

## ЗАВИСИМОСТЬ ТОЧНОСТИ ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ ОТ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ШУМА В ПРОЕКЦИОННЫХ ДАННЫХ

*Лихачёв А.В., д.т.н., с.н.с. Института автоматики и электрометрии СО РАН, e-mail: ipm1@iae.nsk.su;  
Шибеева Ю.А., магистрант Новосибирского государственного технического университета.*

### DEPENDENCE OF TOMOGRAPHY RECONSTRUCTION ACCURACY ON NOISE CORRELATION FUNCTION INVOLVED IN PROJECTION DATA

*Likhachov A.V., Shibaeva Y.A.*

*The tomography from the data containing additive random noise with different statistical properties is investigated. Assuming the stationary, we have derived the relation between the correlation functions of the noise before and after ramp-filtering of one-dimensional projections. Gaussian noise is obtained from the computations to provide the lowest dispersion after filtering among the considered signals. The numerical simulations show the error of reconstruction decreases with increasing width of the correlation function. Within the selected range it has dropped four times.*

**Key words:** Two-dimensional tomography, correlation function of noise, projection data smoothing.

**Ключевые слова:** двумерная томография, корреляционная функция шума, сглаживание проекционных данных вычислитель.

#### Введение

Среди большого разнообразия неразрушающих методов изучения внутренней структуры объектов важную роль играет рентгеновская томография [1–4]. Общая схема томографического исследования состоит в следующем. Образец помещается между источником и системой детектирования, которая регистрирует интенсивность прошедшего через него излучения. Вращательное движение элементов оборудования обеспечивает обзор с различных направлений. По измеренным данным специальными алгоритмами, реализованными на компьютере, восстанавливается распределение коэффициента ослабления рентгеновского излучения. Эта процедура называется томографической реконструкцией.

Различают двумерные и трёхмерные схемы сканирования. В двумерном случае, представленном на рис. 1, источник коллимируется таким образом, что излучение проходит сквозь тонкий слой объекта. При этом в результате реконструкции получается изображение рассматриваемого сечения, которое также называется томограммой. В параллельной схеме, см. рис. 1,а имеется одна остронаправленная рентгеновская трубка и один детектор, которые синхронно передвигаются вдоль рамы. Измерения проводятся для большого количества положений трубки (от сотни до нескольких тысяч), затем рама поворачивается на небольшой угол, обычно менее чем  $1^\circ$ , и измерения повторяются. На рис. 1,б приведена веерная геометрия сбора данных. Здесь трубка излучает широкий расходящийся пучок, направленный на линейку детекторов. Система вращается вокруг пациента. Подробно двумерные схемы регистрации описаны, например, в [1].

*Исследуется томография по данным, содержащим аддитивные случайные помехи с различными статистическими свойствами. В предположении стационарности получено соотношение, связывающее корреляционные функции шума до и после ramp-фильтрации одномерных проекций. Расчёты показали, что среди рассмотренных сигналов наименьшую дисперсию после фильтрации даёт гауссовский шум. Путём вычислительного эксперимента установлено, что ошибка реконструкции уменьшается с ростом ширины корреляционной функции. В пределах выбранного диапазона она упала в четыре раза.*

Одной из основных математических моделей, используемых в современной рентгеновской томографии, является лучевое приближение, согласно которому интенсивность излучения  $I$ , зарегистрированная детектором, определяется следующим уравнением [1]:

$$I = I_0 \exp \left( - \int_S^D g(\vec{r}(l)) dl \right). \quad (1)$$

Здесь  $I_0$  – интенсивность источника,  $g(\vec{r})$  – распределение коэффициента ослабления проникающего излучения в среде,  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки. Интегрирование в (1) ведётся по отрезку, соединяющему источник и детектор, см. рис. 1.

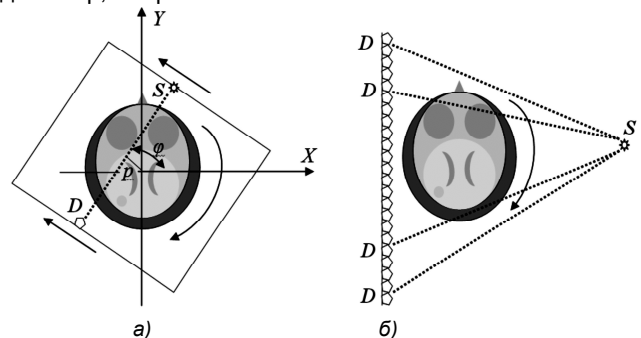


Рис. 1. Двумерные схемы томографического сканирования: а) параллельная; б) веерная

Поделив (1) на  $I_0$  и прологарифмировав, получаем

$$\ln(I_0/I) = \int_S^D g(\vec{r}(l)) dl. \quad (2)$$

В дальнейшем левую часть выражения (2) обозначим как  $f$  и назовем проекционными данными. Из (2) видно, задача томографической реконструкции с математической точки зрения сводится к восстановлению функции по набору интегралов от неё вдоль прямых линий. В случае, когда данные регистрируются в параллельной схеме сканирования (рис. 1,а), реконструкция сводится к численному обращению преобразования Радона [1 – 3]:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}g)(p, \varphi) &\equiv f(p, \varphi) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\sqrt{p^2 + l^2}, \varphi + \arctan\left(\frac{l}{p}\right)\right) dl, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $f(p, \varphi)$  – значение интеграла от  $g(x, y)$  вдоль прямой, которая задаётся параметрами  $p$  и  $\varphi$  – расстоянием до начала координат и углом наклона нормали к оси  $X$ , см. рис. 1,а. Функция  $f_\varphi(p)$ , получающаяся из  $f(p, \varphi)$  если зафиксировать угол  $\varphi$ , называется проекцией.

Известно, что решение уравнения (3) относительно  $g(x, y)$  является некорректно поставленной задачей [4, 5]. Согласно [2], оно может быть представлено в виде:

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\omega| \tilde{f}(\omega, \varphi) \exp(i\omega(x \cos \varphi + y \sin \varphi)) d\omega d\varphi \quad (4)$$

В формуле (4) знак «тильда» сверху означает преобразование Фурье по первой переменной. Как видно из (4), в процессе реконструкции Фурье-образ каждой проекции умножается на модуль частоты (в англоязычной литературе такая процедура называется гагр-фильтрация). Это приводит к усилению высокочастотной составляющей шума, всегда присутствующего в сигналах, полученных в результате измерений.

В соответствии с теоремой Винера-Хинчина [6] спектральная плотность мощности  $W(\omega)$  стационарного случайного процесса является преобразованием Фурье от его корреляционной функции  $R(p)$ . Таким образом, последняя может оказывать существенное влияние на качество реконструкции, изучение которого представляет большой практический интерес. Настоящая работа посвящена этой проблеме, поскольку до сих пор ей не было уделено должного внимания. В имеющейся литературе, как правило, при исследовании устойчивости алгоритмов рассматривается единственный вид искажений – белый шум, по определению не имеющий корреляций [3, 5, 7].

### Основы теории томографической реконструкции Дисперсия шума после гагр-фильтрации

Формула обращения (4) служит основой для построения ряда алгоритмов двумерной томографии, отлича-

ющихся друг от друга способом реализации гагр-фильтрации. Поскольку спектры проекций, вообще говоря, неограниченны, возникает задача представления функции  $|\omega|$  при  $\omega \rightarrow \pm\infty$ . Систематическое изложение вопроса можно найти в монографиях [1, 2]. Различные аппроксимации гагр-фильтра предложены и исследованы в работах [8 – 13]. В дальнейшем соответствующие им передаточные функции будут обозначаться через  $\tilde{\Omega}(\omega)$ . Так же как и  $|\omega|$ , они являются чётными, т.е.  $\tilde{\Omega}(\omega) = \tilde{\Omega}(-\omega)$ . Для функций импульсного отклика введём обозначение  $\Omega(p)$ . Поскольку их Фурье-образы вещественные и чётные, функции  $\Omega(p)$  – также чётные.

Применяемые аппроксимации гагр-фильтра имеют ограниченную полосу пропускания, так что  $\tilde{\Omega}(\omega) = 0$  при  $|\omega| > \omega_{\max}$ . Это делается, чтобы ослабить эффект перекрытия спектра в соседних периодах, обусловленный дискретизацией, а также для подавления высокочастотной компоненты шумовой составляющей. Значение частоты  $\omega_{\max}$  выбирается исходя из условий конкретной решаемой задачи [1 – 5].

Примем аддитивную модель, согласно которой каждая имеющаяся проекция представляет собой сумму  $f_\varphi(p) = f_{0,\varphi}(p) + \xi_\varphi(p)$ . Здесь через  $f_{0,\varphi}(p)$  обозначены точные данные, которые были бы зарегистрированы в отсутствие шума, через  $\xi_\varphi(p)$  – случайная функция, математическое ожидание которой в каждой точке равно нулю. Положим, что статистические свойства помех не зависят от направления сканирования. Поэтому далее будем опускать нижний индекс  $\varphi$  в обозначениях.

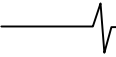
При воздействии на случайный процесс линейного оператора  $T$  его корреляционная функция  $R_\xi(p_1, p_2)$  преобразуется по правилу  $T_1 T_2 R_\xi(p_1, p_2)$ , где выражения  $T_1$  и  $T_2$  означают оператор  $T$ , действующий по переменным  $p_1$  и  $p_2$  соответственно. В рассматриваемом случае линейное преобразование аппроксимирует гагр-фильтрацию, т.е. является свёрткой с функцией  $\Omega(p)$ . Будем считать, что шум стационарный, тогда его корреляционная функция зависит только от разности аргументов. Сначала проведём её преобразование по  $p_2$ :

$$\begin{aligned} T_2 R_\xi(p_1 - p_2) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(p_2 - p') R_\xi(p_1 - p') dp'. \end{aligned} \quad (5)$$

В силу чётности корреляционной функции имеем  $R_\xi(p_1 - p') = R_\xi(p' - p_1)$ . Представляя  $R_\xi(p' - p_1)$  в (5) через преобразование Фурье, с учётом теоремы запаздывания получаем

$$\begin{aligned} T_2 R_\xi(p_1 - p_2) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(p_2 - p') \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{R}_\xi(\omega) \exp(-i\omega p_1) \exp(i\omega p') d\omega \right) dp'. \end{aligned} \quad (6)$$

Заменяем в (6) повторный интеграл кратным и дела-



ем замену переменных  $p'' = -p'$ :

$$T_2 R_\xi(p_1 - p_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(p'' + p_2) \tilde{R}_\xi(\omega) \exp(-i\omega p_1) \exp(-i\omega p'') d\omega dp'' = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Omega}(\omega) \tilde{R}_\xi(\omega) \exp(-i\omega p_1) \exp(i\omega p_2) d\omega. \quad (7)$$

Здесь при получении Фурье-образа  $\tilde{\Omega}(\omega)$  вновь была использована теорема запаздывания. Далее проводим фильтрацию (7) по переменной  $p_1$ :

$$T_1 T_2 R_\xi(p_1 - p_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(p_1 - p') \times \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Omega}(\omega) \tilde{R}_\xi(\omega) \exp(-i\omega p') \exp(i\omega p_2) d\omega \right) dp'. \quad (8)$$

Учитывая, что  $\Omega(p_1 - p') = \Omega(p' - p_1)$ , интегрируем (8) по  $p'$ :

$$T_1 T_2 R_\xi(p_1 - p_2) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Omega}^2(\omega) \tilde{R}_\xi(\omega) \exp(-i\omega p_1) \exp(i\omega p_2) d\omega \quad (9)$$

Делаем в (9) замену  $\omega' = -\omega$  и, используя чётность Фурье-образов, получаем

$$R_\xi^F(p) \equiv T_1 T_2 R_\xi(p_1 - p_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Omega}^2(\omega) \tilde{R}_\xi(\omega) \exp(i\omega(p_1 - p_2)) d\omega \quad (10)$$

В (10) за переменной интегрирования сохранено обозначение  $\omega$ .

Математическое ожидание шума в исходных данных равно нулю. Очевидно, что проведённое преобразование проекций этого не изменит. Тогда  $R_\xi^F(p)$  будет также ковариационной функцией и, следовательно, дисперсия после фильтрации равна

$$D_\xi^F = R_\xi^F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Omega}^2(\omega) \tilde{R}_\xi(\omega) d\omega. \quad (11)$$

Дисперсия характеризует интенсивность централизованного шума, соответственно, степень искажения проекций и в конечном итоге определяет точность томографической реконструкции. Согласно формуле (11) помехи, имеющие различные корреляционные функции, будут приводить к разным значениям  $D_\xi^F$  даже в том случае, если их дисперсия  $D_\xi = R_\xi(0)$  в исходных (не фильтрованных) данных была одинаковой.

### Авторегрессионная фильтрация

Рассмотрим случайную, стационарную, центрированную последовательность  $\{\alpha_i\}$ :  $\dots \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$  с корреляционной функцией  $R_\alpha(i) = D_\alpha \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Выполним авторегрессионную фильтрацию

$$\xi_i = \alpha_i - \sum_{k=1}^n c_k \xi_{i-k}. \quad (12)$$

Число  $n$  называется порядком регрессии,  $c_k$  – её коэффициентами. Если  $c_k$  являются решениями системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} R_\xi(0) & R_\xi(-h_0) & R_\xi(-2h_0) & \dots & R_\xi(-nh_0) \\ R_\xi(h_0) & R_\xi(0) & R_\xi(-h_0) & \dots & R_\xi(-(n-1)h_0) \\ R_\xi(2h_0) & R_\xi(h_0) & R_\xi(0) & \dots & R_\xi(-(n-2)h_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_\xi(nh_0) & R_\xi((n-1)h_0) & R_\xi((n-2)h_0) & \dots & R_\xi(0) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_\alpha \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

то последовательность  $\{\xi_i\}$  моделирует случайный процесс с корреляционной функцией  $R_\xi$ , см., например, [14]. Матрица системы (13) составлена из значений функции  $R_\xi$  в узлах равномерной сетки с некоторым шагом  $h_0$ .

### Вычислительный эксперимент

#### Моделирование случайных процессов разного типа

Для получения шума определённого вида использовалась авторегрессионная фильтрация. При помощи генератора случайных чисел, встроенного в программное обеспечение компьютера, создавалась последовательность  $\{\alpha_i\}$ , состоящая из 1025 элементов. Каждый имел нормальное распределение с равным нулю математическим ожиданием и единичной дисперсией. Оценка корреляционной функции вычислялась путём усреднения

$$\hat{R}_\alpha(ih) = \frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} \alpha_0^{(k)} \alpha_i^{(k)}. \quad (14)$$

Здесь  $h$  – шаг сетки, на которой заданы проекции; индексом  $k$  обозначается номер реализации случайной последовательности. Все корреляционные функции в работе оценивались по формуле (14). Оценка  $\hat{R}_\alpha$ , умноженная на 0.0004 (для масштабирования), приведена на рис. 2,а, кривая 1. Видно, что она достаточно близка к  $\delta_{ij}$ .

Моделировалось три типа стационарных случайных процессов с одинаковой дисперсией  $D_\xi = 0.0004$ . Во-первых, белый шум. Его спектральная плотность мощности, постоянна:  $W_\xi(\omega) = \tilde{R}_\xi(\omega) = D_\xi$ . Поскольку  $\tilde{\Omega}(\omega) = 0$  при  $|\omega| > \omega_{\max}$ , величина  $D_\xi^F$ , определяемая формулой (11), существует и конечна. Во-вторых, гауссовский шум, имеющий характеристики

$$R_{\xi}(p) = D_{\xi} \exp(-\beta^2 p^2),$$

$$W(\omega) = \tilde{R}_{\xi}(\omega) = \frac{D_{\xi}}{\beta\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{4\beta^2}\right). \quad (15)$$

Он возникает при суммировании статистически независимых белых шумов и, в связи с этим, часто встречается в практических задачах.

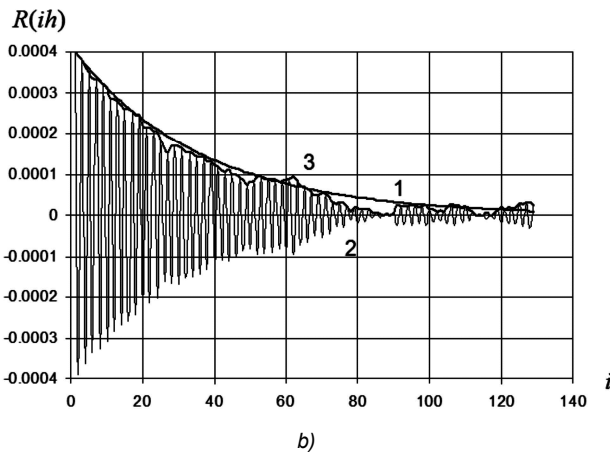
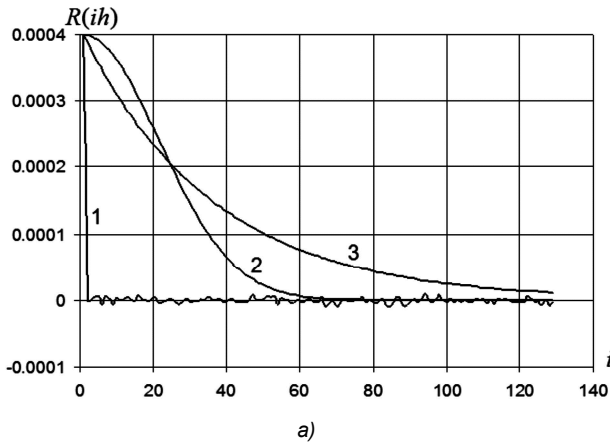


Рис. 2. (а) Кривая 1 – оценка корреляционной функции последовательности, выдаваемой генератором случайных чисел, кривые 2 и 3 – корреляционные функции гауссовского шума и телеграфного сигнала; (б) кривые 1, 2 – корреляционные функции телеграфного сигнала и его авторегрессионной модели, 3 – модуль функции 2

Наконец, в качестве помехи рассматривался так называемый телеграфный сигнал. Он принимает два значения  $\pm \sqrt{D_{\xi}}$ , при этом количество изменений знака в любой промежуток времени распределено по закону Пуассона. Отметим, что в рентгеновской томографии, по сути, регистрируется количество фотонов, которое, как известно, подчиняется пуассоновской статистике при малой интенсивности источника. Для телеграфного сигнала

$$R_{\xi}(p) = D_{\xi} \exp(-\gamma |p|),$$

$$W(\omega) = \tilde{R}_{\xi}(\omega) = \frac{2\gamma D_{\xi}}{\omega^2 + \gamma^2}. \quad (16)$$

Корреляционные функции (15) и (16) приведены на рис. 2,а, кривые 2 и 3. Параметры  $\beta$  и  $\gamma$  подобраны

так, что ширина кривых на полувысоте (обозначается как  $b$ ) равна 25 шагов сетки. Далее для краткости модели описанных выше случайных процессов будут называться шумами типа 1, 2 и 3 соответственно.

Шум типа 1 получался непосредственно из последовательности  $\{\alpha_i\}$  путём умножения каждого её члена на 0.02 (для того чтобы иметь нужное значение  $D_{\xi}$ ). В двух других случаях последовательность  $\{\alpha_i\}$ , пропусклась через фильтр (12), с коэффициентами, вычисленными посредством алгоритма Левинсона [15]. При этом матрица (13) строилась по корреляционным функциям (15) и (16). Применялась авторегрессия от первого до третьего порядка. Результирующая последовательность  $\{\xi_i\}$  нормировалась таким образом, чтобы оценка её дисперсии  $\hat{D}_{\xi} = \hat{R}_{\xi}(0)$  равнялась 0.0004.

О точности моделирования можно судить по рис. 2,б. Кривые 1 и 2 на рис. 2,б – корреляционные функции телеграфного сигнала и его авторегрессионной модели. Видно, что кривая 2 в точках  $2ih$  и  $(2i+1)h$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  имеет разные знаки. Поэтому сопоставлять с положительной кривой 1 целесообразно её модуль, который также изображен на рис. 2,б (кривая 3). Для количественного сравнения был выбран следующий критерий

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{1024} (R_{\xi}(ih) - |\hat{R}_{\xi}(ih)|)^2}{\sum_{i=0}^{1024} (R_{\xi}(ih))^2}} \times 100\%. \quad (17)$$

где  $\hat{R}_{\xi}(ih)$  – оценка (14). В проведённом вычислительном эксперименте для гауссовского шума величина  $\delta$  оказалась 10–30% (в зависимости от ширины  $b$ ), а для телеграфного сигнала – 4-20%. В частности, для рис. 2,б имеет место  $\delta = 7.5\%$ .

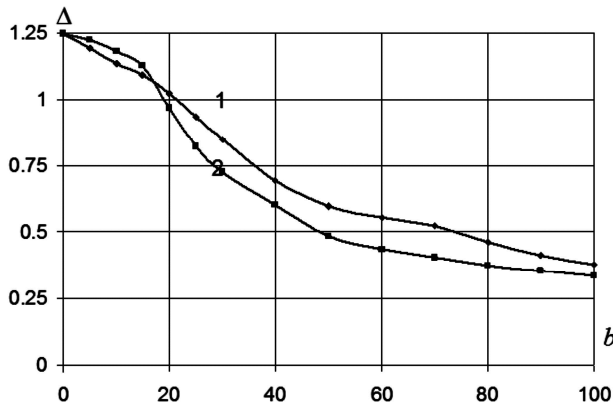
### Реконструкция без предварительной обработки данных

В качестве математического фантома послужила характеристическая функция круга радиусом 0.3 с центром в начале координат. При этом величина  $\sqrt{D_{\xi}} = 0.02$  равнялась приблизительно 3.33% от максимального значения проекции. Благодаря центральной симметрии фантома, корреляционные функции зарегистрированных данных (а не только случайного шума) были одинаковы во всех направлениях сканирования. Областью реконструкции являлся квадрат со стороной 2.0. На нём задавалась сетка 1025×1025 узлов. Ракурсы наблюдения, на каждом из которых было 1025 отсчётов, равномерно распределялись по углу в интервале от 0 до  $\pi$ .

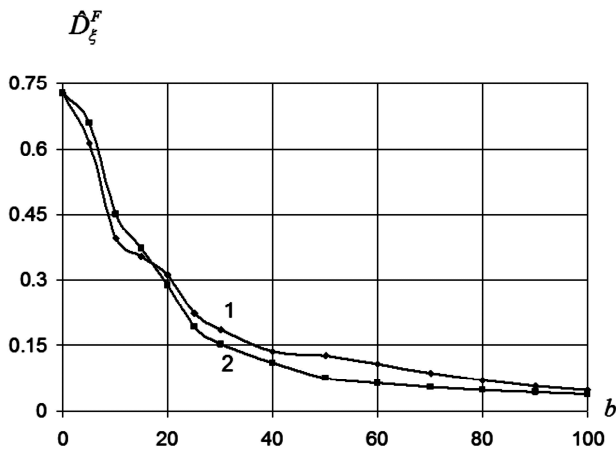
В алгоритме, реализующем формулу обращения (4), использовался один из часто применяемых гатр-фильтров, предложенный Шеппом и Логаном, [9]. Его передаточная функция имеет вид

$$\tilde{\Omega}(\omega) = \begin{cases} \frac{|\omega|}{2\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi|\omega|}{2\omega_{\max}}\right), & \frac{|\omega|}{\omega_{\max}} \leq 1 \\ 0, & \frac{|\omega|}{\omega_{\max}} > 1 \end{cases}, \quad (18)$$

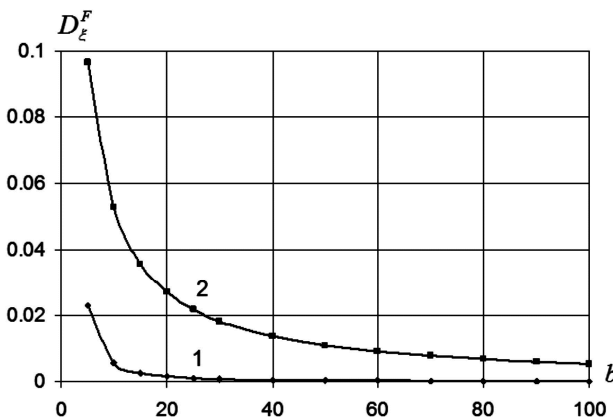
где  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ .



a)



b)



c)

Рис. 3. Зависимости от ширины корреляционных функций: (а) ошибка реконструкции; (б), (с) дисперсия шума после гагр-фильтрации; (б) авторегрессионные модели; (с) моделируемые процессы. Кривые 1 и 2 – шумы типа 2 и 3

Исходя из рис. 2, можно заключить, что спектральная плотность мощности шумов типа 2 и 3 содержит интенсивные компоненты вблизи частоты Найквиста  $\omega_N = \pi/h$ , тогда как в самих моделируемых процессах они отсутствуют. Поэтому частота отсечки  $\omega_{\max}$  была взята ниже, чем  $\omega_N$ . Для приведённых здесь результатов  $\omega_{\max} = 0.95\omega_N$ .

Точность реконструкции оценивалась посредством нормированной среднеквадратичной ошибки  $\Delta$ , которая рассчитывалась по формуле

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_j (g_{0,j} - g_j)^2}{\sum_j (g_{0,j})^2}}, \quad (19)$$

где  $g_{0,j}$  и  $g_j$  – значения математического фантома и его томограммы в  $j$ -м узле. Суммирование ведётся по всем узлам сетки.

Рис. 3,а показывает уменьшение ошибки  $\Delta$  по мере роста параметра  $b$  (выражается в шагах сетки), характеризующего ширину корреляционных функций (15), кривая 1, и (16), кривая 2, которые использовались в системе уравнений (13) для получения коэффициентов авторегрессионной модели. Количество ракурсов наблюдения составляет 180. Видно, что  $\Delta$  уменьшается по мере роста радиуса корреляции. Шуму типа 1 соответствует точка пересечения кривых с осью ординат. Для неё  $\Delta = 1.248$ . Это в 3 – 4 раза выше, чем для шумов типа 2 и 3 при максимальном из рассмотренных значений  $b$ . Напомним, что во всех случаях было  $D_\xi = 0.0004$ .

На рис. 3,б,с представлены зависимости  $D_\xi^F(b)$ . Для рис. 3,б в формулу (11) подставлялись оценки корреляционных функций, полученных в рамках модели (12). Здесь, как и на рис. 3,а, кривые 1 и 2 относятся к шумам типа 2 и 3. Именно эти помехи содержатся в данных, по которым проводится реконструкция. Для рис. 3,с величина  $D_\xi^F$  вычислялась по точным значениям  $R_\xi(p)$ , т.е. она соответствует гауссовскому шуму, кривая 1, и телеграфному сигналу, кривая 2.

Сопоставляя рис. 3,а и рис. 3,б, можно заключить, что, независимо от формы корреляционной функции, ошибка реконструкции тем больше, чем больше дисперсия шума после гагр-фильтрации. Гауссовский шум, как видно из рис. 3,с, даёт значения  $D_\xi^F$  много ниже, чем телеграфный сигнал. Таким образом, если бы он был смоделирован более точно, то в проведённом вычислительном эксперименте ошибка  $\Delta$  была бы для него наименьшей. Из сказанного следует важный для практики вывод: при разработке регуляризирующих фильтров проекционных данных нужно стремиться к тому, чтобы корреляционная функция сглаженного шума обеспечивала по возможности меньшие значения выражения (11). Для этой цели, в частности, может служить функция, изображенная на рис. 4.

Влияние числа направлений сканирования  $M$  иллюстрирует рис. 4. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют шумам типа 1, 2 и 3. Параметр  $b$  равен 25 шагов сетки. Для сравнения на рис. 4 добавлена кривая 4, полученная в отсутствии шума. Видно, что с ростом  $M$  взаимное положение кривых не меняется. Это означает, что наблюдаемый эффект устойчив по отношению к количеству проекций.

Визуально о качестве восстановленных изображений можно судить по рис. 5, на котором представлены математический фантом (а), и томограммы (б, с, д), реконструированные при  $M = 180$ ,  $b = 50$  по данным, содержащим шумы типа 1, 2 и 3.

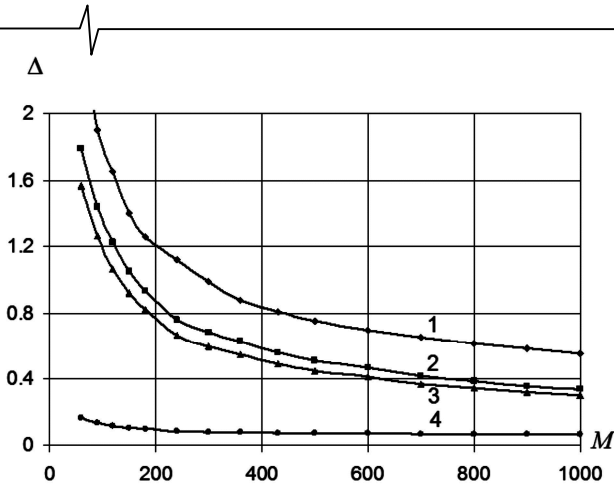


Рис. 4. Зависимости ошибки реконструкции от числа ракурсов наблюдения: кривые 1, 2 и 3 – шумы типа 1, 2 и 3; кривая 4 – шум отсутствует

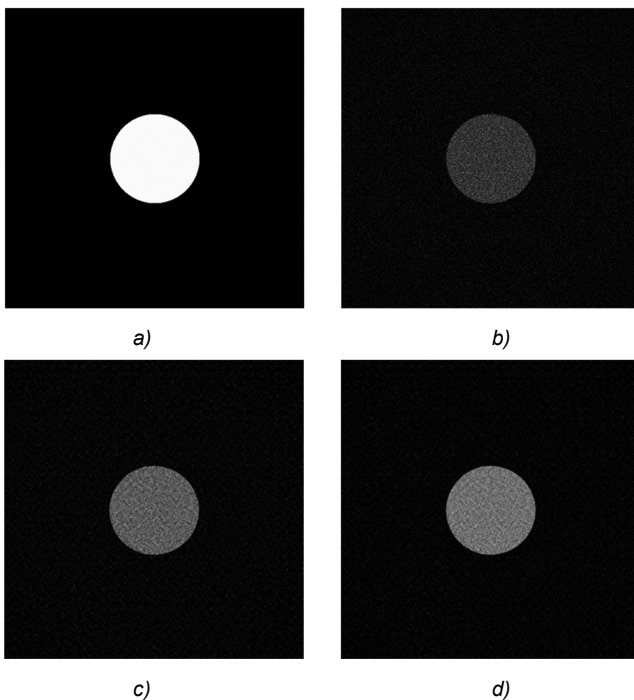


Рис. 5. (a) математический фантом; (b), (c), (d) томограммы; (b) шум типа 1,  $\Delta = 1.248$ ; (c) шум типа 2,  $\Delta = 0.600$ ; (d) шум типа 3,  $\Delta = 0.484$

**Использование сглаживающих процедур**

Одной из возможностей улучшения томографии по зашумлённым данным является их предварительное сглаживание. Этот вопрос подробно рассматривается в монографии [16]. Здесь исследуются две процедуры такого рода: усреднение в скользящем окне шириной 5 шагов сетки и регуляризующие сплайны [17].

Сглаживание меняет статистические свойства случайных сигналов. Получающиеся при этом корреляционные функции в работе оценивались путём применения формулы (14) к разности между сглаженными и точными проекциями. Они приведены на рис. 6,а (шум типа 1) и рис. 6,б (шум типа 3). Кривые 1 на рис. 6,а,б относятся к усреднению, а кривые 2 – к регуляризации сплайнами. Корреляционные функции помех до сглаживания показаны на рис. 2,а (кривая 1) и рис. 2,б (кривая 2).

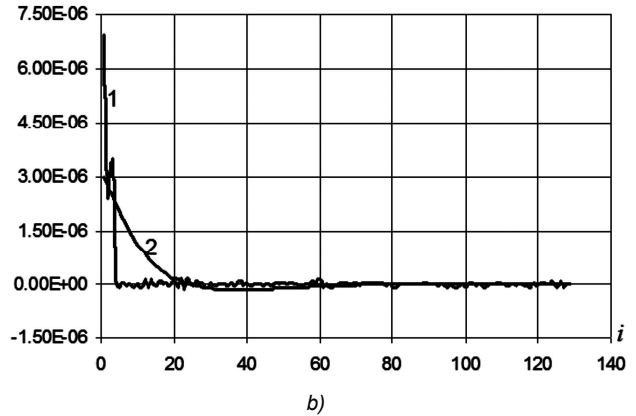
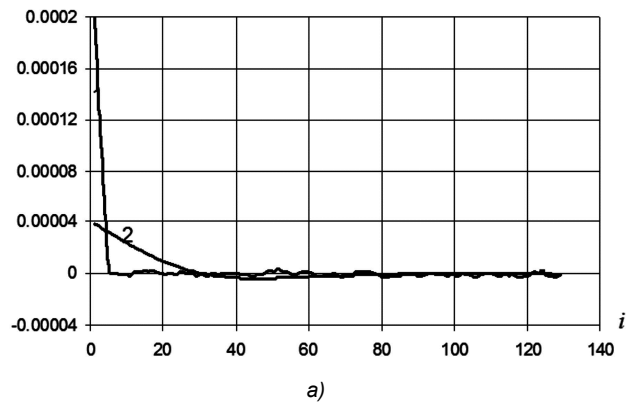


Рис. 6. Оценки корреляционных функций после сглаживания шумов: (а) шум типа 1; (б) шум типа 3. Кривые 1 – усреднение в скользящем окне, кривые 2 – сплайны

Рис. 6 показывает, что сплайны по сравнению с усреднением, значительно сильнее снижают дисперсию шума и обеспечивают более широкую корреляционную функцию. Для шума типа 1 отношение оценок дисперсий сигналов, сглаженных различными способами, составляет около пяти, а для шума типа 3 – около двух. Отметим, что усреднение уменьшило оценку дисперсии шума типа 1. Причина этого, по-видимому, заключается в том, что в последовательности случайных чисел, выдаваемой встроенным генератором, присутствуют корреляции (в противном случае изменения бы не было, поскольку дисперсия суммы статистически независимых случайных величин равна сумме их дисперсий). Наличие корреляций также подтверждается тем, что кривая 1 на рис. 2,а не является идеальным  $\delta$ -импульсом.

На рис. 7, также как и на рис. 3,а, представлены зависимости ошибки  $\Delta$  от параметра  $b$  для шумов типа 2 (кривые 1), и 3 (кривые 2). Нулевому значению  $b$  соответствует шум типа 1. Для рис. 7,а использовалось усреднение, а для рис. 7,б – сплайны. Видно, что отклонение между кривыми, незначительно и начинает заметно проявляться, когда  $b$  становится больше, чем 20 шагов сетки. Это указывает на то, что сглаживание делает статистические свойства различных сигналов более сходными. Причём этот эффект тем существеннее, чем меньше их радиус корреляции.

Для сплайнов графики  $\Delta(b)$  имеют минимум. Возможное объяснение роста ошибки при  $b > 25$  состоит в следующем: эффективная ширина импульсного отклика фильтра в этом случае увеличивается вместе с шириной

корреляционной функции шума, в результате чего проекции становятся «переглаженными». Это предположение согласуется с тем, что границы объекта на изображениях, полученных по таким данным, оказались размытыми.

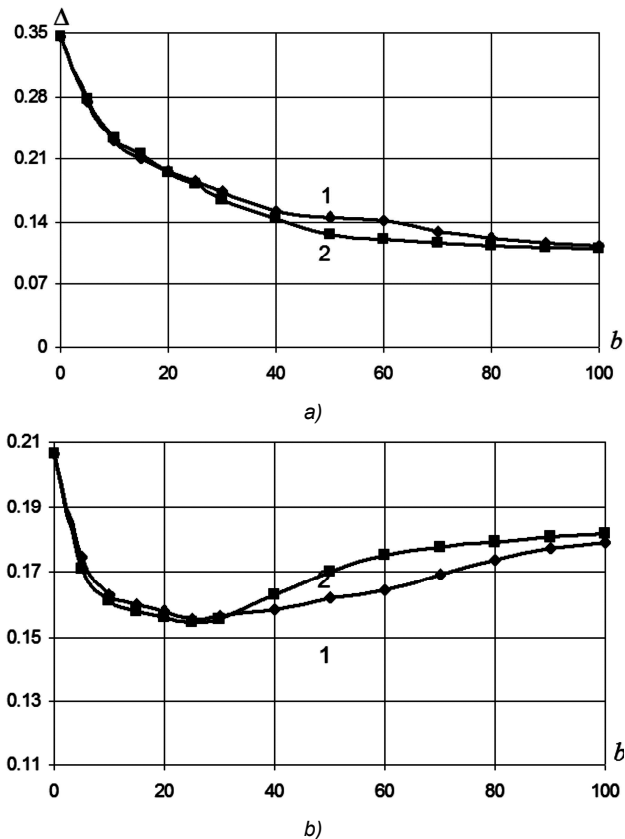


Рис. 7. Зависимости ошибки реконструкции от ширины корреляционных функций шумов типа 2 (кривая 1), и 3 (кривая 2): (а) усреднение в скользящем окне; (б) сплайны

## Заключение

В работе исследуется влияние корреляционной функции помех, содержащихся в проекционных данных, на точность томографии объектов. Рассмотрены белый шум, гауссовский шум и телеграфный сигнал. Для алгоритмов, реализующих формулу обращения двумерного преобразования Радона, в предположении выполнения условия стационарности, получено выражение дисперсии после гап-фильтрации. Расчёты показали, что наименьшее значение она принимает, когда шум гауссовский.

Был проведён вычислительный эксперимент, при этом использовалась авторегрессионная модель случайных процессов. Оказалось, что ошибка реконструкции тем больше, чем больше дисперсия отфильтрованного шума. Последняя, в свою очередь, уменьшается с ростом ширины корреляционной функции  $b$ , по которой рассчитываются коэффициенты авторегрессии. В частности, для телеграфного сигнала при изменении параметра  $b$  от 5 до 100 шагов сетки, ошибка упала от 1.222 до 0.335, т.е. почти в четыре раза. Этот результат не очевиден заранее, поскольку входящее в инверсию Ра

дона интегрирование по углу, применённое к сильно коррелированному шуму, могло бы привести к возникновению регулярных структур в изображении, аналогичных по происхождению картине, что негативно сказалось бы на качестве томограммы.

## Литература

1. Хермен Г.Т. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 342 с.
2. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 279 с.
3. Пикалов В.В., Преображенский Н.Г. Реконструктивная томография в газодинамике и физике плазмы. Новосибирск: Наука, 1987. 230 с.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические задачи компьютерной томографии. М: Наука, 1987. 158 с.
5. Лаврентьев М.М., Зеркаль С.М., Трофимов О.Е. Численное моделирование в томографии и условно-корректные задачи. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1999. 172 с.
6. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. М.: Наука, 1976. 484 с.
7. Троицкий И. Н. Статистическая теория томографии. М: Радио и связь, 1989. 239 с.
8. Ramachandran G.N., Lakshminarayanan A.V. Three-dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: application of convolutions instead of Fourier transforms. // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. 1971. V. 68. P. 2236-2240.
9. Shepp L.A., Logan B.F. The Fourier reconstruction of a head section. // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1974. V. 21, No. 3. P. 21-43.
10. Ерохин В.А., Шнейдеров В.С. Трёхмерная реконструкция (машинная томография). Моделирование на ЭВМ. // Препринт No.23, ЛНИВЦ; Ленинград, 1981.
11. Лихачёв А.В. Исследование  $1/z^2$  фильтрации в алгоритмах томографии. // Автометрия. 2007. Т. 43, № 3. С. 57-64.
12. Лихачёв А.В. Регуляризирующая фильтрация проекций в алгоритмах двумерной томографии. // Сибирский журнал вычислительной математики. 2008. Т. 11, № 2. С. 187-200.
13. Лихачёв А.В. Алгоритм двойной фильтрации для двумерной томографии. // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, № 8. С. 21-29.
14. Быков В.В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике. М.: Советские радио, 1971. 328 с.
15. Levinson N. The Wiener RMS Error Criterion in Filter Design and Prediction // Journal of Mathematics and Physics. 1947. V. 25, No. 4. P. 261-278.
16. Пикалов В.В., Мельникова Т.С. Томография плазмы. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1995. 229 с.
17. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, 1983. 214 с.