

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МОДУЛЯТОРА И ДЕМОДУЛЯТОРА С ЗАДАННЫМ ПОРЯДКОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Батенков К.А., Академия ФСО, г. Орел, e-mail: pustur@yandex.ru

Ключевые слова: ряды Вольтерра, математическая модель, нелинейная модуляция, демодуляция, базисные функции, оценка сложности.

Введение

Широкое использование в современных системах передачи информации цифровой обработки сигналов неуклонно увеличивает возможности подобных систем с точки зрения количества и качества передаваемой информации. При этом достаточно узким местом оказывается непосредственно процедура преобразования аналогового сигнала в цифровой и обратно, неизбежно приводящая к информационным потерям. Именно поэтому разработка преобразований, позволяющих минимизировать подобные негативные моменты, является достаточно обоснованной и насущной задачей. В этой связи следует отметить, что наиболее рациональный путь снижения потерь – это переход от линейных систем обработки сигналов к нелинейным, поскольку подобная трансформация, по сути, осуществляет обобщение линейных частных случаев отображений сигналов на более широкий класс преобразований, включающих как линейные, так и нелинейные эффекты.

В данной работе исследуются процедуры нелинейной модуляции и демодуляции, осуществляющие преобразование конечномерных сигналов в континуальную форму и обратно. Причем делается попытка рассмотреть подобные трансформации в общем виде, не прибегая к фиксации типа преобразований как каких-либо строгих функциональных зависимостей (например, экспоненциальных, степенных, гармонических и т.п.). В качестве основы подобных операций положены функциональные ряды Вольтерра, обладающие достаточно широкими возможностями как с позиции последующей реализации получаемых алгоритмов, так и с позиции удобства пользования математическим аппаратом.

Так, с одной стороны, существующая теория рядов Вольтерра позволяет достаточно полно описать возможные нелинейные эффекты, возникающие при преобразовании аналоговых сигналов в дискретную форму, что делает возможным аналитическое оценивание качества синтезируемых систем и устройств. С другой стороны, использование обобщенных рядов Фурье с заданным базисом (например, Котельникова) для разложения функциональных ядер Вольтерра приводит к реализуемости операций многопараметрической свертки на базе методов цифровой обработки сигналов, а значит, появляется возможность реализации процедур нелинейной модуляции и демодуляции на современных процессорах

Синтезированы математические модели модулятора и демодулятора с заданным порядком нелинейности на основе функционального ряда. Проведена оценка сложности процедур обработки сигналов на уровне количества используемых базисных функций.

обработки сигналов. Следует отметить, что в данном случае неизбежно появляется некоторая погрешность вследствие оперирования лишь с конечным числом коэффициентов разложения ряда Фурье. Тем не менее, зачастую подобные ошибки аппроксимации оказываются пренебрежимо малыми, а в пределе стремятся вообще к нулю, что также позволяет варьировать качество синтезируемых систем за счет усложнения выполняемых ими операций.

Таким образом, основной задачей данной статьи является разработка аналитической модели нелинейного модулятора и демодулятора в достаточно обобщенном виде (на базе функциональных рядов Вольтерра), позволяющей ограничивать порядок нелинейности операций модуляции и демодуляции, что в свою очередь делает возможным задавать порог вычислительной сложности подобных процедур. В результате, главным побудительным мотивом постановки задачи синтеза модулятора и демодулятора в данной формулировке оказывается попытка снизить потери передаваемой информации по каналу связи за счет усложнения используемых преобразований, то есть путем перехода от существующих линейных к новым нелинейным формам модулятора и демодулятора. В то же время следует учитывать неизбежный рост сложности реализации синтезируемых систем, что приведет к повышению требований к процессорам цифровой обработки сигналов как по производительности, так и по объему оперативной памяти. В связи с этим в работе аналитически оценивается сложность процедур обработки сигналов в зависимости от порядка нелинейности операторов модуляции и демодуляции, а также от размерности обрабатываемых сигналов. В итоге разработчики получают возможность предварительно, до непосредственной реализации алгоритмов, оценить требуемые вычислительные ресурсы для синтеза тех или иных модуляторов и демодуляторов и сопоставить с ресурсами доступных аппаратных средств.

Данные обстоятельства и обосновывают актуальность решения поставленной в работе задачи, поскольку с одной стороны в настоящее время сохраняется тенденция к увеличению количества и качества передаваемой информации, а с другой в доступной литературе нет изложения теории нелинейных преобразований применительно к задачам модуляции и демодуляции сигналов,

которые и позволяют значительно снизить потери информации в каналах связи.

Описание операторов нелинейной модуляции и демодуляции

Следует отметить, что в каноническом виде ряд Вольтерра определяет нелинейные преобразования между бесконечномерными пространствами, в то время как операции модуляции Φ и демодуляции Φ' задают отношения между конечномерными и бесконечномерными пространствами. Таким образом, необходимо несколько видоизменить ряды Вольтерра путем представления сигналов на соответствующих конечномерных концах в виде рядов из взвешенных дельта-функций, то есть сигналы на входе модулятора и выходе демодулятора можно записать в непрерывном виде, как следующие суммы:

$$x(t_j, \mathbf{r}_j) = \sum_{k_j=1}^N x_{k_j} \delta(k_j, t_j) \delta(t_j \mathbf{1}_{n_a} - \mathbf{r}_j), \quad j = \overline{1, \infty}, \quad (1)$$

$$x(t', \mathbf{r}') = \sum_{k_j=1}^{N'} x'_{k_j} \delta(k_j, t') \delta(t' \mathbf{1}_{n_b} - \mathbf{r}'), \quad (2)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$, $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_{N'})^T$ – вектора на входе и выходе дискретного канала связи (на входе модулятора и выходе демодулятора) размерности N и N' соответственно; $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака; $\mathbf{1}_n$ – единичный вектор размерности n ; n_a, n_b – число измерений пространства на входе и выходе непрерывного многопараметрического канала связи соответственно.

При этом в функциональном ряде ядра Вольтерра трактуются в смысле некоторых функций (базисных или несущих), то есть по сути являются системными характеристиками, но не канала, а модулятора и демодулятора и обозначаются $\varphi_i(t, \mathbf{r}, t_1, \dots, x_i, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i)$ и $\varphi'_i(t, \mathbf{r}, t_1, \dots, x_i, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i)$ соответственно. Подстановка непрерывного вида сигналов на входе модулятора (1) в ряд Вольтерра, а также учет нелинейности, не превышающей величины N_a (число членов ряда Вольтерра ограничено данным значением), и замена переменных делают возможным следующее представление:

$$\begin{aligned} x(t, \mathbf{r}) = & \\ = & \sum_{i=1}^{N_a} \int_{t_1} \dots \int_{t_i} \dots \int_{\mathbf{r}_1} \dots \int_{\mathbf{r}_i} \left\{ \prod_{j=1}^i \sum_{k_j=1}^N x_{k_j} \delta(k_j, t_j) \delta(t_j \mathbf{1}_{n_a} - \mathbf{r}_j) \right\} \times \\ & \times \varphi_i(t, \mathbf{r}, t_1, \dots, x_i, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_i) dt_1 \dots dt_i d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_i. \end{aligned} \quad (3)$$

Раскрытие произведения, перегруппировка слагаемых внутри него, а также использование фильтрующего свойства дельта-функции трансформируют операцию нелинейной модуляции к следующему виду:

$$\begin{aligned} x(t, \mathbf{r}) = & \sum_{i=1}^{N_a} \left[\sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N \dots \sum_{k_i=1}^N \left\{ \prod_{j=1}^i x_{k_j} \right\} \right] \times \\ & \times \varphi_i(t, \mathbf{r}, k_1, \dots, k_i, k_1 \mathbf{1}_{n_a}, \dots, k_i \mathbf{1}_{n_a}). \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда следует важное условие осуществимости нелинейной модуляции, выражающееся в обязательном превышении или по крайней мере равенстве размерно-

сти сигналов на входе модулятора N степени нелинейности модулятора N_a , то есть $N_a \leq N$. В обратном случае ($N_a > N$) произведения в фигурной скобке (4) не существуют, что означает идентичность операций модуляции с нелинейностью большей N_a операции модуляции с нелинейностью N_a .

Следует также заметить, что вследствие свойства коммутативности операции умножения (то есть $\prod_{j=1}^i x_{k_j} = \prod_{j'=1}^i x_{k'_j}$, даже при условии, что $\exists k_j \neq k'_j$) число суммируемых базисных функций можно существенно сократить. Количество одинаковых произведений соответствует числу перестановок упорядоченного множества индексов сигнала на входе модулятора $\{k_j\}$, $j = \overline{1, i}$, $k_j = k'_j | j < j', j' = \overline{1, i}$, а само данное множество перестановок целесообразно обозначить как P_i , каждый элемент которого $P_{i,p} = \{k_{j_p}\}$ представляет собой уникальную перестановку исходного упорядоченного множества. Следовательно, базисные функции модуляции являются функциями только временных и пространственных выходных координат, так как входные координаты дискретны и имеют следующий вид:

$$\varphi_{k_1, \dots, k_i}(t, \mathbf{r}) = \sum_{\{k_{j_p}\} \in P_i} \varphi_i(t, \mathbf{r}, k_{i_1} \mathbf{1}_{n_a}, \dots, k_{i_i} \mathbf{1}_{n_a}),$$

$$j_p = \overline{1, i}, \quad p = \overline{1, i!}, \quad i = \overline{1, N_a}, \quad (5)$$

где число элементов множества перестановок P_i равно числу всех возможных перестановок, то есть $i!$ [1]. Перегруппировка слагаемых в (4) и использование (5) приводят к формуле нелинейной модуляции в виде

$$x(t, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{N_a} \left[\sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=1}^N \dots \sum_{k_i=1}^N \left\{ \prod_{j=1}^i x_{k_j} \right\} \varphi_{k_1, \dots, k_i}(t, \mathbf{r}) \right]. \quad (6)$$

Следует отметить, что по сравнению с (4) выражение (6) содержит значительно меньшее количество слагаемых, что бесспорно упрощает процедуру реализации нелинейной модуляции. При этом число элементов сумм соответствует количеству базисных функций модуляции N_Φ . Так, каждая сумма по k_j в (4) содержит N элементов:

$$N'_{\Sigma_{k_j}} = N, \quad j = \overline{1, i}. \quad (7)$$

В результате все суммы по k_j имеют N^i членов, как число размещений с повторениями

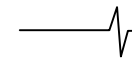
$$N'_{\Sigma_{k_i}} = N^i. \quad (8)$$

Тогда количество слагаемых в сумме по i , соответствующее числу базисных функций модуляции N'_Φ , вычисляется как сумма геометрической прогрессии N_a элементов со знаменателем и первым членом равными N , то есть

$$N'_\Phi = \sum_{i=1}^{N_a} N \cdot N^{i-1} = \frac{N(N^{N_a} - 1)}{N - 1}. \quad (9)$$

В то время как в (6) крайняя правая сумма по k_i имеет только

$$N'_{\Sigma_{k_i}} = k_{i-1} + 1 = C_{k_{i-1}+1}^1 \quad (10)$$



элементов, как число сочетаний без повторов

$$C_b^a = \frac{b!}{a!(a-b)!}, \quad a \leq b, \quad a, b = \overline{0, \infty} \quad [1], \quad \text{по } k_{i-1}:$$

$$N_{\Sigma k_{i-1}} = \sum_{k_{i-1}=0}^{k_{i-2}} C_{k_{i-1}+1}^1 = C_{k_{i-2}+2}^2 \quad (11)$$

членов, в соответствии с формулой для сумм биномиальных коэффициентов [2]. Следовательно, по индукции сумма по k_1 содержит

$$N_{\Sigma k_1} = \sum_{k_1=0}^{N-1} C_{k_1+i-1}^{i-1} = C_{N+i-1}^i \quad (12)$$

слагаемых. В итоге количество элементов в сумме по i вычисляется как число сочетаний из N_a+N по N

$$N_\varphi = \sum_{i=1}^{N_a} C_{N+i-1}^i = C_{N_a+N}^N \quad (13)$$

Таким образом, в (4) количество элементов сумм (9) показательно зависит от степени нелинейности модулятора N_a и полиномиально (с показателем степени N_a) от размерности входного сигнала N , то есть

$$N'_\varphi \approx N^{N_a}, \quad N \gg 1. \quad (14)$$

В (6) зависимости числа слагаемых подобны, однако величина масштабирующего коэффициента отлична от единицы и зависит от степени нелинейности модулятора N_a . Так, использование приближенной формулы Стирлинга [1] и сокращение подобных множителей преобразуют выражение для числа слагаемых (13) в (6) к виду

$$N_\varphi \approx \frac{(N_a + N)^{N_a+N+1/2}}{N_a^{N_a+1/2} N^{N_a+1/2} \sqrt{2\pi}} \dots \quad (15)$$

Деление числителя и знаменателя на $N^{N_a+N+1/2}$, внесение обратной величины в выражение внутри скобки, сокращение и применение свойства произведения показательных функций с одинаковыми основаниями трансформируют данное выражение в следующую форму:

$$N_\varphi \approx \frac{(N_a/N + 1)^{N_a+1/2} (N_a/N + 1)^N N^{N_a}}{N_a^{N_a+1/2} \sqrt{2\pi}} \quad (16)$$

Применение следствия второго замечательного предела при $N \gg 1$, а также приближенное равенство единице первого выражения в скобке, так как $N_a/N \rightarrow 0$, приводит к асимптотическому равенству

$$N_\varphi \approx \frac{e^{N_a}}{\sqrt{2\pi} N_a^{N_a+1/2}}, \quad N \gg 1, \quad (17)$$

которое доказывает полиномиальную зависимость числа базисных функций модулятора N_φ от достаточно больших размерностей сигналов на входе модулятора N с показателем степени, соответствующим степени нелинейности N_a , и масштабирующим множителем

$$\frac{e^{N_a}}{\sqrt{2\pi} N_a^{N_a+1/2}}$$

меньшим единицы при $N_a > 1$ и умень-

шающимся по мере роста N_a , что свидетельствует о значительном сокращении числа базисных функций моду-

ляции, определяемых выражением (6) по сравнению с (4). Для примера на рис. 1 представлены полученные на основе (9), (13) и (17) зависимости количества базисных функций модуляции N_φ от размерности сигналов на входе модулятора N при различных степенях нелинейности N_a . Данные графики подтверждают достаточно высокую точность приближения при $N \gg 1$, а также снижение числа слагаемых, определяемое масштабирующим коэффициентом в (17).

При исследовании поведения числа элементов в суммах (4) и (6) при увеличении степени нелинейности модулятора N_a следует учитывать условие осуществимости подобного типа модуляции, то есть неравенство $N_a \leq N$. В результате при больших степенях нелинейности N_a они становятся сопоставимы с размерностями сигналов N , что выражается в форме $N_a \approx N$, $N \gg 1$. Таким образом (9) преобразуется к виду

$$N_{\Sigma_i} \approx N_a^{N_a} = 2N_a, \quad N_a \approx N, \quad (18)$$

известному как степенная башня порядка два, или тетрация $2N_a$. Количество базисных функций модуляции определяется на основе (15) при условии $N_a \approx N$. В результате после сокращения подобных множителей данное выражение приводится к форме

$$N_\varphi \approx \frac{4^{N_a}}{\sqrt{\pi} N_{N_a}}, \quad N_a \approx N. \quad (19)$$

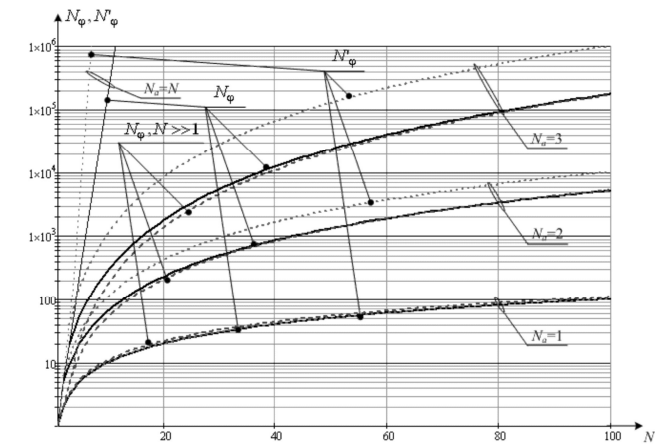


Рис. 1. Зависимости количества базисных функций модуляции N_φ от размерности сигналов на входе модулятора N при различных степенях нелинейности N_a

Таким образом, согласно (19), число базисных функций модуляции растет даже медленнее, чем по показательному закону, в то время как в соответствии с (18) увеличение числа слагаемых подчиняется гипероператорному закону с высотой два, значительно превосходящему показательный по скорости нарастания функции. Для примера на рис. 2 представлены полученные на основе (9), (13) и (19) зависимости числа базисных функций модуляции N_φ от степени нелинейности N_a при различных размерностях сигналов на входе модулятора N . Данные графики подтверждают достаточно высокую точность приближения при $N_a \approx N$, а также значительное снижение числа слагаемых, определяемое различием

между ростом тетрации $2N_a$ и полиномиально-показательной функции (19).

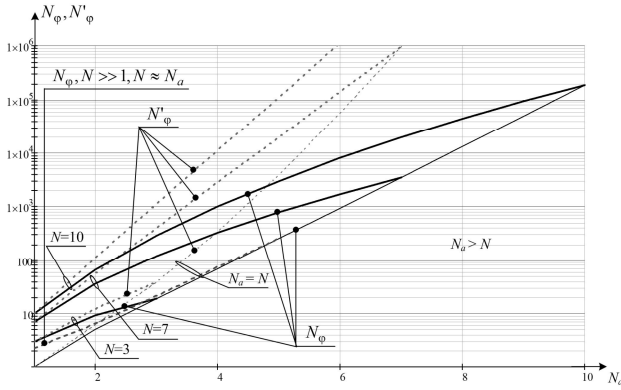


Рис. 2. Зависимости числа базисных функций модуляции N_ϕ от степени нелинейности N_a

при различных размерностях сигналов на входе модулятора N

Следует также отметить, что, по сути, определенное число базисных функций модуляции N_ϕ в операторе (13) задает максимально возможное их количество, поскольку в общем случае возможно использование меньшего числа членов ряда (6), вплоть до одного. Именно поэтому формулы (13), (17) и (19) позволяют вычислять верхние границы сложности нелинейной модуляции, причем последние две используют достаточно простые степенные зависимости в отличие от первой, требующей вычисления факториалов, что не всегда оказывается возможным. Данное обстоятельство оказывается в ряде случаев довольно критичным при реализации алгоритмов модуляции программно-аппаратными средствами.

Для описания оператора нелинейной модуляции Φ' также следует использовать непрерывный вид сигналов, но на выходе демодулятора (2). Его подстановка в ряд Вольтерра, учет нелинейности, не превышающей величины N_b (число членов ряда Вольтерра ограничено данным значением), и замена переменных, делают возможным следующее представление:

$$\sum_{k=1}^{N'} x'_k \delta(k-t') \delta(t' \mathbf{1}_{n_b} - \mathbf{r}') = \sum_{i=1}^{N_b} \int \dots \int \dots \int \left\{ \prod_{j=1}^i x'(t'_j, \mathbf{r}'_j) \right\} \times \varphi'_i(t', \mathbf{r}', t'_1, \dots, t'_i, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_i) \times dt'_1 \dots dt'_i \dots dt'_i d\mathbf{r}'_1 \dots d\mathbf{r}'_i. \quad (20)$$

Использование свойства дельта-функции (отличия от нуля только в случае равенства нулю аргумента) позволяет представить выражение для координат сигнала на выходе демодулятора в виде

$$x'_k = \sum_{i=1}^{N_b} \int \dots \int \dots \int \left\{ \prod_{j=1}^i x'(t'_j, \mathbf{r}'_j) \right\} \times \varphi'_i(k, k \mathbf{1}_{n_b}, t'_1, \dots, t'_i, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_i) \times dt'_1 \dots dt'_i \dots dt'_i d\mathbf{r}'_1 \dots d\mathbf{r}'_i, \quad k = \overline{1, N'} \quad (21)$$

Естественно, что в отличие от модулятора соотношения между размерностью выходного сигнала N' и степенью нелинейности демодулятора N_b оказываются

произвольными. Следует также заметить, что равенства между размерностями сигналов на входе модулятора N и выходе демодулятора N' , а также между степенями нелинейности модулятора N_a и демодулятора N_b также являются не обязательными, то есть в общем случае $N \neq N'$ и $N_a \neq N_b$. Следовательно, единственным ограничением на данные величины остается условие осуществимости нелинейной модуляции ($N_a \leq N$).

Таким образом, базисные функции демодуляции являются функциями временных и пространственных входных координат, так как выходные координаты дискретны, и подобные функции имеют следующий вид:

$$\varphi'_{i,k}(t'_1, \dots, t'_i, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_i) = \varphi'_i(k, k \mathbf{1}_{n_b}, t'_1, \dots, t'_i, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_i), \quad i = \overline{1, N_a}, \quad k = \overline{1, N'}. \quad (22)$$

На основе этого выражения операция нелинейной демодуляции преобразуется к форме

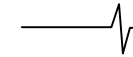
$$x'_k = \sum_{i=1}^{N_b} \int \dots \int \dots \int \left\{ \prod_{j=1}^i x'(t'_j, \mathbf{r}'_j) \right\} \times \varphi'_{i,k}(t'_1, \dots, t'_i, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_i) \times dt'_1 \dots dt'_i \dots dt'_i d\mathbf{r}'_1 \dots d\mathbf{r}'_i, \quad k = \overline{1, N'} \quad (23)$$

В результате число базисных функций демодуляции (аналог количества базисных функций модуляции N_ϕ) определяется как произведение размерности сигналов на выходе демодулятора N' на степень его нелинейности N_b :

$$N_{\phi'} = N' N_b. \quad (24)$$

Несмотря на их малое по сравнению с базисными функциями модуляции количество, имеющее линейную зависимость как от размерности сигналов на выходе демодулятора, так и от степени его нелинейности, сложности операций нелинейной модуляции и демодуляции оказываются сопоставимыми. В первую очередь данное обстоятельство обусловлено увеличенным количеством переменных в функциях демодуляции порядка нелинейности большего двух по сравнению с модуляционными.

Снижение числа базисных функций демодуляции вполне возможно, также вплоть до одной, поэтому (24) определяет верхнюю границу их количества. Однако в этом случае, подобно ситуации с нелинейным модулятором, сужается класс исследуемых операторов демодуляции. В то же время снижение сложности демодуляции допустимо на основе учета свойств входящих в оператор функционалов. Так, все данные функционалы являются $\{i(n'+1)\}$ – линейными, поскольку по каждой из пространственных или временной координатам они являются линейными [3]. Кроме того, подобные функционалы оказываются также и однородными со степенью i по каждой из координат при фиксированных остальных, что предполагает возможность их представления с симметричными ядрами в рамках определенных координат [3]. В результате, функционалы рассматриваются как регулярные однородные, в которых регулярность следует трактовать как симметричность базисных функций $\varphi'_{i,k}(t'_1, \dots, t'_i, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_i)$ относительно переменных



t'_1, \dots, t'_i , описывающих временную координату, при всех $\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_i$, описывающих пространственные координаты, а также относительно переменных $r'_{j,1}, \dots, r'_{j,i}$, $j = \overline{1, n'}$, описывающих j -ю пространственную координату, при фиксированных t'_1, \dots, t'_i , $r'_{j,1}, \dots, r'_{j,i}$, $j \neq j'$, $j' = \overline{1, n'}$, $\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_i$, описывающих временную и остальные пространственные координаты. Таким образом, сам оператор нелинейной демодуляции (23) образует функциональный полином степени N_b при нулевых начальных условиях [3]. Использование же свойства симметричности базисных функций демодуляции позволяет определять их вид только для части области определения, граница которой задается осью симметрии – $t'_1 \leq t'_2 \leq \dots \leq t'_i$, $\mathbf{r}'_1 \leq \mathbf{r}'_2 \leq \dots \leq \mathbf{r}'_i$. Естественно, что вследствие однородности функционалов в (23) возможна произвольная нумерация как пространственных, так и временных переменных. Для оставшейся области определения значения базисных функций демодуляции вычисляются из условия симметрии

$$\varphi'_{i,k}(P'_{i,p}) = \varphi'_{i,k}(P'_{i,p'}), \quad p, p' = \overline{1, i!}, \quad (25)$$

где $P'_{i,p} = \{t'_{j_p}, \mathbf{r}'_{j_p}\}$ – представляет собой уникальную перестановку исходного упорядоченного множества временных и пространственных переменных $\{t'_{j_p}, \mathbf{r}'_{j_p}\}$, $j = \overline{1, i!}$.

Структурные схемы нелинейных модулятора и демодулятора

Для представления структурной схемы дискретного канала связи, включающего нелинейные модулятор и демодулятор необходимо несколько видоизменить операторы нелинейных модуляции (6) и демодуляции (23). Так, оператор модуляции целесообразно рассматривать не как множество сумм произведений координат входных сигналов x_k , $k = \overline{1, N}$, на базисные функции модуляции $\varphi_{k_1, \dots, k_i}(t, \mathbf{r})$, $i = \overline{1, Na}$, $k_j = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, i}$, $k_j < k_{j'}, |j < j'|$, $j' = \overline{1, i!}$, а как всего одну сумму произведений вектора различных упорядоченных произведений координат входных сигналов и вектор-функции упорядоченных базисных функций.

Первоначально следует рассмотреть случай линейной модуляции ($i = 1$), для которого в операторе модуляции (6) сохраняется всего лишь одна сумма, достаточно просто представляемая в матричном виде

$$\sum_{k_1=1}^N x_{k_1} \varphi_{k_1}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{x}_1^T \Phi_1(t, \mathbf{r}), \quad (26)$$

где $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$ – вектор сигнала на входе дискретного канала связи (на входе модулятора) размерности N ; $\Phi_1(t, \mathbf{r}) = [\varphi_1(t, \mathbf{r}), \varphi_2(t, \mathbf{r}), \dots, \varphi_N(t, \mathbf{r})]^T$ – вектор базисных функций модуляции первого порядка.

Операцию модуляции исключительно второго поряд-

ка ($i = 2$) целесообразно представить в форме рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=1}^N x_{k_1} \sum_{k_2=k_1}^N x_{k_2} \varphi_{k, k_2}(t, \mathbf{r}) &= \\ &= \sum_{k_1=1}^N x_{k_1} \mathbf{x}_{1, k_1}^T \Phi_{2, k_1}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{x}_{1, k_1}^T \Phi_2(t, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (27)$$

где $\mathbf{x}_{1, k} = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_N)^T$, $k = \overline{1, N}$, – усеченный вектор сигнала на входе модулятора размерности $N-k+1$ (очевидно, что $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{1,1} = \mathbf{x}$, а $\mathbf{x}_{1, N} = x_N$); $\mathbf{x}_2 = (x_1, \mathbf{x}_{1,1}^T x_{2,2}, \dots, x_N \mathbf{x}_{1, N}^T)^T$ – вектор произведений второго порядка сигнала на входе модулятора размерности C_{N+1}^2 , согласно (12);

$\Phi_{2, k}(t, \mathbf{r}) = [\varphi_{k, k}(t, \mathbf{r}), \varphi_{k, k+1}(t, \mathbf{r}), \dots, \varphi_{k, N}(t, \mathbf{r})]^T$ – усеченный вектор базисных функций модуляции второго порядка (очевидно, что $\Phi_{2, N}(t, \mathbf{r}) = \varphi_{N, N}(t, \mathbf{r})$); $\Phi_2(t, \mathbf{r}) = [\Phi_{2,1}^T(t, \mathbf{r}), \Phi_{2,2}^T(t, \mathbf{r}), \dots, \Phi_{2, N}^T(t, \mathbf{r})]^T$ – вектор базисных функций модуляции второго порядка.

Операция модуляции исключительно третьего порядка ($i = 3$) также представима в форме рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=k_1}^N \sum_{k_3=k_2}^N \left\{ \prod_{j=1}^3 x_{k_j} \right\} \varphi_{k_1, k_2, k_3}(t, \mathbf{r}) &= \\ &= \sum_{k_1=1}^N x_{k_1} \sum_{k_2=k_1}^N x_{k_2} \mathbf{x}_{1, k_2}^T \Phi_{3, k_1, k_2}(t, \mathbf{r}) = \\ &= \sum_{k_1=1}^N x_{k_1} \mathbf{x}_{2, k_1}^T \Phi_{3, k_1}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{x}_3^T \Phi_3(t, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (28)$$

где $\mathbf{x}_{2, k} = (x_k, \mathbf{x}_{1, k}^T, x_{k+1} \mathbf{x}_{1, k+1}^T, \dots, x_N \mathbf{x}_{1, N}^T)^T$, $k = \overline{1, N}$, – усеченный вектор произведений второго порядка сигнала на входе модулятора; $\mathbf{x}_3 = (x_1, \mathbf{x}_{2,1}^T, x_2 \mathbf{x}_{2,2}^T, \dots, x_N \mathbf{x}_{2, N}^T)^T$ – вектор произведений третьего порядка сигнала на входе модулятора размерности C_{N+2}^3 , согласно (12);

$\Phi_{3, k_1, k_2}(t, \mathbf{r}) = [\varphi_{k_1, k_2, k_2}(t, \mathbf{r}), \varphi_{k_1, k_2, k_2+1}(t, \mathbf{r}), \dots, \varphi_{k_1, k_2, N}(t, \mathbf{r})]^T$ – усеченный по третьему индексу вектор базисных функций модуляции третьего порядка; $\Phi_{3, k_1}(t, \mathbf{r}) = [\Phi_{3, k_1, k_1}^T(t, \mathbf{r}), \Phi_{3, k_1, k_1+1}^T(t, \mathbf{r}), \dots, \Phi_{3, k_1, N}^T(t, \mathbf{r})]^T$ – усеченный по второму индексу вектор базисных функций модуляции третьего порядка; $\Phi_3(t, \mathbf{r}) = [\Phi_{3,1}^T(t, \mathbf{r}), \Phi_{3,2}^T(t, \mathbf{r}), \dots, \Phi_{3, N}^T(t, \mathbf{r})]^T$ – вектор базисных функций модуляции третьего порядка.

Далее по индукции операция модуляции исключительно i -го порядка имеет рекуррентный вид

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=1}^N \sum_{k_2=k_1}^N \dots \sum_{k_i=k_{i-1}}^N \left\{ \prod_{j=1}^i x_{k_j} \right\} \varphi_{k_1, \dots, k_i}(t, \mathbf{r}) &= \mathbf{x}_i^T \Phi_i(t, \mathbf{r}), \\ i = \overline{1, Na}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\mathbf{x}_i = (x_1 \mathbf{x}_{i-1}^T, x_2 \mathbf{x}_{i-1}^T, \dots, x_N \mathbf{x}_{i-1}^T)^T$ – вектор произведений i -го порядка входных сигналов, каждый элемент которого является произведением упорядоченных по возрастанию координат входного сигнала, размерность данного вектора определяется на основе (12); $\Phi_i(t, \mathbf{r}) = [\Phi_{i,1}^T(t, \mathbf{r}), \Phi_{i,2}^T(t, \mathbf{r}), \dots, \Phi_{i,N}^T(t, \mathbf{r})]^T$ – вектор базисных функций модуляции i -го порядка.

Таким образом, оператор нелинейной модуляции порядка N_a (6) представим в виде суммы операций модуляции меньших порядков (26)–(29):

$$x(t, \mathbf{r}) \sum_{i=1}^{N_a} \mathbf{x}_i^T \Phi_i(t, \mathbf{r}). \quad (30)$$

Следовательно, структурную схему модулятора целесообразно представить в виде блоков, каждый из которых выполняет исключительно операции модуляции некоторого порядка. Между же блоками модуляции следует разместить устройства коммутации, формирующие вектор произведений соответствующего порядка сигнала на входе модулятора. В результате структурная схема нелинейного модулятора имеет вид, изображенный на рис 3.

Оператор демодуляции также следует разбивать на составляющие, выполняющие операции демодуляции определенного порядка. Так, операция демодуляции первого порядка на основе свойства линейности операций интегрирования и суммирования представима в виде

$$x'_k = \int \int_{t'_1 \mathbf{r}'_1} x'(t'_1, \mathbf{r}'_1) \{ \varphi'_{1,k}(t'_1, \mathbf{r}'_1) + x'_k(t'_1, \mathbf{r}'_1) \} dt'_1 d\mathbf{r}'_1, \quad (31)$$

$k_j = \overline{1, N'}$

где $x'_k(t'_1, \mathbf{r}'_1) = \sum_{i=2}^{N_b} \int \dots \int \dots \int \left\{ \prod_{j=2}^i x'(t'_j, \mathbf{r}'_j) \right\} \times \varphi'_{1,k}(t'_1, \dots, t'_i, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_i) dt'_2, \dots, dt'_i d\mathbf{r}'_2, \dots, d\mathbf{r}'_i$ – сигнал на выходе блока демодуляции второго порядка.

Операция демодуляции второго порядка имеет подобную рекуррентную форму

$$x'_k(t'_1, \mathbf{r}'_1) = \int \int_{t'_2 \mathbf{r}'_2} x'(t'_2, \mathbf{r}'_2) \{ \varphi'_{2,k}(t'_1, t'_2, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) + x'_k(t'_1, t'_2, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) \} dt'_2 d\mathbf{r}'_2 \quad (32)$$

где $x'_k(t'_1, \mathbf{r}'_1) = \sum_{i=3}^{N_b} \int \dots \int \dots \int \left\{ \prod_{j=3}^i x'(t'_j, \mathbf{r}'_j) \right\} \times \varphi'_{1,k}(t'_1, \dots, t'_i, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_i) dt'_3, \dots, dt'_i d\mathbf{r}'_3, \dots, d\mathbf{r}'_i$ – сигнал на выходе блока демодуляции третьего порядка.

По индукции операция демодуляции m -го порядка представима в рекуррентном виде

$$x'_k(t'_1, \dots, t'_{m-1}, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_{m-1}) = \int \int_{t'_m \mathbf{r}'_m} x'(t'_m, \mathbf{r}'_m) \times \{ \varphi'_{m,k}(t'_1, \dots, t'_m, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_m) + x'_k(t'_1, \dots, t'_m, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_m) \}, \quad m = \overline{1, N_b}, \quad (33)$$

где $x'_k(t'_1, \dots, t'_m, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_m) = \sum_{i=m+1}^{N_b} \int \dots \int \dots \int \left\{ \prod_{j=m+1}^i x'(t'_j, \mathbf{r}'_j) \right\} \times \varphi'_{i,k}(t'_1, \dots, t'_i, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_i) dt'_{m+1} \dots dt'_i d\mathbf{r}'_{m+1} \dots d\mathbf{r}'_i$ – сигнал на выходе блока демодуляции m -го порядка.

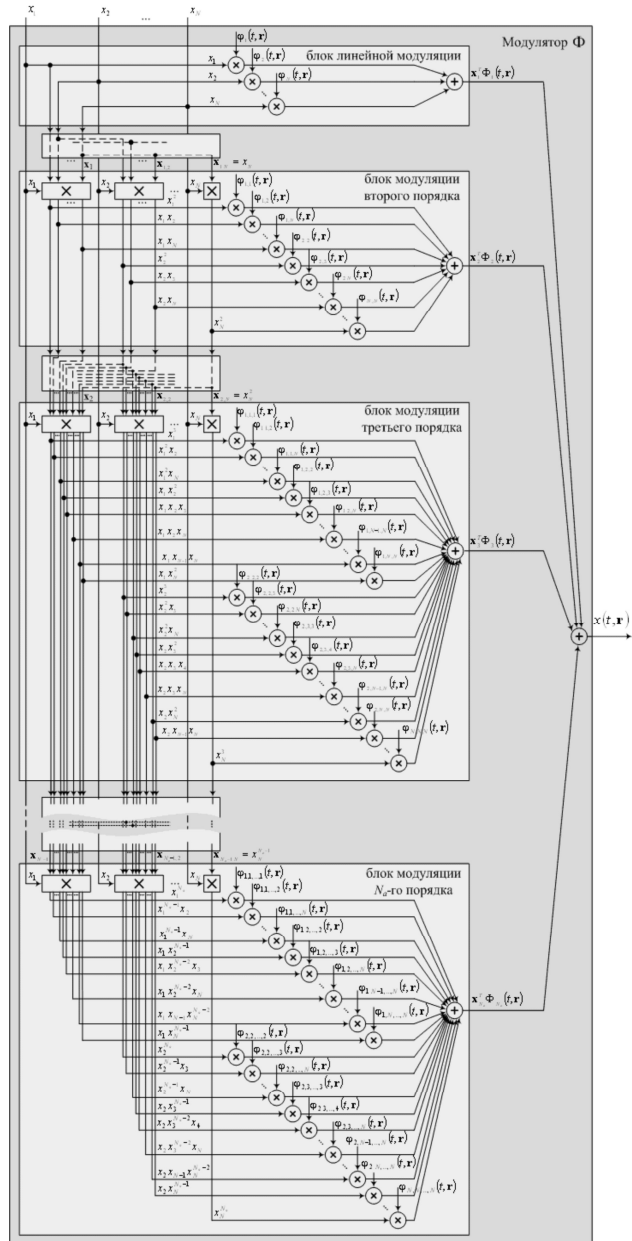


Рис. 3. Структурная схема нелинейного модулятора

Также, по индукции, операция демодуляции N_b -го порядка задается в форме интеграла произведения входного сигнала и базисной функции демодуляции N_b -го порядка

$$\begin{aligned}
 & x'_k(t'_1, \dots, t'_{N_b-1}, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_{N_b-1}) = \\
 & = \int \int_{t'_{N_b}, \mathbf{r}'_{N_b}} x'(t'_{N_b}, \mathbf{r}'_{N_b}) \times \\
 & \varphi'_{N_b, k}(t'_1, \dots, t'_{N_b}, \mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_{N_b}) dt'_{N_b} d\mathbf{r}'_{N_b}
 \end{aligned} \quad (34)$$

Таким образом, структурную схему нелинейного демодулятора целесообразно рассматривать как соединение блоков демодуляции определенного порядка, каждый выход которых является входом блоков меньшего на единицу порядка нелинейности. В результате структурная схема нелинейного демодулятора принимает вид, изображенный на рис. 4.

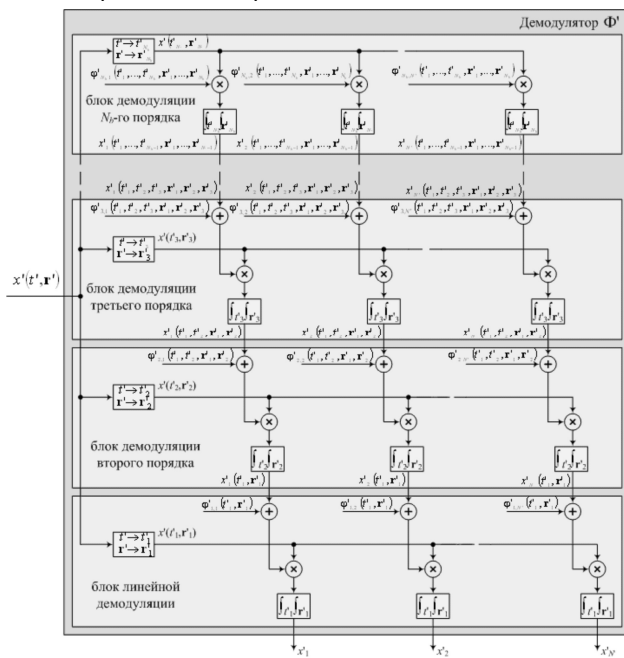


Рис. 4. Структурная схема нелинейного демодулятора

Аналитическое моделирование нелинейных схем обработки сигналов

В качестве примера и для демонстрации технического эффекта от введения нелинейных схем обработки сигналов в ходе исследований было проведено аналитическое моделирование (с использованием программной среды MathCad) модулятора и демодулятора с нелинейностями второго порядка ($N_a = N_b = 2$) двумерных сигналов ($N = N' = 2$), применительно к каналу с аддитивным белым гауссовским шумом. В качестве критерия оптимального синтеза системы обработки был использован минимум среднеквадратического отклонения передаваемого сигнала на входе модулятора относительно принятого на выходе демодулятора σ^2 [3]. Разложение базисных функций модуляции и демодуляции (ядер Вольтерра) осуществлялось в ряд Котельникова. Рассматривалось три центрированных источника (двумерные распределения на входе модулятора) – равномерно распределенное трехточечное созвездие (несимметричное относительно осей координат), равномерно распределенное четырехточечное созвездие (соответствующее сигналам четырехточечной квадратурной амплитудной модуляции – КАМ-4) и гауссовский источник. Результаты аналитического моделирования представлены на рис. 5.

В случае равномерно распределенного трехточечного созвездия (рис. 5,а) применение нелинейной демодуляции оказывается достаточным для получения выигрыша относительной линейной схемы обработки порядка 13 дБ. Добавление нелинейного модулятора дополнительно повышает энергетический эффект на 0,5 дБ. Для созвездия же КАМ-4 ситуация несколько иная – только совместное использование нелинейного модулятора и демодулятора приводит к снижению энергетических затрат, также примерно на 13,5 дБ (рис. 5, б). Подобное различие вызвано тем, что все моменты нечетного порядка у сигналов КАМ-4 равны нулю, в то время как у равномерно распределенного трехточечного созвездия данные моменты отличны от нуля. В результате, нелинейный демодулятор даже с линейным модулятором может использовать дополнительную информацию о высших порядках распределения, а соответственно и снижать ошибку оценки.

У гауссовского распределения нечетные моменты также равны нулю, однако в отличие от сигналов КАМ-4, значения четных моментов таковы, что не позволяют осуществить коррекцию среднеквадратического отклонения при введении нелинейного демодулятора (рис. 5, в). Следует отметить, что применение нелинейного модулятора совместно с линейным демодулятором не приводит к энергетическому выигрышу, поскольку в данном случае демодулятор способен обрабатывать лишь информацию о максимально вторых моментах распределений, а нелинейный модулятор добавляет информацию о более высоких моментах, перераспределяя часть энергии с линейного преобразователя.

В результате, применение нелинейных модулятора и демодулятора позволяет снизить энергетические затраты, в случае равномерно распределенного трехточечного созвездия и созвездия КАМ-4, на величину порядка 13,5 дБ по сравнению с линейными системами обработки. В случае же гауссовского источника подобное повышение энергетического эффекта не представляется возможным, что согласуется с результатами нелинейной фильтрации [3].

Заключение

Таким образом, в наиболее обобщенном структурированном виде уравнения (6) и (23), являющиеся, по сути, операторами нелинейной модуляции Φ и демодуляции Φ' соответственно, задают дискретное отображение непрерывного многопараметрического канала связи. Выражения же (30) и (31)-(34) делают возможным представление данных операций в виде структурных схем, реализующих последовательно процедуры модуляции и демодуляции от низкого порядка нелинейности к более высокому. Следует подчеркнуть еще одно немаловажное достоинство именно структурного типа дискретного отображения. Так, в наиболее общем виде подобное отображение предполагает учет нелинейности произвольно большой степени, вплоть до бесконечной. В результате и реализация и синтез оптимальных операций как модуляции, так и демодуляции оказываются весьма затруднительными, за исключением случаев определенной заданной формы используемых базисных функций.

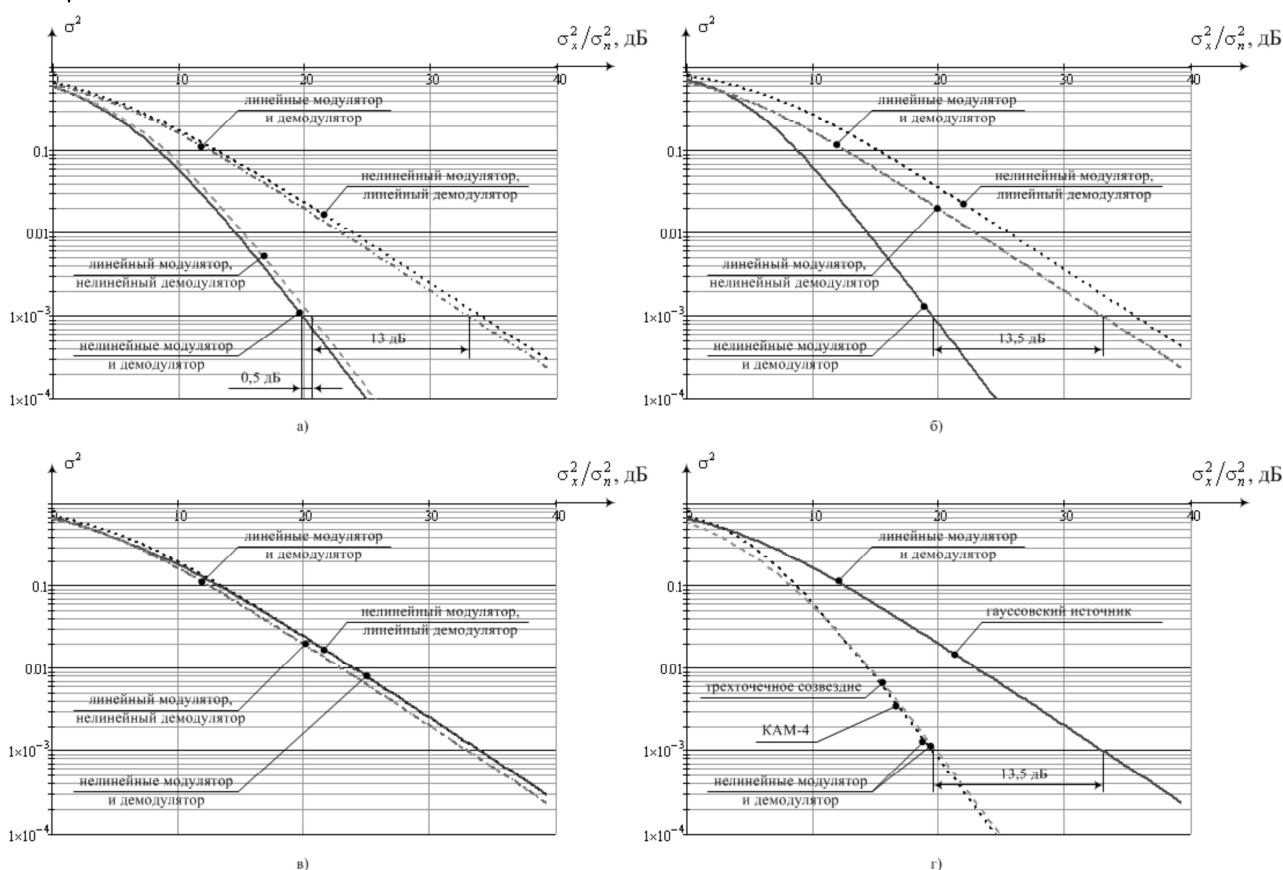


Рис. 5. Зависимости минимума среднеквадратического отклонения передаваемого сигнала на входе модулятора относительно принятого на выходе демодулятора σ^2 от отношения сигнал–шум σ_x^2/σ_n^2 в канале связи с аддитивным белым гауссовским шумом для различных источников: а) равномерно распределенное трехточечное созвездие; б) КАМ-4; в) гауссовский источник; г) оптимальные системы обработки для всех видов источников

Однако в данное обстоятельство является достаточно сильным ограничением, поскольку способно существенно сократить класс операторов отображения. Представление же операций в параметризованном виде (6) и (23) делает возможным как выбор заданного числа базисных функций в рамках определенного порядка нелинейности, так и введение ограничения на максимальную нелинейность оператора дискретного отображения. В итоге, решение задач синтеза оптимальных модулятора и демодулятора возможно как в общем виде (при устремлении степени нелинейности к бесконечности), что должно быть подобно оптимальным нелинейным системам, как правило трудно реализуемым на практике, так и при достаточно произвольных ограничениях на число и порядок нелинейности базисных функций, что приводит к сравнительно простым реализациям вышеописанных процедур.

Литература

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., исправленное. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1986. – 544 с.

2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1963. – 1 100 с.

3. Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. – М.: Наука, 1976. – 448 с.

4. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. – М.: Советское радио, 1977. – 432 с.

5. Репин В.Г., Тартаковский Г.П., Слепокуров А.А. Проверка многоальтернативных гипотез в условиях априорной неопределенности // Проблемы передачи информации. 1991. Т. 27. Вып. 3. С. 39–56.

MATHEMATICAL MODELS OF MODULATOR AND DEMODULATOR WITH NONLINEAR ORDER PRESCRIBED

Batenkov K.A.

Mathematical models of modulator and demodulator with nonlinear order prescribed are synthesized on basis of functional series. Signal processing complexity evaluation is analyzed at level of basis function quantity.