁶ Чтобы сделать условие (7 г) более ясным для восприятия, запишем его в виде $\sum_{i \neq 0} \left| \sum_n h(n)h(n+iM) \right|^2 \leq \xi_4^2$, где $h(n)$ – импульсная характеристика фильтра-прототипа. Чтобы представить (7 г) в форме линейного ограничения-неравенства, осуществляют переход к АКФ, вводя переменную $\tilde{\mathbf{r}}_h$.

Таблица 1. Алгоритм настройки МАФ с динамическим выбором порядков внутриканальных адаптивных фильтров и вычислительные затраты

Выполняемые действия	Затраты (V/T_s)
Операции, выполняемые для отсчётов $n = 0, 1, 2, \dots$ на частоте дискретизации $1/T_s$	
1) Разделение входного и обучающего сигналов на компоненты подсистемой анализа:	
$x_i(n) = \mathbf{h}_i^T \mathbf{x}(n)$, $i = 0, \dots, N - 1$,	$\frac{NL_H}{M}$
$d_i(n) = \mathbf{h}_i^T \mathbf{d}(n)$, $i = 0, \dots, N - 1$.	$\frac{NL_H}{M}$
2) Объединение компонентов выходного сигнала подсистемой синтеза:	
$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{g}_i^T \mathbf{y}_i(n)$.	$\frac{NL_G}{M}$
Операции, выполняемые для отсчётов $k = 0, 1, 2, \dots$ на частоте дискретизации $1/(MT_s)$	
1) Уточнение оценки средней мощности входного сигнала:	
$\ \mathbf{x}_i(k)\ ^2, i = 0, \dots, N - 1$.	N
2) Вычисление компонентов выходного сигнала и оценка сигналов ошибки:	
$y_i(k) = \mathbf{w}_i^T(k) \mathbf{x}_i(k), e_i(k) = d_i(k) - y_i(k)$, $i = 0, \dots, N - 1$.	$\frac{NL_i(k)}{M^2}$
3) Обновление векторов весовых коэффициентов:	
$\mathbf{w}_i(k+1) = \mathbf{w}_i(k) + \mu_i \frac{\mathbf{x}_i^*(k)}{\ \mathbf{x}_i(k)\ ^2} e_i(k)$, $i = 0, \dots, N - 1$.	$\frac{NL_i(k)}{M^2}$
Операции, выполняемые для отсчётов $j = 0, 1, 2$, на частоте дискретизации $1/(KMT_s)$	
1) Модификация порядков внутриканальных АФ в соответствии с (10):	
$L_i(K \cdot (k+1)) = L_i(K \cdot k) +$ $+ \text{sign} \left(\sum_{j=K-k}^{K-(k+1)-1} e_{a,i}(j) ^2 - \sum_{j=K-k}^{K-(k+1)-1} e_i(j) ^2 \right)$, $i = 0, \dots, N - 1$.	$\frac{2N}{M}$

В таблице используются следующие обозначения. N – число каналов МАФ, μ_i – шаг адаптации фильтра i -го канала, $L = L_{eq}/M$ – число настраиваемых весовых коэффициентов в каждом из внутриканальных адаптивных фильтров, L_i – порядок эквивалентного одноканального адаптивного фильтра для канала МАФ с порядковым номером i , L_H – порядок фильтров подсистемы анализа, L_G – порядок фильтров подсистемы синтеза, M – коэффициент децимации. V/T_s – объём вычислительных затрат, определяемый как среднее число операций комплексного умножения, выполняемых за время T_s , равное шагу дискретизации входного сигнала МАФ.

Кроме того, в рассматриваемом методе расчёта снимается ограничение на линейность фазы фильтра-прототипа, что позволяет существенно повысить качественные показатели подсистемы анализа-синтеза при заданном порядке, составляющих её фильтров.

Таблица 2. Расчёт правой половины АКФ низкочастотного фильтра-прототипа в программе «MATLAB» с использованием пакета выпуклой оптимизации «CVX» [11]

```
L = 48; % Порядок фильтра-прототипа
N = 8; % Число каналов подсистемы анализа-синтеза
M = 6; % Коэффициент децимации
level = -33; % Подавление в зоне непрозрачности, дБ
alpha = 1e-3; % Показатель самоортогональности

xi_3_sqr = 10 ^ (0.1) * M;
xi_4_ = alpha * M / N;
xi_2_sqr = xi_3_sqr * 10 ^ (level / 10);

sf = 15;
eps_sf = 1e-6;

omega_s = pi / M;
k_vecT = 1 : (L - 1);
Ns_pt = ceil(L * sf * omega_s / pi);
Ns_s = ceil(L * sf * (1 - omega_s / pi));
omega_ptb = linspace(0, omega_s, Ns_pt + 1)';
omega_ptb = omega_ptb(1 : end - 1);
omega_sb = linspace(omega_s, pi, Ns_s)';
VtT_ptb = [ones(Ns_pt, 1), 2*cos(omega_ptb*k_vecT)];
VtT_sb = [ones(Ns_s, 1), 2*cos(omega_sb*k_vecT)];

N_isi = floor((L - 1) / N);
k_isi_vec = N * (1 : N_isi)';
S = eye(L);
S = S(k_isi_vec + 1, :);

gT = [1 - 1/M, -2*sin(pi*k_vecT/M) ./ (pi*k_vecT)];
cvx_begin
cvx_solver sedumi;
cvx_precision high;
variable rtilde_h(L);
variable X(L,L) symmetric;
minimize (gT * rtilde_h)
subject to
VtT_sb * rtilde_h <= xi_2_sqr - eps_sf;
VtT_ptb * rtilde_h <= xi_3_sqr - eps_sf;
norm(S * rtilde_h) <= xi_4_ / sqrt(2);
[1, zeros(1,L-1)] * rtilde_h == M / N;
X == semidefinite(L);
trace(X) == rtilde_h(1);
for n = 1 : L - 1,
sum(diag(X, n)) == rtilde_h(n + 1);
end;
cvx_end
```

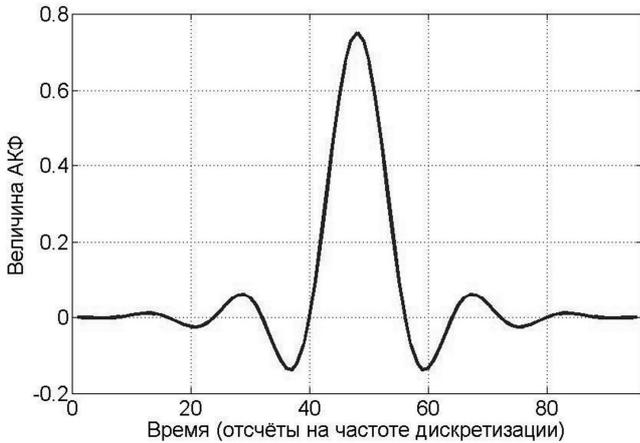


Рис. 5. АКФ низкочастотного фильтра-прототипа

Несмотря на то, что рассматриваемые по отдельности фильтры подсистем анализа и синтеза имеют несимметричные импульсные характеристики, а, следовательно, вносят в сигнал фазовые искажения, последовательное их соединение оказывается цифровой цепью, имеющей линейную фазу. Это значит, что подсистема

синтеза полностью компенсирует фазовые искажения, внесённые фильтрами подсистемы анализа.

Для поиска импульсной характеристики обратимся к методам спектрального разложения (спектральной факторизации). Известно, что задача определения неизвестной импульсной характеристики некоторой системы по известной АКФ этой системы не даёт однозначного соответствия. Для определённости можно ввести ряд ограничений, например, потребовать, чтобы все коэффициенты найденной импульсной характеристики были вещественными числами.

Существует много численных методов решения данной задачи. Воспользуемся одним из методов, описанных в [12]. Метод⁷ основан на использовании алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ), который реализован в программе «MATLAB». Алгоритм БПФ хорошо известен специалистам в области цифровой обработки сигналов, поэтому данный метод спектральной факторизации легко осуществим при решении задачи в «MATLAB».

Метод основан на алгоритме непосредственного расчёта минимально-фазового спектрального множителя $S_{mf}(z)$ по заданной АКФ $r(n)$. Можно показать [12], что логарифм $S_{mf}(z)$ определён и является аналитической функцией во всех точках комплексной плоскости вне единичной окружности. Следовательно, $\ln S_{mf}(z)$ может быть разложен в бесконечный ряд по степеням z^{-1} :

$$\ln S_{mf}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i}, \quad (9)$$

где $|z| > 1$, $a_i \in \mathbf{R}$. В таком случае вещественная часть логарифма на единичной окружности определяется выражением:

$$\Re \ln S_{mf}(e^{j\omega}) = \ln |S_{mf}(e^{j\omega})| = \frac{1}{2} \ln R(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cos i\omega, \quad (10)$$

где $R(\omega)$ – преобразование Фурье от АКФ. Коэффициенты a_i – коэффициенты Фурье функции $(1/2)\log R(\omega)$:

$$a_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \ln R(\omega) e^{-j i \omega} d\omega, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

где j – мнимая единица.

После того как найдены коэффициенты a_i , $S_{mf}(e^{j\omega})$ можно найти следующим образом:

$$S_{mf}(e^{j\omega}) = \exp \sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{-j i \omega}, \quad (12)$$

Коэффициенты Фурье $S_{mf}(e^{j\omega})$ представляют собой искомые отсчёты импульсной характеристики:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j n \omega} \exp \sum_{i=0}^{\infty} a_i e^{-j i \omega} d\omega. \quad (13)$$

Далее приведём описание практической реализации в терминах цифровой обработки сигналов. На первом этапе по известной АКФ рассчитывается квадрат АЧХ $R(\omega)$, для чего вектор коэффициентов дополняется нулями и вычисляется БПФ. Для вычисления БПФ число отсчётов F (после дополнения нулями) должно быть кратно натуральной степени числа 2. Чем больше ну-

⁷ Точно не известно, кто является автором данного метода. Вероятно, идея метода дана А.Н. Колмогоровым [12]. Следует также заметить, что метод не раз был предложен разными учёными, о чём свидетельствуют работы [13, 14].

лей, тем точнее будет выполнена спектральная факторизация.

Цель второго этапа состоит в поиске коэффициентов Фурье a_i для функции $(1/2)\ln R(\omega)$, который снова сводится к вычислению БПФ.

На третьем этапе вычисляется выражение (12), для чего в третий раз используется алгоритм БПФ и выполняется экспоненциальное взвешивание. Фактически на втором и третьем этапах происходит вычисление фазы функции $S_{\text{мф}}(e^{j\omega})$ с помощью преобразования Гильберта и последующей операции вычисления экспоненты.

Коэффициенты Фурье функции $S_{\text{мф}}(e^{j\omega})$ являются отсчётами искомой импульсной характеристики $h[n]$. Поэтому четвёртый этап связан с нахождением обратного преобразования Фурье, которое вновь сводится к вычислению БПФ.

Следует заметить, что при программной реализации описанного алгоритма в «MATLAB» в ряде преобразований следует принять дополнительные меры для гарантирования свойств симметрии, вещественности и ограничения размерностей получаемых результатов, как это сделано в примере, приведённом в табл. 3.

Таким образом, описанный здесь метод спектральной факторизации включает в себя четыре стадии вычислений, на каждой из которых применяется БПФ. Пример программы, позволяющий рассчитать импульсную характеристику низкочастотного фильтра-прототипа по известной АКФ этого фильтра приводится в табл. 3. Благодаря использованию стандартной операции вычисления БПФ, основная часть программы состоит всего из четырёх строчек. Вторая часть программы служит для отображения полученных результатов на графиках. Кроме того, вычисление БПФ позволяет быстро получать результат для фильтров высокого порядка (например, когда фильтр-прототип имеет несколько сотен весовых коэффициентов). Описанная процедура нахождения импульсной характеристики по известной АКФ отличается вычислительной эффективностью и устойчивостью вычислений. Полученная в результате спектральной факторизации импульсная характеристика показана на рис. 6. Она состоит из 48 коэффициентов и имеет несимметричный вид. Все коэффициенты полученного нерекурсивного фильтра принимают вещественные значения. Тем не менее, фильтры подсистемы анализа и синтеза получаются из фильтра-прототипа умножением на комплексные экспоненты соответствующих частот, поэтому МАФ, построенный на основе вещественного фильтра-прототипа, является комплексным.

О точности проведённой процедуры спектральной факторизации можно судить по рис. 7. Поиск АКФ фильтра по известной импульсной характеристике этого фильтра, в отличие от обратной задачи, описанной нами выше, даёт однозначное решение и может быть выполнен посредством вычисления операции свёртки. Рассчитав АКФ, соответствующую найденной импульсной характеристике, вычтем из неё первоначальную АКФ, для которой выполнялась спектральная факторизация. Найденная таким образом погрешность решения задачи поиска импульсной характеристики по известной АКФ показана на графике (рис. 7). Эта погрешность не превышает 10^{-10} .

Таблица 3. Расчёт импульсных характеристик фильтров подсистемы анализа-синтеза по АКФ низкочастотного фильтра прототипа

```
% Порядок ДПФ
F = 2^19;
% Формирование АКФ по её правой ветви (отражением)
r = rtild_h .'; Lh = length(r);
r = [fliplr(r(2:end)) r];
% Расчёт спектра по известной АКФ
R = real(fft([r(Lh:end), ...
             zeros(1,F-2*Lh+1) r(1:Lh-1)]));
% Преобразование Гильберта
a = 2 * 1/F * fft(1/2 * log(R)); a(1) = a(1) / 2;
a = [a(1:F/2) zeros(1,F/2)];
Smp = exp(fft(a));
% Расчёт импульсной характеристики фильтра-прототипа
h = real(ifft(Smp)); h = h(1:Lh);

% Отображение результатов на графиках
r0 = conv(h, fliplr(conj(h)));
figure(1); plot(h);
figure(2);
    plot([1:length(r)], r, 'b', [1:length(r0)], r0, 'r');
figure(3); plot(r-r0);
% ЛАЧХ фильтров анализа-синтеза
K = 4; Lh = length(h);
Freq = exp(j * pi * ([0:K-1]+1/2)'/4 * [1:Lh]);
H = h.' * ones(1,K) .* Freq.';
ACH = 20*log10(abs(fft(h.'*ones(1,K).*Freq.',512)));
figure(5); plot([0:512/2-1]'/512, ACH(1:end/2,:));
```

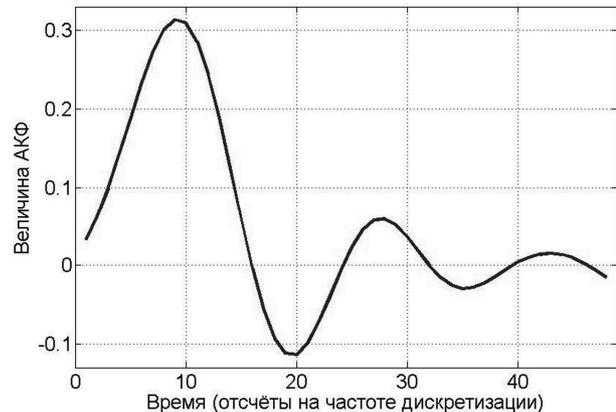


Рис. 6. Импульсная характеристика низкочастотного фильтра-прототипа

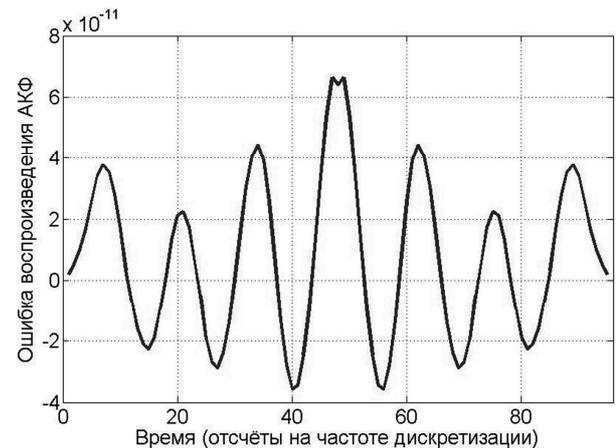


Рис. 7. Погрешность, полученная при решении задачи поиска импульсной характеристики по известной АКФ

На рис. 8 показаны АЧХ фильтров подсистемы анализа. Все фильтры получены на основе рассчитанного ранее фильтра-прототипа путём модуляции комплексными экспонентами соответствующих частот. При обработке вещественного входного сигнала достаточно четырёх фильтров, перекрывающих диапазон частот от нуля до половины частоты дискретизации в силу симметрии спектра. При обработке комплексного входного

сигнала фильтры для отрицательных частот получаются из фильтров положительных частот операцией комплексного сопряжения всех весовых коэффициентов. Фильтры подсистемы синтеза получаются из фильтров подсистемы анализа комплексным сопряжением всех весовых коэффициентов и перестановкой их в обратном порядке.

На рис. 9 показана зависимость остаточной энергии сигнала в зоне непрозрачности от уровня боковых лепестков для фильтра-прототипа 48-го порядка при выборе коэффициента ортогональности $\xi_4 = 10^{-3}(M/N)$. Кружочком отмечено положение рассчитанного фильтра. Крестиком отражено положение фильтра-прототипа, найденного методом Хартенка и др. [12], имеющего линейную фазу.

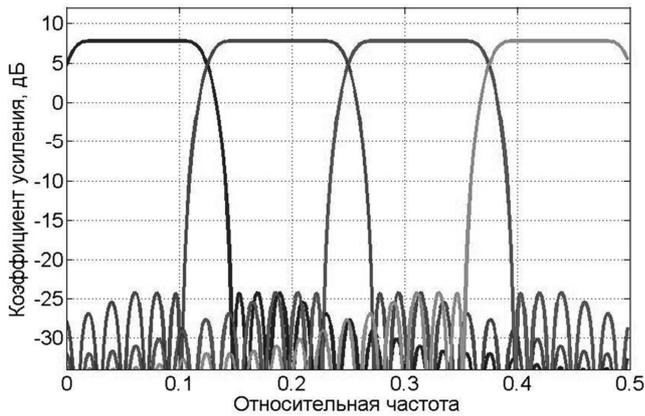


Рис. 8. Амплитудно-частотные характеристики фильтров подсистемы анализа

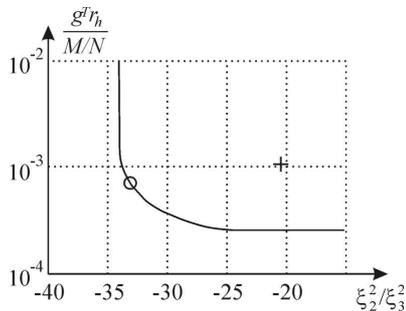


Рис. 9. Зависимость остаточной энергии сигнала в зоне непрозрачности от уровня боковых лепестков для фильтра-прототипа 48-го порядка

при выборе коэффициента ортогональности $\xi_4 = 10^{-3}(M/N)$

Результаты компьютерного моделирования

В данном разделе статьи представлены результаты двух экспериментов. Цель первого эксперимента состояла в проверке эффективности работы эквалайзеров с динамическим выбором порядка (ДВП) в стационарном канале связи с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ). Во втором эксперименте исследовалась способность эквалайзеров с ДВП реагировать на изменения частотных характеристик нестационарного канала связи.

Для обоих экспериментов была выбрана модель, аналогичная предложенной в [13]: 4-позиционная относительная фазовая манипуляция (QPSK) с использованием кода Грея, скорость передачи равна 10 Мбит/с. Фильтрация импульсов осуществляется на приёмной и передающей сторонах цифровым фильтром с характе-

ристической типа «приподнятый косинус», нормированной на квадратный корень, и коэффициентом спада, равным 0,23. Как и в [15], при модуляции используется одна несущая частота, но обработка сигнала осуществляется во временной области (без вычисления спектра при помощи преобразования Фурье). Предполагается, что настройка происходит по известному в приёмнике эталонному сигналу, поэтому пилот-сигналы в модели отсутствуют.

Все эксперименты проводились для 8-канальных комплексных адаптивных фильтров ($N = 8$) с 6-кратным понижением частоты дискретизации ($M = 6$). Для адаптивных фильтров с фиксированным порядком (одноканального и многоканального) порядки были заданы таким образом, чтобы длина воспроизводимой импульсной характеристики получалась одинаковой. Порядок одноканального адаптивного фильтра равнялся 512, а порядок МАФ был в M раз меньше, то есть 86. Для адаптивных фильтров с ДВП эти значения являлись верхними ограничениями. Таким образом, для всех адаптивных фильтров был установлен один и тот же эквивалентный порядок: $L_{eq} = 512$ (для фильтров с адаптивным выбором порядка это наибольший допустимый порядок). Начальное значение порядка $L_0 = 64$ для одноканального адаптивного фильтра, начальные значения порядков внутриканальных фильтров МАФ $L_{0,i} = 10$ для всех каналов ($i = 0..7$). Вложенные фильтры как в одноканальном, так и в многоканальном фильтрах получались исключением крайних $\Delta L = 5$ весовых коэффициентов. Шаг адаптации был задан равным 0,1.

В первом эксперименте в качестве модели канала связи была выбрана стационарная модель двухлучевого канала. Оба луча имели равные коэффициенты передачи, задержка между лучами равнялась 1 мкс. При моделировании на выходе канала связи к полезному сигналу добавлялся АБГШ: отношение сигнал-шум равнялось 40 дБ.

Рис. 10 позволяет наглядно сравнить по скорости и точности настройки четыре алгоритма: классический алгоритм НСКО с нормировкой шага адаптации (алгоритм NLMS [4]), НСКО с ДВП (ДВП-НСКО), 8-канальный адаптивный фильтр с фиксированным порядком на основе алгоритма НСКО (МАФ) и 8-канальный адаптивный фильтр с ДВП (ДВП-МАФ). Под относительной ошибкой понимается отношение мощности сигнала ошибки на выходе адаптивного фильтра к мощности входного сигнала.

Рис. 11 отражает процесс изменения порядков адаптивных фильтров с ДВП. Разделение в семействе кривых для ДВП-МАФ объясняется наличием плавного спада вблизи частоты среза амплитудно-частотных характеристик согласованных фильтров с характеристикой типа «приподнятый косинус». Кроме того, на рис. 11 наблюдается эффект ограничения: кривые достигают наибольшего допустимого порядка, равного 86.

Во втором эксперименте в качестве модели канала связи была выбрана нестационарная модель двухлучевого канала. Отношение средних квадратов коэффициентов передачи по лучам было равным 5. Задержка между лучами равнялась 1 мкс. Отношение сигнал-шум было уменьшено до 80 дБ, чтобы влиянием шума можно

было пренебречь. Динамику изменений в канале связи позволяет оценить рис. 12. Быстродействие подсистемы выбора оптимального порядка отражено на рис. 13.

нарным двухлучевым каналом связи, представленными на рис. 15. Формулы для расчёта вычислительных затрат представлены в табл. 1.

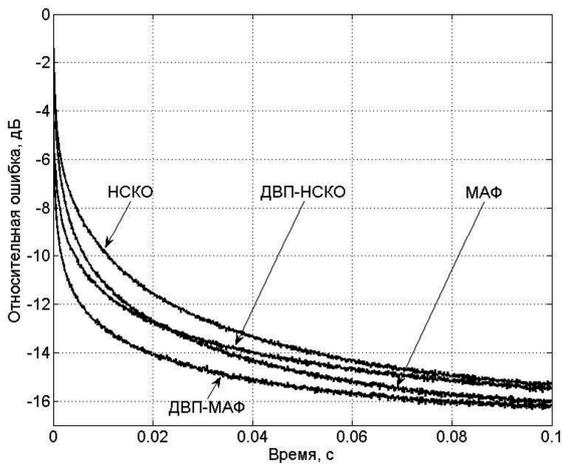


Рис. 10. Пример настройки четырёх эквалайзеров на основе алгоритма НСКО в условиях стационарного канала связи (эксперимент 1)

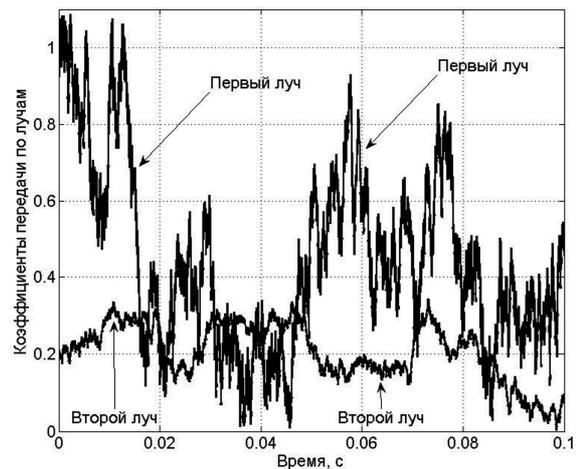


Рис. 12. Пример изменения коэффициентов передачи по лучам в двухлучевом нестационарном канале связи (эксперимент 2)

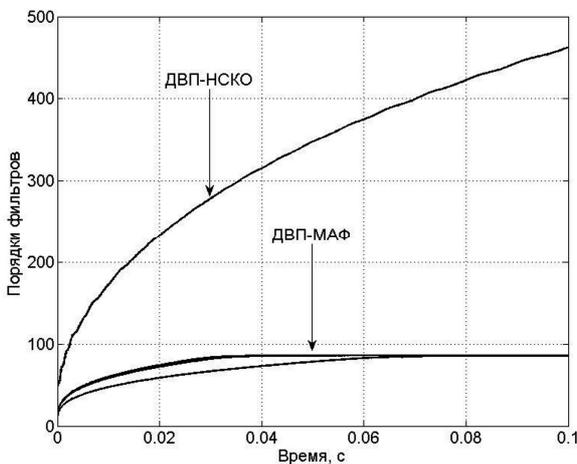


Рис. 11. Пример настройки четырёх эквалайзеров на основе алгоритма НСКО в условиях стационарного канала связи (эксперимент 1)

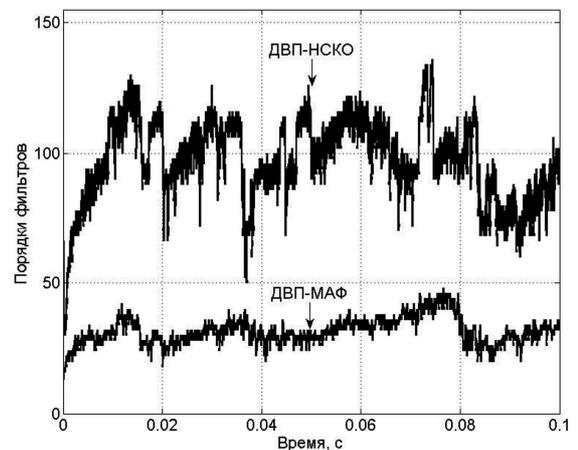


Рис. 13. Быстродействие подсистем выбора оптимального порядка в условиях нестационарного канала связи. Для МАФ для наглядности график построен для одного из 8 каналов (эксперимент 2)

Рис. 14 позволяет наглядно сравнить по скорости и точности настройки четыре алгоритма: НСКО с нормировкой шага адаптации, ДВП-НСКО, МАФ и ДВП-МАФ. Некоторый провал на обучающих кривых в самом начале настройки объясняется выбранной моделью канала связи, в которой начальные значения коэффициентов передачи по лучам во всех экспериментах выбирались одинаковыми (1,0 и 0,2), что отражено также на рис. 12.

В первые моменты настройки, эквалайзеры с адаптивным выбором порядка снижают порядки АФ, благодаря чему настройка протекает значительно быстрее, чем у эквалайзеров с фиксированным порядком. В дальнейшем, порядки АФ растут, что позволяет повысить точность настройки в установившемся режиме. В данном примере отношение сигнал-шум удалось повысить с 10 до 14 дБ.

На рис. 15 представлен процесс изменения порядков адаптивных фильтров с ДВП. В отличие от рис. 13, на рис. 15 представлены результаты, полученные путём усреднения по более чем 10000 экспериментов. Оценим выигрыш по вычислительным затратам, достигаемый в эквалайзерах на основе ДВП-МАФ. Для определённости ограничимся результатами эксперимента с нестационарным каналом связи (эксперимент 2).

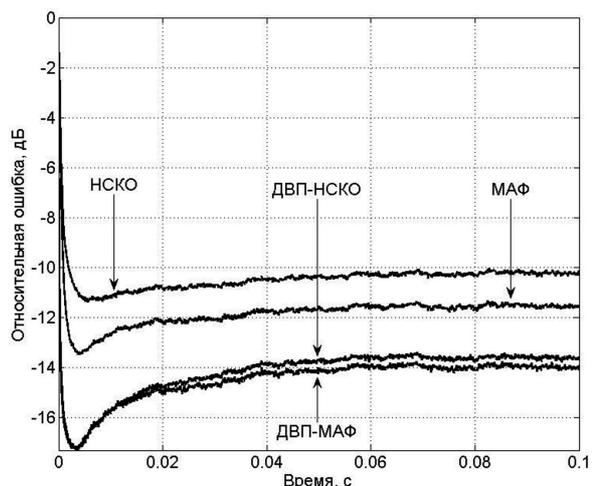


Рис. 14. Пример настройки четырёх эквалайзеров на основе алгоритма НСКО в условиях нестационарного канала связи (эксперимент 2)

При проведении компьютерного моделирования были выбраны следующие численные значения параметров. Использовался 8-канальный комплексный адаптивный фильтр ($N = 8$) с 6-кратным понижением частоты дискретизации ($M = 6$). Порядки фильтров анализа и



синтеза были выбраны одинаковыми $L_H = L_G = 96$, порядки адаптивных фильтров L_{eq} были равны 512.

Нетрудно оценить выигрыш по вычислительным затратам. Одноканальный эквалайзер с фиксированным порядком адаптивного фильтра и алгоритмом настройки НСКО требует $512 \cdot 2 + 1 = 1025$ комплексных умножений на каждый отсчёт дискретного входного сигнала (к.у./отс.). При переходе к многоканальной структуре эквалайзера с фиксированным порядком (МАФ) вычислительные затраты снижаются до $8 \cdot 96 / 6 + 1 \cdot 8 + 8 \cdot 512 / 6 / 6 \cdot 2 = 136 + 8 \cdot 512 / 6 / 6 \cdot 2 \approx 366$ к.у./отс. Предоставив эквалайзерам самостоятельный выбор наилучших порядков адаптивным фильтрам, можно достичь дополнительной экономии вычислительных затрат. В случае одноканального эквалайзера с адаптивным выбором порядка (ДВП-НСКО) потребуется $L_{eq} \cdot 2 + 1$ к.у./отс., а для многоканального эквалайзера с адаптивным выбором порядков (ДВП-МАФ) затраты составят $8 \cdot 96 / 6 + 3 \cdot 8 + 8 \cdot L_{eq} / 6 \cdot 2 = 152 + 16 / 6 \cdot L_{eq}$ к.у./отс. Судя по рис. 15, в установившемся режиме работы затраты на ДВП-НСКО и ДВП-МАФ равны в среднем 313 и 259 к.у./отс., соответственно.

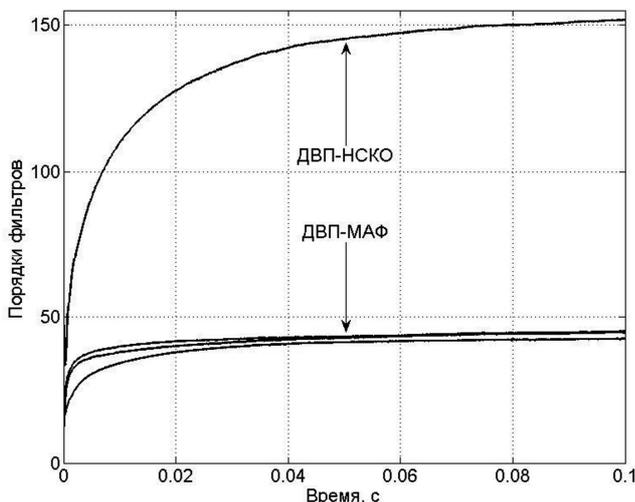


Рис. 15. Пример настройки четырёх эквалайзеров на основе алгоритма НСКО в условиях нестационарного канала связи (эксперимент 2)

Выводы

Введение процедуры динамического выбора порядков внутриканальных адаптивных фильтров в МАФ с независимой настройкой каналов значительно повышает быстродействие МАФ. При этом все основные преимущества МАФ перед одноканальным алгоритмом НСКО – повышение точности настройки и снижение вычислительных затрат на обработку в реальном времени – сохраняются.

Литература

1. Haykin S., Adaptive filter theory, 4th ed. – Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002. – 936 с.
2. Vityazev V.V., Linovich A.Y. A subband equalizer with the flexible structure of the analysis/synthesis subsystem // Proc. 2010 IEEE Region 8 International Conference on Computational Technologies in Electrical and Electronics Engineering "SIBIRCON-2010," vol. 1, Irkutsk – Listvyanka, Russia. – July 11–15, 2010. – pp. 174–178.

3. Линович А.Ю. Многоскоростная обработка сигналов в задачах обратного моделирования – Германия: LAP LAMBERT academic publishing, 2011. – 219 с., (<http://www.morebooks.de>).

4. Sayed A.H., Fundamentals of adaptive filtering. – New York: Wiley, 2003.

5. Витязев В.В. Цифровая частотная селекция сигналов. – М.: Радио и связь, 1993. – 240 с.

6. Crochiere R.E., Rabiner L.R. Multirate digital signal processing. – NJ: Prentice-Hall, 1983. – 411 с.

7. Уидроу Б., Стирнз С. Адаптивная обработка сигналов / Пер с англ. – М.: Радио и связь, 1989. – 440 с.

8. Harteneck M., Weiss S., Stewart R.W. Design of near perfect reconstruction oversampled filter banks for subband adaptive filters // IEEE transactions on circuits and systems II. 1999. – № 8. – pp. 1081 – 1086.

9. Wilbur M.R., Davidson T.N., Reilly J.P. Efficient design of oversampled NPR GDFT filter banks // IEEE transactions on signal processing. 2004. – № 7. – pp. 1947 – 1963.

10. Davidson T.N. Enriching the art of FIR filter design via convex optimization // IEEE signal processing magazine. 2010. – № 3. – pp. 89 – 101.

11. Grant M., Boyd S. Graph implementations for nonsmooth convex programs. Recent Advances in Learning and Control // Blondel V., Boyd S., Kimura H., Eds. New York: Springer. 2008. – pp. 95 – 110. [Online]. Available: <http://stanford.edu/~boyd/cvx>

12. Wu S.-P., Boyd S., Vandenberghe L. FIR filter design via spectral factorization and convex optimization // Applied and computational control, signals, and circuits, vol 1, Datta B., Ed. Cambridge, MA: Birkhauser, May 1999, ch. 5, pp. 215 – 245.

13. R. Boite and H. Leich. A new procedure for the design of high order minimum phase FIR digital or CCD Filters. Signal Processing, 3:101 – 108, 1981.

14. G. A. Mian and A. P. Nainer. A fast procedure to design equiripple minimum-phase FIR Filters. IEEE Trans. Circuits Syst., 29(5):327 – 331, 1982.

15. Ng B., Lam C.T., Falconer D. Turbo frequency domain equalization for single-carrier broadband wireless systems // IEEE transactions on wireless communications. 2007 – № 2. – pp. 759 – 767.

METHODS OF MULTIRATE SIGNAL PROCESSING IN SUBBAND ADAPTIVE FILTERS WITH THE SELF-ORGANIZING STRUCTURES: EQUALIZERS WITH DYNAMIC ORDER SELECTION

Linovich A. Y.

Adaptive algorithms for the self-organizing subband equalizers are proposed. Simulation results demonstrating their performance in the wideband communication equipment are supplied. The series of advantages and drawbacks of all described multi-channel structures are considered. Many different details for this way of equalizing in wireless communications are discussed.