

ТОМОГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЫСОКОТОЧНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО СПЕКТРА СИГНАЛА ПО ИЗМЕРЕННЫМ КОМПЛЕКСНЫМ СИГНАЛАМ НА ВЫХОДАХ ГРЕБЕНКИ РЕЗОНАТОРОВ

Самойленко М.В., к.т.н., доцент Московского авиационного института (национального исследовательского университета), e-mail: Samoi.Mar@mail.ru.

Ключевые слова: спектральный анализ, комплексный спектр, гребенка резонаторов, томографический метод, псевдообратная матрица, восстановление.

Введение

Современные цифровые методы спектрального анализа, например, быстрое преобразование Фурье (БПФ), основаны на цифровой обработке выборочных измерений самого сигнала. При этом в методе БПФ точность спектрального анализа определяется соотношением

$$\Omega = \frac{2\pi}{NT}, \quad (1)$$

где Ω – элемент разрешения по оси частот, N – число отсчетов сигнала, T – временной интервал между отсчетами. Спектр анализируемого сигнала получается при этом в форме дискретных значений, распределенных по элементам разрешения.

Формула (1) демонстрирует определенные свойства и ограничения, присущие методу БПФ. Во-первых, зависимость точности оценивания спектра от длины выборки: чем выше требуемая точность (меньше Ω), тем дольше должны проводиться измерения. Во-вторых, необходимость обеспечить постоянный временной интервал T между измерениями. И в-третьих – необходимость «успеть» оцифровать очередное измерение за время T . С учетом требований теоремы Котельникова к периоду дискретизации сигнала $T \leq 1/2F_{\max}$, где F_{\max} – максимальная частота спектра сигнала, последнее условие накладывает жесткие требования на быстродействие используемых аналого-цифровых преобразователей (АЦП). А поскольку быстродействие АЦП конечно, существуют диапазоны радиочастот, в которых метод БПФ и другие методы, основанные на оцифровке анализируемого сигнала, не применимы.

Предлагаемый в данной статье томографический метод спектрального анализа свободен от выше перечисленных ограничений. Это обусловлено тем, что вместо перевода в цифровую форму выборочных значений самого анализируемого сигнала, оцифровываются сигналы на выходах гребенки резонаторов, на которую подается анализируемый сигнал. Причем измерения проводятся одновременно: в некоторый момент времени на всех выходах гребенки измеряются комплексные сигналы. Результатом последующей цифровой обработки полученных измерений является дискретизиро-

Представлен новый метод спектрального анализа с повышенной точностью и разрешением, который позволяет восстанавливать комплексный спектр анализируемого сигнала по измеренным комплексным сигналам на выходах гребенки резонаторов с точностью, практически не зависящей от добротности резонаторов и существенно превышающей точность измерений. Приведено математическое обоснование метода, схема его реализации и результаты компьютерных экспериментов.

ванный по элементам разрешения Ω комплексный спектр сигнала, причем, в отличие от БПФ, величина Ω задается априори из соображений требуемой точности и она не связана с моментом измерений. Реализация томографического метода не требует никакого временного интервала измерений, что отличает этот метод от БПФ.

Постановка задачи

Пусть $H_i(\omega)$ – комплексная передаточная функция i -го резонатора гребенки, а $S(\omega)$ – искомый комплексный спектр анализируемого сигнала, который подается на гребенку резонаторов. Тогда спектр комплексного сигнала на выходе i -го резонатора определится как $G_i(\omega) = H_i(\omega)S(\omega)$, а сам комплексный выходной сигнал – как его обратное преобразование Фурье:

$$g_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} H_i(\omega) S(\omega) d\omega, \quad (2)$$

где j – комплексная единица.

Ставится задача: по интегральным величинам – измеренным комплексным сигналам на выходах резонаторов – восстановить подынтегральную функцию – спектр анализируемого сигнала. Восстановление подынтегральной функции по множеству значений ее интегралов, полученных при различающихся путях интегрирования, – типовая задача томографии, откуда и название метода.

Математическое обоснование метода

Будем полагать, что спектр анализируемого сигнала лежит в пределах диапазона контролируемых частот $\omega_n \div \omega_k$. Тогда интеграл Фурье (2) можно записать как

$$g_i(t) = \int_{\omega_n}^{\omega_k} e^{j\omega t} H_i(\omega) S(\omega) d\omega. \quad (3)$$

Чтобы не загромождать выкладки, будем полагать $\omega_n = 0$. Дискретизируем диапазон контролируемых частот на малые элементы разрешения Ω и перейдем от интеграла (3) к интегральной сумме

$$g_i(t) = \sum_{k=1}^M \Omega e^{jk\Omega t} H_i(k\Omega) S(k\Omega), \quad (4)$$

где M – число элементов разрешения в диапазоне контролируемых частот.

Обозначим $w_{ik}(t) = \Omega e^{jk\Omega t} H_i(k\Omega)$, $s_k = S(k\Omega)$ и перепишем (4) в форме скалярного произведения векторов

$$g_i(t) = \sum_{k=1}^M w_{ik}(t) s_k = \mathbf{w}_i^T(t) \mathbf{s}, \quad (5)$$

где $\mathbf{w}_i = [w_{i1}(t) \ w_{i2}(t) \ \dots \ w_{iM}(t)]^T$ – весовой вектор, $\mathbf{s} = [s_1 \ s_1 \ \dots \ s_1]^T$ – спектральный вектор.

Входящий в (5) весовой вектор известен: он определяется передаточной функцией i -го резонатора, размером и числом элементов разрешения, а также моментом времени t . Спектральный вектор \mathbf{s} представляет собой дискретизированный по элементам разрешения искомый спектр анализируемого сигнала. Найдя этот вектор, мы определим искомый спектр с точностью элемента разрешения и решим поставленную задачу.

Для нахождения спектрального вектора измерим комплексные сигналы на выходах всех резонаторов в некоторый фиксированный момент времени t :

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \mathbf{w}_1^T(t) \mathbf{s}, \\ g_2(t) &= \mathbf{w}_2^T(t) \mathbf{s}, \\ &\dots \\ g_N(t) &= \mathbf{w}_N^T(t) \mathbf{s}, \end{aligned} \quad (6)$$

где N – число резонаторов гребенки.

Перепишем (6) в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{W}^T(t) \mathbf{s}, \quad (7)$$

где $\mathbf{W}(t) = [\mathbf{w}_1(t) \ \mathbf{w}_2(t) \ \dots \ \mathbf{w}_N(t)]$ – матрица отображения, $\mathbf{g}(t) = [g_1(t) \ g_2(t) \ \dots \ g_N(t)]^T$ – вектор измерений.

И матрица отображения и вектор измерений, входящие в (7), известны. Для восстановления искомого спектрального вектора используем метод псевдообращения:

$$\hat{\mathbf{s}} = (\mathbf{W}^T(t))^+ \mathbf{g}(t), \quad (8)$$

где $(\mathbf{W}^T(t))^+$ – матрица восстановления, индекс $+$ обозначает псевдообратную матрицу.

Заметим, что матрица восстановления формируется из априори известных данных и для выбранного момента измерений может быть вычислена заранее. Таким образом, для определения спектрального вектора нужно в некоторый момент времени произвести одновременные измерения на выходах резонаторов гребенки и умножить полученный вектор измерений на матрицу восстановления. Схема реализации метода приведена на рис. 1, где пунктиром выделена часть схемы, выполняющая цифровую обработку априорных данных и измеренных комплексных сигналов.

Метод разработан на базе применения томографического подхода к обработке сигналов. Вместо интегралов использованы интегральные суммы (5), а вместо

различающихся путей интегрирования – разные резонаторы гребенки.



Рис. 1. Схема реализации метода:

$P1, P2, \dots, PN$ – резонаторы, УУ – устройство управления, ЗУ – запоминающее устройство

Результаты компьютерных экспериментов

В компьютерных экспериментах моделировалась гребенка из десяти резонаторов с резонансными частотами 6,5; 7,5; 8,5; 9,5; 10,5; 11,5; 12,5; 13,5; 14,5; 15,5 рад/с (рис. 2, а). Добротность всех резонаторов $Q = 5$. Диапазон контролируемых частот взят от $\omega_n = 8 \text{ рад/с}$ до $\omega_k = 14 \text{ рад/с}$.

Комплексная передаточная функция резонатора определяется известным соотношением [3]

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} + j d \frac{\omega}{\omega_p}}, \quad (9)$$

где ω_p – резонансная частота, $d = 1/Q$ – затухание, ω – текущая частота.

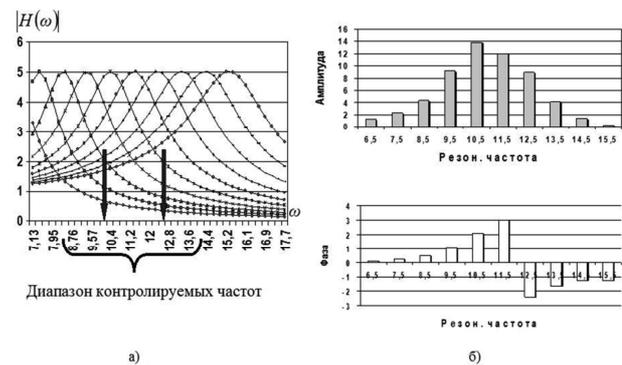
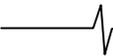


Рис. 2. Частотная характеристика гребенки резонаторов (а) и результаты измерений комплексных сигналов на выходах гребенки (б) в момент $t = 4$ с.

Сигнал представляет собой сумму двух синусоид, частоты которых $\omega_{c1} = 10,2 \text{ рад/с}$ и $\omega_{c1} = 12,6 \text{ рад/с}$ показаны на рис. 2, а) стрелками. Амплитуды гармоник $A_1 = 3 \ A_2 = 2$; начальные фазы равны нулю.

Измерения проводятся в момент $t = 4$ с. Момент измерений выбирается произвольно после окончания переходных процессов в резонаторах. На рис. 2, б) показаны измеренные комплексные сигналы на выходах гребенки. Как видно из рисунка, спектральные составляющие сиг-



нала не разрешаются и оценить их по результатам измерений не представляется возможным.

На рис. 3 приведены результаты восстановления спектра сигнала по полученным измерениям томографическим методом. На рис. 3, а) восстановление проведено при числе элементов разрешения $M_a = 10$, а на рис. 3, б) – при числе элементов разрешения $M_b = 15$. На обоих рисунках четко выделяются максимумы амплитуд в тех элементах разрешения, в которых находятся спектральные составляющие сигнала. Теперь они разрешаются. При этом точность восстановления спектра в первом случае составляет

$$\Omega_a = \frac{\Omega_k - \Omega_n}{M_a} = 0,6 \text{ рад/с}, \quad \text{а во втором –}$$

$$\Omega_b = \frac{\Omega_k - \Omega_n}{M_b} = 0,4 \text{ рад/с}.$$

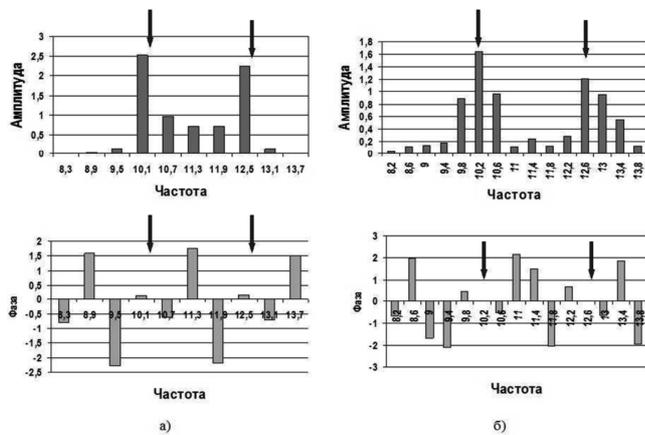


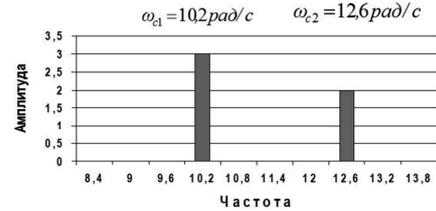
Рис. 3. Восстановленный спектр сигнала при $M = 10$ (а) и при $M = 15$ (б); стрелками показано истинное положение частот спектра сигнала

Представленные на рис. 3 спектры получены независимо один от другого по одним и тем же измерениям, но при разных матрицах отображения и, соответственно, восстановления. Результат, представленный на рис. 3, а получен при размере матрицы отображения $\mathbf{W}(t)$ 10×10 и при несовпадении частотных составляющих сигнала с частотами дискретизации. Матрица при этом квадратная невырожденная, при восстановлении по формуле (8) псевдообратная матрица $(\mathbf{W}^T(t))^+$ равна обратной, однако несовпадение частот сигнала и дискретизации фактически эквивалентно наличию шумов измерений, и поэтому решение получается не точным. Результат 3, б получен при размере $\mathbf{W}(t)$ 15×10 , т.е. решается недоопределенная система уравнений – 10 уравнений при 15 неизвестных. Точного решения она не имеет, а решение с минимальным квадратическим отклонением получается при использовании псевдообратной матрицы [4].

При определенных условиях и в отсутствие ошибок измерений, метод позволяет точно восстанавливать линейчатый спектр (рис. 4).

Условия точного восстановления следующие: $M = N$ (число элементов разрешения равно числу измерений), частоты сигнала совпадают с частотами дискретизации (серединами элементов разрешения в экспериментах) и

матрица отображения – невырожденная. В этом случае спектр восстанавливается точно.



Фазы во всех элементах разрешения равны 0 рад.

Рис. 4. Точное восстановление линейчатого спектра

Заметим, что получение невырожденной матрицы отображения $\mathbf{W}(t)$ не накладывает на эксперимент никаких дополнительных условий. Согласно (9), передаточные функции резонаторов нелинейно зависят от резонансных частот, поэтому при разных резонансных частотах резонаторов (как это и есть в компьютерных экспериментах) дискретные значения $H(\omega)$ получаются линейно независимыми для одного и того же набора частот дискретизации. Эти дискретные значения, взятые из характеристик всех резонаторов, составляют столбцы матрицы $\mathbf{W}(t)$. Получается матрица с линейно независимыми столбцами – матрица полного ранга, т.е. невырожденная матрица. При этом псевдообратная матрица равна обратной и уравнение восстановления приобретает вид

$$\hat{\mathbf{s}} = (\mathbf{W}^T(t))^{-1} \mathbf{g}(t).$$

В проводимых экспериментах для достижения совпадения частотных составляющих сигнала с частотами дискретизации был сдвинут вправо диапазон контролируемых частот на $0,1 \text{ рад/с}$. При этом измерения не изменились, а остались теми же, что приведены на рис. 2, б), поскольку параметры резонаторов и сигнал не менялись.

Заключение

Томографический метод спектрального анализа имеет ряд преимуществ как перед цифровыми, так и перед аналоговыми методами. Во-первых, он позволяет восстанавливать комплексный спектр анализируемого сигнала с точностью, значительно превышающей точность измерений на выходах гребенки резонаторов.

Второе преимущество состоит в уменьшении времени спектрального анализа по сравнению с БПФ, поскольку в томографическом методе спектральный анализ проводится по одномоментным измерениям, в то время как в БПФ для достижения точности $0,6 \text{ рад/с}$ потребовалось бы более 10 сек измерений сигнала при обеспечении постоянного временного интервала между замерами. Возможность использовать низкодобротные резонаторы для высокоточного анализа также является преимуществом, поскольку низкая добротность сопровождается уменьшением времени переходных процессов в резонаторах.

Принципиальным преимуществом томографического метода по сравнению с БПФ является возможность спектрального анализа линейчатых спектров с высокой точностью, вплоть до точного их восстановления при определенных условиях.

Наконец, томографический метод, с его одномоментной оцифровкой сигналов на выходах резонаторов, не критичен к частотному диапазону сигнала, не ограничен теоремой Котельникова и пределом быстродействия АЦП, как это имеет место в методе БПФ.

Компьютерные эксперименты иллюстрируют возможность по одним и тем же измерениям восстанавливать спектр с той точностью, которая необходима. Причем для повышения точности достаточно просто пересчитать матрицу восстановления, что не требует никаких дополнительных измерений.

Литература

1. Самойленко М.В. Новые (томографические) методы спектрального анализа. // Труды РНТО РЭС имени А.С. Попова. Серия: Цифровая обработка сигналов и ее применение (выпуск XV-1). – Москва, 2013, с. 358-361.
2. ПАТЕНТ № 2431853, Бюл. № 29 от 20.10.2011 г.
3. Харкевич А.А. Спектры и анализ.- Москва, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952 г.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- Москва, «Наука», 1988 г.

НОВЫЕ КНИГИ



Умняшкин С.В.

Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов: Учебное пособие.

***Второе издание, исправленное и дополненное
Москва: Техносфера, 2012.- 368 с.***

Предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям «Информатика и вычислительная техника» и «Прикладная математика». Включает в себя рассмотрение общих теоретических вопросов, связанных с цифровым представлением сигналов, основами анализа линейных дискретных систем. Значительное внимание уделено вопросам эффективного представления информации (сжатия данных) и использования вейвлет-преобразования. Может быть рекомендовано в качестве дополнительного материала для направлений подготовки радиотехнического и телекоммуникационного профиля.



Дворкович В.П., Дворкович А.В.

Цифровые видеoinформационные системы (теория и практика)

Москва: Техносфера, 2012. – 1008 с.

Посвящена теоретическим основам и практической реализации цифровых видеoinформационных систем. Содержит девять частей, состоящих из 23 глав. В Части I изложены проблемы цифрового преобразования статических и динамических изображений, оцениваются объемы информации при преобразовании изображений в цифровую форму. Часть II посвящена исследованиям проблем эффективного энтропийного кодирования, оцениваются возможности использования визуальной избыточности статических и динамических изображений. В Части III рассматриваются непосредственное кодирование, кодирование с предсказанием и групповое кодирование изображений, методы блочного и фрактального кодирования, кратномасштабная обработка изображений. В части IV излагаются методы повышения качества внутрикадрового кодирования статических изображений, принципы анализа движения в динамических изображениях, идеология обработки изображений при кратномасштабном анализе. Часть V посвящена анализу методов и стандартов кодирования статических и динамических изображений, рассмотрены некоторые проблемы реализации кодирующих устройств и визуализации их параметров. В Части VI анализируются основные характеристики и цифровое представление речевой и звуковой информации, приводится описание основных стандартов кодирования речи и звука. Часть VII посвящена анализу основных методов канального кодирования и модуляции цифровой информации. В Части VIII приводится описание основных стандартов цифрового ТВ вещания. Часть IX посвящена изложению стандартов мультимедийного телерадиовещания, а также проблемы реализации систем видеоконференцсвязи на базе использования рекомендаций ITU-T.

Книга адресована студентам и специалистам телекоммуникационной отрасли, работающим в области обработки и передачи видео- и звуковой информации.