

БЫСТРОЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Пономарева О.В., к.т.н., доцент Ижевского государственного технического университета,
e-mail: cikur@udmnet.ru

Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, действительная последовательность, параметрическое быстрое преобразование Фурье, перекрестная комплексно-сопряженная симметрия, выявление скрытых периодичностей.

При спектральном анализе как детерминированных, так и случайных сигналов широкое применение находит аппарат ДПФ, мощным инструментом вычисления которого являются алгоритмы БПФ [1, 2, 3].

В работах [4, 5, 6] дано обобщение ДПФ в виде параметрического ДПФ (ДПФ-П) и рассмотрены алгоритмы быстрого вычисления ДПФ-П (алгоритмы БПФ-П). Пара преобразований ДПФ-П в матричной форме задается следующими соотношениями:

$$S_{N,\theta} = \frac{1}{N} F_{N,\theta} X_N; \quad (1)$$

$$X_N = F_{N,\theta}^* S_{N,\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

или в обычной форме:

$$S_N(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n}, \quad k = \overline{0, N-1}; \quad (2)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k, \theta) W_N^{-(k+\theta)n}, \quad n = \overline{0, N-1}, \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

где:

$$F_{N,\theta} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^\theta & \dots & W_N^{\theta(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1+\theta)} & \dots & W_N^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} n \\ k \end{matrix}$$

$$W_N = \exp\left[-j \frac{2\pi}{N}\right]. \quad (3)$$

При значении параметра θ равно нулю, соотношения (1) и (2) задают стандартное ДПФ.

ДПФ и быстрые алгоритмы его вычисления предполагают, что входная последовательность $x(n)$ $n = 0, N-1$ является комплексной. В прикладных же задачах цифровой обработки сигналов в большинстве случаев имеют дело с действительными последовательностями:

Применение стандартного комплексного БПФ-П при $\theta = 1/2$ к действительным последовательностям $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ приводит, с одной стороны, к вычислению $N/2$ точек спектра на отрицательных частотах, которые не несут дополнительной информации о спектре сигнала $x(n)$ (избыточные вычислительные затраты), с другой стороны – требуемый объем памяти в два раза больше необходимого (избыточные затраты памяти). Для устранения указанных недостатков предложены алгоритмы БПФ-П действительных последовательностей, исключающие избыточные затраты, как в памяти, так и в объеме вычислений. Рассмотрен алгоритм БПФ-П действительных последовательностей при $\theta \neq 1/2$.

$\text{Im}\{x(n)\} = 0$, $n = 0, N-1$. Как известно, ДПФ таких сигналов при четном N обладает свойством комплексно – сопряженной симметрии:

$$S_N(k) = S_N^*(N-k), \quad k = \overline{1, N/2-1}, \quad (4)$$

где * – символ комплексного сопряжения.

Следовательно, применение стандартного комплексного БПФ к действительным последовательностям приводит, с одной стороны, к вычислению $N/2 - 1$ точек спектра на отрицательных частотах, которые не несут дополнительной информации о спектре сигнала $x(n)$ (избыточные вычислительные затраты), с другой – требуемый объем памяти в два раза больше необходимого (избыточные затраты памяти). Для устранения указанных недостатков был предложен алгоритм БПФ действительных последовательностей, устраняющий избыточные затраты, как в памяти, так и в объеме вычислений [2, 3], идея которого довольно проста, но только после того, как на нее указали.

В этих алгоритмах БПФ действительная последовательность $x(n)$ в N отсчетов разбивается на две действительные последовательности в $N/2$ отсчетов согласно следующему выражению: $x_1(n) = x(2n)$, $x_2(n) = x(2n+1)$ т.е. на последовательности четных и нечетных отсчетов.

Далее образуется комплексная последовательность:

$$x_3(n) = x_1(n) + jx_2(n), \quad n = \overline{0, N/2-1}. \quad (5)$$

Затем вычисляют БПФ комплексной последовательности $x_3(n)$ алгоритмом БПФ.

Идея алгоритма ДПФ действительных последовательностей заключается в следующем. Известно, ДПФ любой действительной последовательности имеет чет-

ную действительную часть и нечетную мнимую часть. И наоборот, ДПФ любой чисто мнимой последовательности имеет нечетную действительную и четную мнимую части. [1]. ДПФ суммы таких последовательностей $x_3(n) = x_1(n) + jx_2(n)$, имеет асимметричные действительную и мнимую части. Однако, ДПФ $x_1(n) = x(2n)$, и ДПФ $x_2(n) = x(2n+1)$, могут быть легко восстановлены, так как любую функцию можно представить в виде суммы четной и нечетной частей. Затем, используя фундаментальное свойство БПФ (возможность получения спектра исходной последовательности из спектров двух ее частей), находят спектр исходной последовательности $x(n)$, выполняя дополнительный слой БПФ [2, 3].

При внимательном изучении соотношений (2), (3) и (4) можно сделать несколько важных выводов:

1. ДПФ действительной последовательности $S_N(k)$, $k = 0, N - 1$, строго говоря, определяется не $N/2$ отсчетами, как нередко утверждается в работах по цифровой обработке сигналов (см. например [3]), а $(N/2 + 1)$ отсчетами;

2. Комплексно - сопряженная симметрия коэффициентов ДПФ действительной последовательности при четном N имеет место не для всех отсчетов ДПФ. Два отсчета спектра $S_N(0)$ и $S_N(N/2)$ не обладают этим свойством (при нечетном N - один отсчет спектра $S_N(0)$). Кроме того, эти отсчеты (или этот отсчет) являются чисто действительными величинами.

3. При значении параметра $\theta = 1/2$ все коэффициенты ДПФ-П обладают свойством комплексно - сопряженной симметрии:

$$S_N(k, 1/2) = S_N^*(N - k, 1/2); \quad k = \overline{0, N/2 - 1}. \quad (6)$$

Алгоритм БПФ-П при $\theta = 1/2$ для действительных последовательностей (далее алгоритм 1) может быть построен в рамках подхода рассмотренного в [2, 3] (суть такого подхода изложена выше). Покажем, что, так как все коэффициенты ДПФ-П при $\theta = 1/2$ обладают фундаментальным свойством комплексно-сопряженной симметрии (6), данный подход допустим и правомерен.

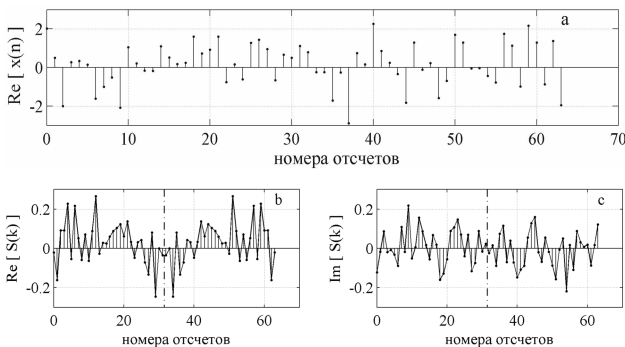


Рис. 1 Спектр сигнала $x(n)$ полученный методом ДПФ-П при $\theta = 1/2$

На рис.1а приведена некоторая действительная последовательность $x(n)$ в 64 отсчета, а на рис. 1б и рис.1с соответственно действительная и мнимая части её спектра ДПФ-П при $\theta = 1/2$ (штрих-пунктирной ли-

нией обозначена ось симметрии). В алгоритме БПФ-П при $\theta = 1/2$ действительной последовательности (как и в алгоритме БПФ действительной последовательности) $x(n)$ в N отсчетов разбивается на две действительные последовательности в $N/2$ отсчетов: т.е. на последовательности четных $x_1(n)$ и нечетных отсчетов $x_2(n)$.

$$x_1(n) = x(2n), \quad x_2(n) = x(2n+1).$$

Далее образуется комплексная последовательность:

$$x_3(n) = x_1(n) + jx_2(n), \quad n = \overline{0, N/2 - 1},$$

действительная и мнимая части спектра, которой приведены соответственно на рис. 2г и рис. 2h. Чтобы получить спектры действительных последовательностей $x_1(n) = x(2n)$ и $x_2(n) = x(2n+1)$, приведенные на рис. 2с, рис. 2е, рис. 2д, рис. 2f, соответственно, необходимо воспользоваться следующими выражениями:

$$\text{Re}[S_1(k, 1/2)] = \{\text{Re}[S_3(k, 1/2) + \text{Re}[S_3(N/2 - k - 1)]]\}/2;$$

$$\text{Im}[S_1(k, 1/2)] = \{\text{Im}[S_3(k, 1/2) - \text{Im}[S_3(N/2 - k - 1)]]\}/2;$$

$$\text{Re}[S_2(k, 1/2)] = \{\text{Im}[S_3(k, 1/2) + \text{Im}[S_3(N/2 - k - 1)]]\}/2;$$

$$\text{Im}[S_2(k, 1/2)] = \{\text{Re}[S_3(k - k - 1) - \text{Re}[S_3(k, 1/2)]]\}/2;$$

$$k = \overline{0, N/2 - 1}.$$

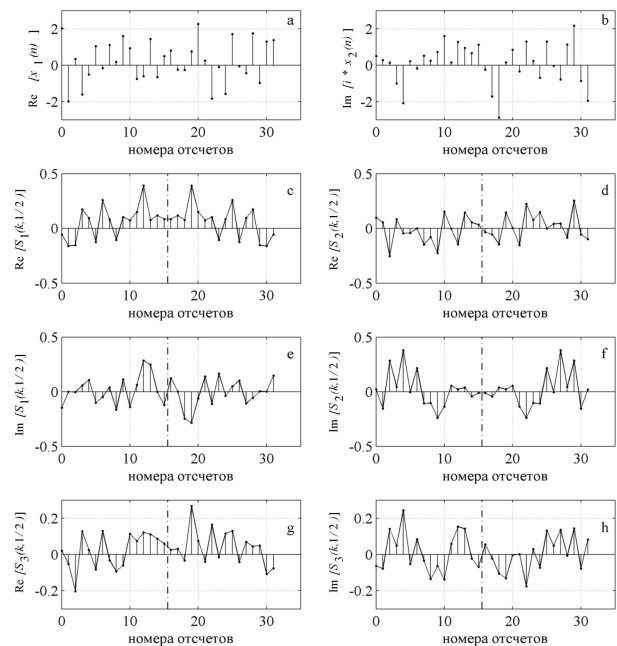


Рис. 2 Структура симметрий спектров ДПФ-П действительных сигналов $x_1(n)$ и $jx_2(n)$ при $\theta = 1/2$

Затем необходимо дополнительно выполнить вычисления согласно следующим выражениям:

$$\text{Re}[S(k, 1/2)] = S_1(k, 1/2) + S_2(k, 1/2) \times$$

$$\times \left[\cos \frac{2\pi}{N} (k + 1/2) + j \sin \frac{2\pi}{N} (k + 1/2) \right];$$

$$k = \overline{0, N/2 - 1}.$$

В результате мы получим спектр исходного действительного сигнала $x_1(n)$ на положительных частотах (рис.3).

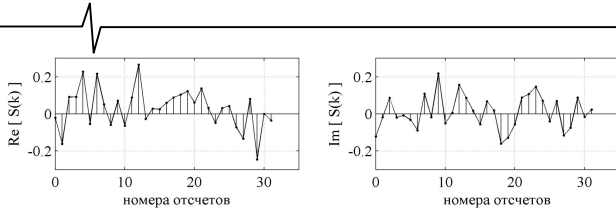


Рис. 3 Спектр действительного сигнала $x(n)$ на положительных частотах, полученный с помощью алгоритма 1.

Рассмотрим альтернативный подход вычисления ДПФ-П действительных последовательностей, использующий комплексно-сопряженную симметрию при $\theta = 1/2$.

Пусть задана действительная последовательность:

$$x(n) \quad n = \overline{0, N-1},$$

стандартное ДПФ-П, которой при $\theta = 1/2$ описывается следующим выражением:

$$S_N(k, 1/2) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n(k+1/2)}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (7)$$

Найдем четные отсчеты коэффициентов ДПФ-П, $\theta = 1/2$: $S_N(2k, 1/2)$:

$$\begin{aligned} S_N(2k, 1/2) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n(2k+1/2)} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{n(2k+1/2)} + \frac{1}{N} \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{n(2k+1/2)}, \end{aligned}$$

или:

$$\begin{aligned} S_N(2k, 1/2) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{n(2k+1/2)} + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n+N/2) W_N^{(n+N/2)(2k+1/2)} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_{N/2}^{n(k+1/4)} + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n+N/2) W_{N/2}^{n(k+1/4)} W_N^{N/2(2k+1/2)}. \end{aligned}$$

С учетом того, что: $W_N^{N/2(2k+1/2)} = -j$, окончательно получим:

$$\begin{aligned} S_N(2k, 1/2) &= S_{N/2}(k, 1/4) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) - jx(n+N/2)] W_{N/2}^{n(k+1/4)}, \\ k &= \overline{0, N/2-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично найдем нечетные отсчеты коэффициентов ДПФ-П при $\theta = 1/2$, опуская промежуточные выкладки:

$$\begin{aligned} S_N((2k+1), 1/2) &= S_{N/2}(k, 3/4) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + jx(n+N/2)] W_{N/2}^{n(k+3/4)}, \\ k &= \overline{0, N/2-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что при выводе формулы (9) использовано соотношение:

$$W_{N/2}^{(N/2)(2k+3/2)} = +j.$$

Очевидно, что вычисление ДПФ-П при $\theta = 3/4$ согласно соотношению (9) более предпочтительно, чем вычисление ДПФ-П при $\theta = 1/4$ согласно соотношению (8), так как при этом нет необходимости менять знак у мнимой части формируемой комплексной последовательности. Таким образом, благодаря соотношению (9) с учетом свойства (6), мы находим все $N/2$ значений искомого спектра (далее алгоритм 2).

Произведем оценку вычислительной эффективности представленных алгоритмов. В качестве критерия эффективности, аналогично работе [2], выберем относительную экономию вычислений при применении сравниваемых алгоритмов

$$\gamma = \frac{\text{число операций в алгоритме } A - \text{число операций в алгоритме } B}{\text{число операций в алгоритме } A}, \quad (10)$$

где: алгоритмы A и B – сравниваемые алгоритмы.

Под числом операций в формуле (10) в зависимости от применяемых (для реализации алгоритма) аппаратных решений, могут пониматься, как только выполняемые умножения, так и сумма выполняемых умножений и сложений. Последний случай имеет место в случае применения высокоскоростных специализированных умножителей, которые позволяют операцию умножения выполнять практически за то же время, что и сложения. Учитывая, что для получения ДПФ-П при $\theta = 1/2$ действительной последовательности длиной в N отсчетов мы выполняем одно $N/2$ – комплексное ДПФ-П при $\theta = 3/4$, на рис. 4 и рис.5 показана (в соответствии с соотношением (10)) относительная экономия вычислений в алгоритме 1 в сравнении с обычным комплексным БПФ и алгоритма 2, в сравнение с алгоритмом 1, соответственно.

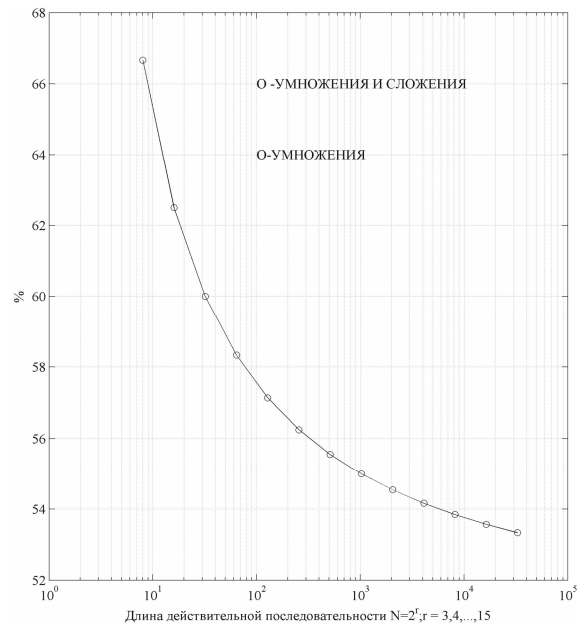
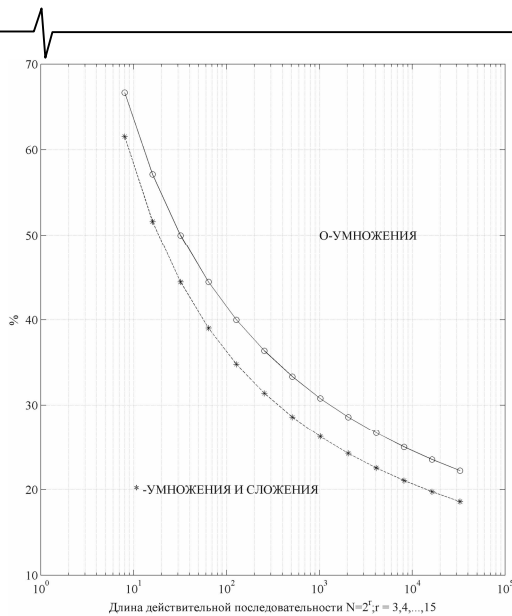


Рис. 4 Относительная экономия вычислений в %. Сравнение алгоритма 1 с комплексным БПФ-П



Длина действительной последовательности $N = 2^r$;
 $r = 3, 4, \dots, 15$

Рис. 5 Относительная экономия вычислений в %.
 Сравнение алгоритма 2 с алгоритмом 1.

На рис.4, в силу использования в сравниваемых алгоритмах комплексных алгоритмов БПФ и БПФ-П (разница между которыми в смысле числа операций только в размерности), кривые по числу только «умножений» и «умножений и сложений» совпадают.

В заключение остановимся кратко на вычислении коэффициентов ДПФ-П действительных последовательностей при значении параметра $\theta \neq 0, 1/2$. Исследования, проведенные автором настоящей статьи, выявили еще одно фундаментальное свойство ДПФ-П.

Спектр сигнала, полученный методом ДПФ-П, при значении параметра $\theta \neq 0, 1/2$ не обладает свойством комплексно-сопряженной симметрии. Другими словами, соотношение (6) в этом случае не соблюдается. Однако ДПФ-П действительных последовательностей при $\theta \neq 0, 1/2$ обладает одним очень важным свойством, которое автор назвал «перекрестной» комплексно-сопряженной симметрией:

$$S_N(k, \theta) = S_N^*(N - 1 - k, 1 - \theta); \theta \neq 0, 1/2, \\ k = \overline{0, N/2 - 1} \tag{11}$$

$$S_N(k, 1 - \theta) = S_N^*(N - 1 - k, \theta); \theta \neq 0, 1/2, \\ k = \overline{0, N/2 - 1} \tag{12}$$

На рис. 6 для некоторой случайной последовательности в 8 отсчетов проиллюстрировано это фундаментальное свойство ДПФ-П:

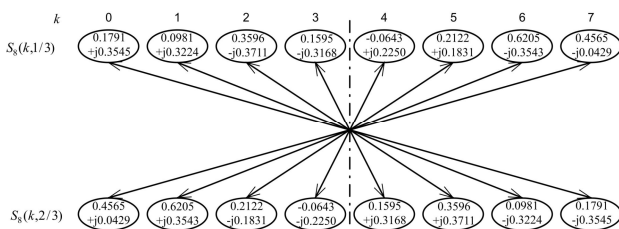


Рис. 6 «Перекрестная» комплексно-сопряженная симметрия ДПФ-П

Воспользовавшись соотношениями (11) и (12), несложно установить, что выполнение ДПФ-П действительной при $\theta \neq 0, 1/2$ позволяет сразу получить два спектра: при значениях параметра θ и $(1 - \theta)$. При этом относительная экономия в вычислениях в рамках данного подхода будет полностью совпадать с кривой, приведенной на рис. 4.

Заключение

Предложенные в статье алгоритмы быстрого параметрического дискретного преобразования Фурье позволяют, с одной стороны, существенно сократить время вычислений и требуемый объем памяти при спектральном анализе как детерминированных, так и случайных действительных сигналов, с другой – расширить возможности решения практических задач цифровой обработки сигналов в различных областях научных исследований. Например: локализации спектральных пиков, выявления скрытых периодичностей, виброакустической диагностике машин и механизмов.

Литература

1. Рабинер Л., Голд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.:Мир, 1978г.
2. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание. Пер. с англ. - М.: ООО «Бином-Пресс», 2007г.-656 с.
3. Богнер Р., Константинодис А. Введение в цифровую фильтрацию: Пер. с англ.- М.:Мир, 1976г.-216с.
4. Пономарев В.А. Стохастические свойства параметрического дискретного преобразования Фурье // Радиотехника и электроника// АН СССР.-1983-Т.28. - № 8.-Стр.1590-1595
5. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач интерполяции и свертки функций // Радиотехника и электроника. АН СССР.-1984.-Т.29.-№8.-Стр. 1561-1570.
6. Пономарева О.В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических дискретных экспоненциальных функций. М.: Цифровая обработка сигналов.-2010г.-№ 2.-7-12 с.

PARAMETRIC FAST DISCRETE FOURIER TRANSFORM REAL SEQUENCE

Ponomareva O.V.

The use of standard complex FFT-P in the $\theta = 1/2$ to the real sequences $x(n), n = \overline{0, N - 1}$ leads, on the one hand, to the calculation of $N/2$ points of the spectrum on the negative frequencies, which do not carry additional information about the spectrum of the signal $x(n)$ (excessive computational cost), on the other side - the required amount of memory is twice more than necessary (excess cost of memory). To eliminate these drawbacks proposed FFT algorithms-II real sequences, eliminating redundant costs, both in memory and in the amount of computation. We also consider the P-FFT algorithm for real sequences $\theta \neq 1/2$.