УДК 681.325

БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ СИГНАЛОВ В АМПЛИТУДУ И ФАЗУ

***Чекушкин В.В.**, д.т.н., профессор кафедры САПР Муромского института (филиала) Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, e-mail: chekvv@gmail.com;*

***Михеев К.В.**,. аспирант кафедры САПР Муромского института (филиала) Владимирского государственного университета имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, e-mail: kiri-mikheev@yandex.ru.*

Исследованы быстродействующие алгоритмы воспроизведения функций $Z = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\beta = \mathrm{arctg}(A/B)$ *с оптимизацией вычислительного процесса по точностным характеристикам, быстродействию и программно-аппаратным затратам на примерах измерений амплитуд сигналов с неизвестной начальной фазой, напряжений переменного тока и фазовых углов.*

Ключевые слова: измерение сигналов, преобразование координат, погрешность измерительной системы, полином, специализированный вычислитель.

Введение

При вычислении амплитуд сигналов со случайной начальной фазой по квадратурным составляющим A и B прямая форма реализации преобразования комплексного сигнала из алгебраического представления в экспоненциальное использует выражение $Z=\sqrt{A^2 + B^2}$ [1]. В радиолокационных станциях вычисление амплитуды такого сигнала должно производиться в реальном масштабе времени в каждом текущем элементе разрешения по дальности, например, с линейным размером в 1 м, что соответствует временному интервалу вычислений 6,6 нс. При этом необходимо обеспечить относительную приведенную погрешность результата измерений порядка (0,4…2.5)%. Сравнительный анализ и улучшение методов вычисления стандартных функций, преобразования координат, совершенствования специализированных вычислителей проведено в [2-7]. В тоже время имеются потенциальные возможности упрощения реализации функциональных зависимостей путём предварительного моделирования вычислительного процесса. Обеспечение предельных, оптимальных соотношений показателей точности, быстродействия и программно-аппаратных затрат на основе применения и совершенствования методов компьютерной математики повышает эффективность вычислительных структур систем цифровой обработки сигналов.

Цель данной статьи – совершенствование быстродействующих методов и алгоритмов совместного вычисления функций $Z = \sqrt{A^2 + B^2}$ и $\beta = \mathrm{arctg}(A/B)$. В специализированных вычислителях систем цифровой обработки сигналов при исключении невостребованной избыточной точности с формированием порядка от 3 до 64-х значащих двоичных разрядов в формате с фиксированной запятой перед старшим разрядом исследуются методы обеспечения максимального приращения количества значащих цифр представления результата (M) при соответствующем ему минимальном увеличении числа вычислительных операций N и обращений к памяти P.

Вычисление амплитуды сигнала

Для ускоренного приближенного нахождения значения амплитуды сигнала Z по его квадратурным составляющим A и B был предложен алгоритм с проверкой одного условия соотношения значений A и B [8]:

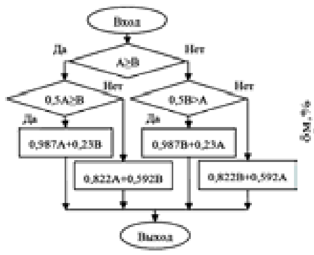
$$Z_1 = 1{,}04\sqrt{A^2 + B^2} \approx A + 0{,}4143B \quad при \quad A \ge B.$$
$$Z_1 = 1{,}04\sqrt{A^2 + B^2} \approx B + 0{,}4143A \quad при \quad B > A. \qquad (1)$$

Этот алгоритм обеспечивает максимальную относительную погрешность $\delta_{мо}$=4,08% при 4-х операциях $N + P$: сравнение, умножение, сложение и извлечение константы. Текущее значение относительной погрешности определялось выражением

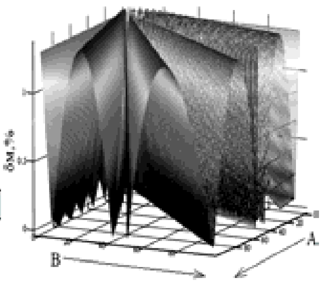
$$\delta_{М} = \left|1 - M1/M2\right| \cdot 100\%, \qquad (2)$$

где M 1 – эталонное значение $\sqrt{A^2 + B^2}$, а M 2 – аппроксимируемое в соответствии с (1). При исключении масштабирующего коэффициента 1,04 в (1) число операций $N + P$ возрастает до 6. В то же время для вычисления на интервале $x \in [0;1]$ с погрешностью 4,6% только для полинома наилучшего приближения $\sqrt{x} = 0{,}0459 + x(2{,}866 - x(4{,}172 - 2{,}305x))$ требуется реализовать 10 операций: 6 N и 4 P. При вычислениях по алгоритму (1) не происходит как переполнения разрядной сетки, так и исчезновения порядка чисел A и B [7].

Для уменьшения значения погрешности введем большее число секторов (подинтервалов) аппроксимации, определяемых дополнительными условиями проверки числа соотношений A и B. При двух условиях сравнения соотношений получены полиномы, аппроксимирующие функцию $Z=\sqrt{A^2 + B^2}$ (рис. 1 а) с значением погрешности $\delta_{мо}$ менее 1,4% (рис. 1 б). График строился для диапазона значений A и B от 0 до 99. В соответствии с (2) введение других интервалов переменных не изменяет график значений погрешности. При реализации алгоритма преобразования, представленного на рис. 1а, необходимо выполнить 9 N+P операций и хранить в памяти 5 констант. По сравнению с алгоритмом (1) с одним условием при увеличении числа операций на 3 погрешность $\delta_{мо}$ уменьшается в 2,9 раза.



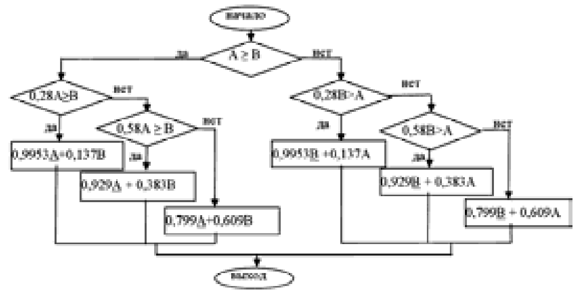
а)



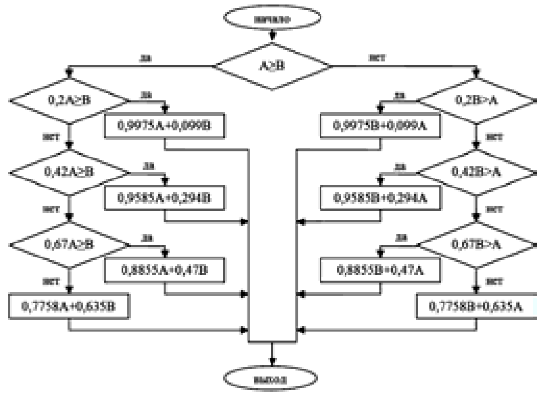
б)

Рис. 1. Структурная схема (а) и график погрешности (б) алгоритма вычисления функции $Z=\sqrt{A^2+B^2}$ *с двумя условиями*

Дальнейшее увеличение количества условий усложняет реализацию алгоритма. В связи с этим для цифровых систем с более высокими классами точности предпочтительнее использовать непосредственные методы вычисления квадратного корня [4, 5].



а)



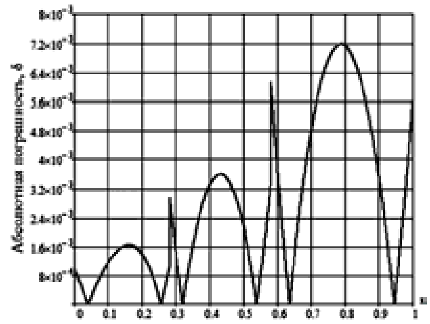
б)

Рис. 2. Структурные схемы алгоритмов с 3-мя (а) и 4-мя (б) условиями

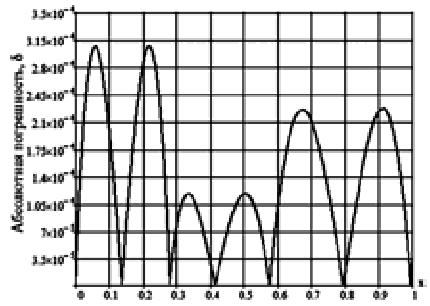
При введении 3-х условий (рис. 2 а) погрешность $\delta_{мо}$ уменьшилась до 0,5 %, что в 2,8 раза меньше чем для алгоритма с двумя условиями. Число операций $N + P$ на самой длинной ветви алгоритма соответствует 12, а в памяти необходимо хранить 8 констант. Для алгоритма с 4-мя условиями (рис. 2 б) погрешность не превышает 0,26 % при реализации процесса за 15 операций. В памяти необходимо хранить 11 констант. При увеличении числа операций $N + P$ на 3 погрешность уменьшилась почти в 2 раза, что соответствует увеличению числа двоичных цифр результата M только на 1.

Преобразование ортогональных составляющих сигнала в фазу

Для определения фазы используем аппроксимацию функции $\beta = arctg(A/B)$ на интервале $\beta \in [0^\circ;90^\circ]$ с последующим нахождении фазы в диапазоне $\beta \in [0^\circ;360^\circ]$ по знаковым разрядам составляющих A и B. Для упрощения вычислений еще раз сократим интервалы изменения аргумента и функции соответственно до $x \in [0;1]$, $\beta \in [0^\circ;45^\circ]$ (здесь $x=A/B$ при $A \ge B$). При $A \ge B$ вычисления производятся по алгоритму $\beta = arctg(A/B)$. Если $A < B$, то вычисляется значение угла $\beta' = arctg(B/A)$. Для получения действительного значения используется формула $\beta = 90° - \beta'$. Путем моделирования на интервале $x \in [0;1]$ (при $A \ge B$) для трех подинтервалов аппроксимации, определенных 3-мя условиями отношения ортогональных составляющих (рис. 2 а) и трех подинтервалов с равными максимальными абсолютными значениями погрешностей $\delta = |L_n(x) - arct(x)|$ приближения функции полиномами $L_n(x)$ получен набор схем аппроксимации 1.1, 1.2 и 2.1, 2.2 соответственно (табл. 1). Схемы 1.1 и 1.2 не обеспечивают равные максимальные погрешности на каждом из подинтервалов всего интервала от 0 до 1 (рис. 3), но исключаются 4 дополнительные операции (2 сравнения и 2 извлечения констант). Это обеспечивает в целом выигрыш по сравнению со схемами 2.1 и 2.2. Так, для схемы 1.2 по сравнению со схемой 2.1 получаем при меньшем количестве операций вычисления $\beta = arctg(A/B)$ выигрыш по точности в $3{,}53\cdot10^{-3}$ / $3{,}066\cdot10^{-4}$ = 11,5 раз. Для схемы 1.2 также имеем выигрыш по точности в $1{,}3\cdot10^{-3}$ / $3{,}066\cdot10^{-4}$ = = 4,24 раза по сравнению с использованием полинома наилучшего приближения на интервале аппроксимации от 0 до 1 по схеме 3 (табл. 1).



а)



б)

Рис. 3. Погрешности аппроксимации полиномами первой (а) и второй степени (б), приведёнными в соответствии с алгоритмом для рис. 2 а

Операция деления A/B заменяется операцией умножения числителя на обратную величину знаменателя: $A/B = A\times(1/B)$. Функция $F(B) = 1/B$ аппроксимируется в

Таблица 1. Полиномы для аппроксимации функции арктангенса при x [0;1].

Схема	Полином наилучшего приближения	Подинтервал (интервал)	Максимальная погрешность	Число операций
1.1	0,975x+0,001	0; 0,28	$7{,}185 \cdot 10^{-3}$	4
	0,843x+0,04	0,28; 0,58		
	0,617x+0,174	0,58; 1		
1.2	x(1,011773-0,131118x)	0; 0,28	$3{,}066 \cdot 10^{-4}$	7
	- 0,011526 + x (1,100332 -0,300443x)	0,28; 0,58		
	- 0,005932 + x (1,089098 -0,297799x)	0,58; 1		
2.1	0,9528x+0,0034	0; 0,393	$3{,}53 \cdot 10^{-3}$	8
	0,7731x+0,0741	0,393; 0,689		
	0,5855x+0,2033	0,689; 1		
2.2	- 0,0001308 + x (1,01004 -0,114636x)	0; 0,24	$1{,}4 \cdot 10^{-4}$	11
	- 0,010573 + x (1,0957497 -0,2951596x)	0,24; 0,59		
	- 0,004363 + x (1,085874 – 0,2962549x)	0,59; 1		
3	x(1,02687+x(-0,1649-0,0779x))	0; 1	$1{,}3 \cdot 10^{-3}$	8

Таблица 2. Аппроксимация функции $F(B) = 1/B$

Подинтервалы аппроксимации	полином наилучшего приближения	δ_{MA}
[0,03;1]	40+B(-404+ B(1379+B(-1830 + 819B)))	4
[0,004;0,03]	506+B(-89604+ B(6948525+B(-240965372+ 3051998356B)))	5,1
$[2^{-10};0{,}004]$	2671+B(-2674061+ B(1255458564+B(-277781760978 + 23324283858392B)))	5,3

диапазоне $B \in$[2-10;1] (табл. 2) тремя полиномами наилучшего приближения на трех подинтервалах с примерно равными абсолютными максимальные значения погрешностей, причем $\delta_{MA} = 5.3$. При реализации алгоритма число операций равно 17: проверка двух условий, выполнение 8-ми алгебраических операций, извлечение из памяти одновременно 7-ми констант. Для интервала $B \in$[2-10;1] получено значение приведенной относительной погрешности результата 0,53 %. В соответствии с табл. 2 это значение получено по отношению к максимальной величине функции $1/B = 1/2^{-10} = 1024$. Этот метод вычислений при значении погрешности более 0,5 % будет более эффективным чем итерационный [9, 10].

Заключение

Алгоритмы преобразования ортогональных составляющих в амплитуду для значений относительной погрешности результата от 4 % до 0,26 % по сравнению с алгоритмами с непосредственным вычислением квадратного корня по схемам аппроксимации $1L_1 \dots 2L_3$ обеспечивают выигрыш по быстродействию в 2…2,75 раза [5]. При этом не происходит как переполнения разрядной сетки, так и исчезновения порядка чисел A и B [7]. Измерение фазы с использованием предварительно определенных подинтервалов аппроксимации вычисления амплитуды сигнала по ортогональным составляющим обеспечивает уменьшение погрешности примерно в 10 раз при фиксированных остальных критериях вычислительного процесса.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-07-00293.

Литература

1. Акчурин, Э.А. Программная реализация взаимных преобразований алгебраического и экспоненциального представления комплексного сигнала на цифровых сигнальных процессорах / Э.А. Акчурин // Радиотехника. – 1995.– №1-2.– С. 21-23.

2. Ercegovas Milos Dand. Others. Reciprocation sguare root, inverse sgaure root, and some elementaru Sunctions Using small multipliers // IEEE Trans Comput. 2000 / 49, №7, – 628-637 с.

3. Schulte Michall J., Swarzlander Earl E. (Jr). A family of variable – precision interval arithmetic processors // IEEE Trans Comput. 2000/ 49, № 5, – 387-397 с.

4. Чекушкин В.В., Аверьянов А.М., Богатов А.Д. Способ и устройство вычисления квадратного корня – патент РФ № 2438160 Бюл. №36, – 2011г.

5. Аверьянов А.М., Пантелеев И.В., Чекушкин В.В. Методы повышения быстродействия и точностных ха-рактеристик преобразователей ортогональных составляющих сигнала в амплитуду // Измерительная техника. – 2012г. – № 8. – с.9-14. Averyanov A.M., Chekushkin V.V., Panteleev I.V. Methods of increasing the speed and accuracy characteristics of converters of orthogonal components of a signal into amplitude // Measurement Techniques. November 2012, Volume 55, Issue 8, pp 858-866.

6. Авт. свид. СССР. Устройство для извлечения квадратного корня из суммы квадратов / И.Я. Миронов, Ю.В. Малинин, Т.Г. Лазебник, Л.И. Новикова // 1983. Бюл. № 8.

7. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение: пер. с англ. – М.: Мир, 2001.– 575 с.

8. Авт. свид. СССР. Устройство для вычисления функции $Z = \sqrt{A^2 + B^2}$ / Чекушкин В.В./1982. Бюл.№ 37.

9. Чекушкин В.В., Гришин В.Ю., Костров В.В. Совершенствование алгоритмов деления чисел в информационно-измерительных системах // Метрология. – 2013. – № 11. – С. 3-14.

10. Гришин В.Ю., Пантелеев И.В., Чекушкин В.В. Совершенствование методов, математических моделей реализации вычислительных процессов в радиолокационных системах// Вестник воздушно-космической обороны. – 2014. – № 3. – С .31-34.

HIGH-SPEED ALGORITHMS OF THE SIGNAL ORTHOGONAL COMPONENTS TRANSFORMATION IN AMPLITUDE AND PHASE

Chekushkin V.V., Panteleev I.V., Mikheev K.V.

A study of fast-speed algorithms of the joint computation of the functions $\mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{A}^2 + B^2}$, $\beta = \mathrm{arctg(A/B)}$ from the viewpoint of optimization of the computational process criteria: precision characteristics, high-speed operation and hardware and software costs on the base of the examples of measurement of amplitudes of signals with unknown initial phase, AC voltage and phase angles, shaft vibration parameters, implementation of transformation of a complex signal from the algebraic representation to the exponential one has been conducted.