

## ЦИФРОВОЙ СИНТЕЗАТОР ЧАСТОТ НА ОСНОВЕ ОБРАТНОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША

*Смекалов А.И., ведущий инженер кафедры микрорелектронных радиотехнических устройств и систем Национального исследовательского университета «Московский институт электронной техники», e-mail: aismekalov@narod.ru;*

*Джиган В.И., д.т.н., профессор кафедры микрорелектронных радиотехнических устройств и систем Национального исследовательского университета «Московский институт электронной техники», e-mail: djigan@yandex.ru.*

### DIRECT DIGITAL FREQUENCY SYNTHESIZER BASED ON INVERSE DISCRETE WALSH TRANSFORM

*Smekalov A.I., Djigan V.I.*

*The paper considers a direct digital frequency synthesizer based on inverse discrete Walsh transform. This synthesizer allows to obtain the desired quality of the generated harmonic signal, such as the wide spurious-free dynamic range and low normalized mean-square error at an acceptable hardware cost. Decomposition of the discrete cosine by Walsh function basis is considered. Various implementation issues of the proposed synthesizer are covered: block structure, the calculation of the Walsh coefficients and others. The article gives comparison of the Walsh phase-cosine converter with classical converter, which based on memory. The proposed Walsh phase-cosine converter requires about 5 times fewer resources than the classical converter at the same level of spurious-free dynamic range less than 100dB.*

**Key words:** direct digital frequency synthesis, harmonic signal, cosine, sine, orthonormal basis of Walsh functions, direct and inverse discrete Walsh transform, spectral spurious components, normalized mean-square error.

**Ключевые слова:** прямой цифровой синтез частот, гармонический сигнал, косинус, синус, ортонормированный базис функций Уолша, прямое и обратное дискретные преобразования Уолша, побочные спектральные составляющие, нормализованная среднеквадратичная ошибка.

#### Введение

Качество современной аппаратуры радиосвязи, радиолокации, радионавигации и измерительной техники в значительной мере определяется уровнем развития синтезаторов частоты. Наиболее перспективными из данных устройств являются цифровые синтезаторы гармонического сигнала, построенные по методу прямого цифрового синтеза (Direct Digital Synthesis, DDS) [1]. Применение таких синтезаторов позволяет существенно повысить технико-экономические показатели многих радиосистем, а именно малое время переключения частот без разрыва фазы, высокое разрешение по частоте, надежность, повторяемость, возможность полной микроминиатюризации, программируемость параметров. Это вызвало широкое распространение цифровых синтезаторов в радиотехнических устройствах. Как следствие сегодня актуальной и часто встречающейся на практике является задача построения цифрового синтезатора с показателями качества формируемого сигнала, удовлетворяющими конкретному приложению, при минимальных аппаратных затратах на реализацию и, соответственно, минимальной стоимости.

Структура цифрового синтезатора обычно включает в себя аккумулятор фазы и преобразователь фазы в

*Рассматривается цифровой синтезатор частот, основанный на обратном дискретном преобразовании Уолша. Такой синтезатор позволяет получить требуемое качество генерируемого гармонического сигнала, а именно большой динамический диапазон свободный от побочных спектральных составляющих и малую нормализованную среднеквадратичную ошибку при приемлемых аппаратных затратах. Рассмотрено разложение дискретного косинуса по базису функций Уолша. Освещены различные вопросы реализации предлагаемого синтезатора: структурная схема, расчет коэффициентов разложения и другие. Приводится сравнение преобразователя фаза-косинус на основе обратного преобразования Уолша с классическим преобразователем на блоках памяти. Предлагаемый преобразователь требует примерно в 5 раз меньше ресурсов, чем классический, при одинаковом уровне побочных спектральных составляющих менее -100 дБ.*

отсчеты гармонической функции [2-3], чаще всего реализуемый в виде запоминающего устройства. Преобразователь фазы является наиболее сложным с точки зрения реализации компонентом синтезатора, главным образом определяющим качество формируемого сигнала. Структурам, особенностям и примерам реализации преобразователя фазы посвящено ряд работ [2-8], в которых рассматриваются различные подходы по сокращению ресурсов, требуемых для реализации синтезатора, при допустимом ухудшении формы синтезируемого сигнала. Это усечение фазы [3], линейная интерполяция соседних точек [4], алгоритм «цифра за цифрой» [5], аппроксимация рядом Тэйлора [6], рандомизация фазы и амплитуды по Витли [7], схема Сандерленда [8] и ряд других.

В настоящей работе рассматривается цифровой синтезатор с преобразователем фаза-косинус, выполненным на основе обратного дискретного преобразования Уолша (ДПУ) [9]. Такой преобразователь позволяет избавиться от больших блоков памяти и умножителей путем замены их логическими элементами и сумматорами и получить заданное качество генерируемого гармонического сигнала [10, 11].

**Описание структуры синтезатора**

Структурная схема предлагаемого синтезатора приведена на рис. 1. В ней частотное беззнаковое слово  $FTW$  (Frequency Tuning Word) разрядностью  $W_{AP}$ , управляющее частотой выходного сигнала  $s(k)=\cos(\varphi(k))$ , подается на аккумулятор фазы через регистр  $RG1$ . Аккумулятор фазы, построенный на двоичном сумматоре и регистре  $RG2$ , интегрирует значение частотного слова  $FTW$ . Бит переноса в сумматоре не используется, поэтому при переполнении аккумулятора автоматически выполняется операция по модулю  $2^{W_{AP}}$ .

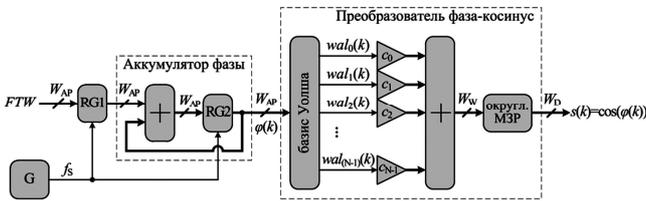


Рис. 1. Цифровой синтезатор частоты на основе обратного ДПУ

Частота основной гармоники выходного сигнала цифрового синтезатора определяется выражением:

$$f_0 = \frac{FTW}{2^{W_{AP}}} \cdot f_s,$$

где  $f_s$  – частота дискретизации, тактирующая всю схему синтезатора.

Формируемое аккумулятором фазовое беззнаковое слово  $\varphi(k)$  разрядностью  $W_{AP}$  поступает на вход преобразователя фаза-косинус, выполненного на основе обратного ДПУ. При этом выходной дискретный гармонический сигнал определяется выражением

$$s(k) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \cdot wal_i(k), \quad k, i=0,1,..N-1, \quad (1)$$

где  $\{wal_i(k)\}$  – ортонормированный базис дискретных функций Уолша, принимающих значения +1 и -1,  $N$  – количество функций Уолша,  $c_i$  – коэффициенты разложения гармонической функции по базису Уолшу,  $i$  – номер функции Уолша,  $k$  – номер отсчета. Дискретные функции Уолша определены на периоде  $N = 2^{W_{AP}}$  отсчетов, который соответствует наименьшей частоте синтезатора ( $FTW = 1$ ). Для примера на рис. 2 показаны графики восьми функций Уолша для случая  $N = 2^3$ .

Сегодня базис Уолша широко используется в вычислительной технике, поскольку он тесно связан с двоичной системой счисления – основой элементов цифровой логики. В двоичной системе счисления числа записываются с помощью двух символов 0 и 1. Между этими символами и значениями функций Уолша  $\pm 1$  применяют соотношение: двоичная единица соответствует -1, а двоичный ноль – +1. Цифровая двоичная  $W_{AP}$ -разрядная шина однозначно

определяет базис Уолша, состоящий из  $N = 2^{W_{AP}}$  функций. Значения каждой функции Уолша легко формируются из разрядов двоичной шины. Ниже приведены соотношения между  $W_{AP}$ -разрядной шиной  $\varphi(k)$  и первыми восемью функциями Уолша:

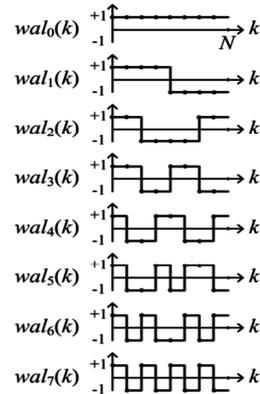


Рис. 2. Графики первых восьми дискретных функций Уолша  $wal_0(k) \equiv 0$ ;

$$\begin{aligned} wal_1(k) &= \varphi[W_{AP} - 1](k); \\ wal_2(k) &= \varphi[W_{AP} - 1](k) \oplus \varphi[W_{AP} - 2](k); \\ wal_3(k) &= \varphi[W_{AP} - 2](k); \\ wal_4(k) &= \varphi[W_{AP} - 2](k) \oplus \varphi[W_{AP} - 3](k); \\ wal_5(k) &= \varphi[W_{AP} - 1](k) \oplus \varphi[W_{AP} - 2](k) \oplus \varphi[W_{AP} - 3](k); \\ wal_6(k) &= \varphi[W_{AP} - 1](k) \oplus \varphi[W_{AP} - 3](k); \\ wal_7(k) &= \varphi[W_{AP} - 3](k), \end{aligned} \quad (2)$$

где символ  $\oplus$  обозначает бинарную логическую операцию сложения по модулю 2 (исключающее ИЛИ, XOR),  $\varphi[b](k)$  – значение  $b$ -го разряда шины  $\varphi$  в момент времени  $k$ . Как видно из выражений (2), функции Уолша 1, 3 и 7 непосредственно соответствуют разрядам шины  $\varphi[W_{AP}-1]$ ,  $\varphi[W_{AP}-2]$  и  $\varphi[W_{AP}-3]$ . Такие функции имеют отдельное название – функции Радемахера, а остальные в выражении (2) являются результатом простого преобразования разрядов между собой. В рамках задачи построения цифрового синтезатора это означает, что базис Уолша может быть легко сформирован из фазовых отсчетов  $\varphi(k)$ , получаемых с выхода фазового аккумулятора, с незначительными аппаратными затратами.

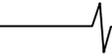
Для определения соотношения между шиной  $\varphi(k)$  и любой функцией Уолша под номером  $i$ , используется следующий алгоритм. Номер функции Уолша  $i$ , который представляется  $W_{AP}$ -разрядным числом, преобразуется в код Грея  $g$  как [12]:

$$g[b] = i[b] \oplus i[b + 1], \quad b=0,1,..W_{AP}-1, \quad (3)$$

где  $g[b]$  – значение разряда кода Грея,  $i[b]$  – значение разряда двоичного представления номера  $i$ . Выходящий за границу представления разряд  $i[W_{AP}]$  в (3) считается нулевым. Тогда функция Уолша с номером  $i$  определяется:

$$wal_i(k) = \varphi[0](k)^{g[W_{AP}-1]} \oplus \varphi[1](k)^{g[W_{AP}-2]} \oplus \dots \oplus \varphi[W_{AP} - 1](k)^{g[0]},$$

и представляет собой сложение по модулю 2 всех разрядов  $\{\varphi[b](k)\}$  фазового слова  $\varphi(k)$  между собой. При этом каждый разряд фазового слова возводится в



степень 0 или 1, в зависимости от значения разрядов кода Грея, порядок разрядов которого является обратным к порядку разрядов фазового слова  $\varphi(k)$ .

Сформированные функции Уолша  $wal_i(k)$  используются как управляющие сигналы для знаковых инверторов (рис. 1). В зависимости от значения  $wal_i(k)$ , знаковый инвертор выдаёт инвертированное или нет значение коэффициента:  $c_i$ , если  $wal_i(k)=0$  (+1);  $-c_i$ , если  $wal_i(k)=1$  (-1). Такой инвертор реализуется на основе сумматора и логических элементов «исключающее ИЛИ» [12]. Набор знаковых коэффициентов  $\{c_i\}$  предварительно вычисляется согласно прямому ДПУ (при этом могут использоваться быстрые алгоритмы [9])

$$c_i = R \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (2^{W_D-1} - 1) \cdot (2^{W_W - W_D}) \cdot \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \cdot wal_i(k) \right], \quad (4)$$

где  $R[\cdot]$  – функция округления к ближайшему целому,  $W_D$  – требуемая разрядность выходного гармонического сигнала,  $W_W$  – разрядность преобразователя фаза-косинус,  $(2^{W_D-1} - 1)$  – амплитуда выходного цифрового косинуса. Число разрядов  $W_W$  рекомендуется брать на 4-6 разрядов больше  $W_D$ , чтобы уменьшить влияние ошибки округления коэффициентов  $\{c_i\}$  и снизить уровень побочных спектральных составляющих до уровня шумов квантования, соответствующих разрядности  $W_D$ . Выходы знаковых инверторов затем суммируются, образуя восстановленный косинус разрядностью  $W_W$ . Блок округления младших значащих разрядов (МЗР) приводит число разрядов косинуса к требуемому значению  $W_D$ .

### Разложение косинуса по базису Уолша, расчет и анализ коэффициентов

Пример разложения дискретного косинуса для параметров  $N=64$ ,  $W_W=14$  и  $W_D=10$  приведен на рис. 3. График спектра (рис. 3, б) наглядно показывает, что только небольшая часть коэффициентов имеет значительный вес во всём базисе  $\{c_i\}$ . Значения первых восьми коэффициентов разложения дискретного косинуса равны:

$$c_0 = 0;$$

$$c_1 = 2/N;$$

$$c_2 = \frac{2}{N} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{N/4-1} \cos(2\pi k/N) \right]_{N \rightarrow \infty} = \frac{2}{\pi};$$

$$c_3 = 0;$$

$$c_4 = 0;$$

$$c_5 = (2 - 2\sqrt{2})/N;$$

$$c_6 = \frac{2}{N} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{N/8-1} (\cos(2\pi k/N) + \sin(2\pi k/N)) \right]_{N \rightarrow \infty} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{\pi};$$

$$c_7 = 0.$$

На практике часто применяют аккумулятор фазы с разрядностью  $W_{AP}=32$  и более, что обусловлено желанием получить мелкий шаг сетки частот  $\Delta f = f_s / 2^{W_{AP}}$ . Такой разрядности соответствует количество коэффициентов  $N$  более 4 миллиардов, что на первый взгляд делает расчет коэффициентов (4) и реализацию преобразователя фаза-косинус затруднительной задачей. Тем не менее, из  $N$  коэффициентов  $\{c_i\}$  (4), половина тожде-

ственно равна нулю, поскольку функция косинуса имеет нечетную симметрию относительно точки  $k=N/2$ , а половина функций Уолша с индексами  $ie$  – четную (even symmetry):

$$\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi(k + N/2)}{N}\right),$$

$$wal_{ie}(k) = wal_{ie}(k + N/2), \quad k=0,1,\dots,(N/2-1).$$

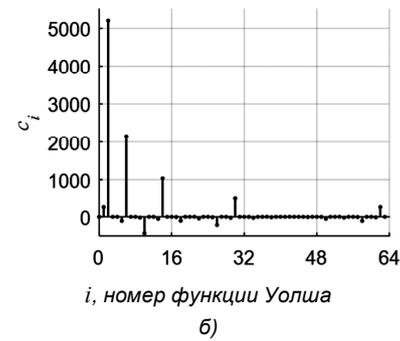
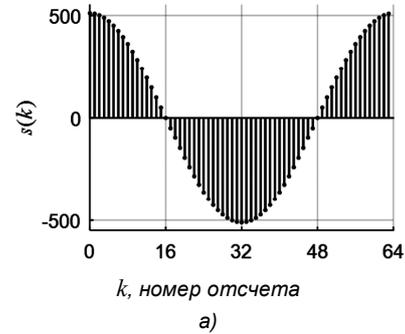


Рис. 3. Дискретная функция косинуса (а) и её разложение по базису Уолша (б)

Индексы  $ie$  упомянутых четных дискретных функций Уолша и  $io$  – нечетных (odd symmetry), определяются следующим образом:

$$ie = i, \text{ если } i[0] \oplus i[1]=0 \quad (ie=0, 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, \dots),$$

$$io = i, \text{ если } i[0] \oplus i[1]=1 \quad (io=1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, \dots),$$

где  $i[0]$  и  $i[1]$  – нулевой и первый разряды двоичного представления номера функции Уолша  $i$ .

Дальнейшее сокращение коэффициентов, используемых для восстановления косинуса (4), возможно при наличии заданного уровня качества генерируемого гармонического сигнала. Это приводит к задаче отбора минимального количества коэффициентов  $n$  из всего набора  $N$ , которое бы обеспечивало требуемые показатели качества. Математическое моделирование показало, что наилучшим критерием отбора коэффициентов является выбор первых  $n$  максимальных по модулю коэффициентов. Применение этого критерия обеспечивается в выражении (4) операцией округления к ближайшему целому  $R[\cdot]$ , при выполнении которой все коэффициенты, модули которых меньше  $1/2^{W_W}$  (или 0,5 МЗР), округляются в ноль. Таким образом, задавая разрядность  $W_W$ , определяется количество ненулевых коэффициентов, используемых в преобразователе фаза-косинус, и соответственно качество восстанавливаемого гармонического сигнала. Шины, соединения и функции Уолша для нулевых коэффициентов удаляются из преобразователя фаза-косинус, значительно упрощая его структуру (рис. 1).

Для примера на рис. 4, а показаны графики относи-

тельной ошибки преобразования фазы  $\varphi(k)$  в цифровой гармонический сигнал  $\cos(\varphi(k))$  согласно схеме на рис. 1 с разным количеством коэффициентов в блоке обратного ДПУ, а на рис. 4, б – амплитудные спектры формируемых при этом косинусов. В примере графики построены для генерируемой частоты, равной 14% от опорной  $f_S$  и 16-ти разрядного аккумулятора фазы  $W_{AP}=16$ , что соответствует базису Уолша в  $N=65536$  коэффициентов. Если при расчете коэффициентов Уолша (4) разрядности  $W_W$  и  $W_D$  принять равными 12, то из всех 65536 коэффициентов только 43 окажутся ненулевыми (см. рис. 4, черные линии), если  $W_W = W_D = 16$  разрядам, то 110 коэффициентов (см. рис. 4, серые линии). На рис. 4, б основная гармоника серого цвета перекрывает основную гармонику черного цвета, поскольку генерируемый частоты выходного сигнала одинаковые для обоих случаев. Увеличение значения параметра  $W_W$ , с одной стороны, приводит к увеличению количества ненулевых коэффициентов Уолша и, соответственно, усложняет блок обратного ДПУ, но, с другой стороны, повышает качество формируемого гармонического сигнала. Так для сорока трех 12-разрядных коэффициентов максимальная ошибка преобразования  $e(k)$  равна 0,38 % от амплитуды косинуса (рис. 4, а), максимальный уровень побочных спектральных составляющих – минус 67 дБ относительно основной гармоники (рис. 4, б), для ста десяти 16-разрядных коэффициентов эти показатели значительно лучше – 0,04 % и минус 91 дБ соответственно.

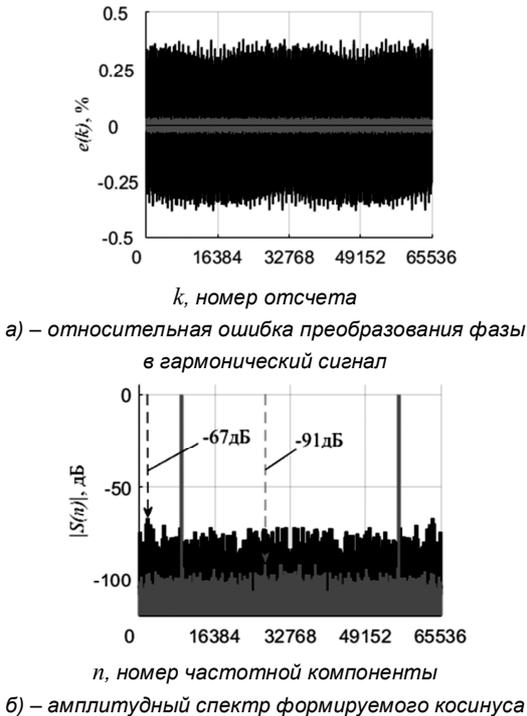


Рис. 4. Синтез косинуса с применением обратного ДПУ

Помимо сокращения количества коэффициентов дальнейшее упрощение блока обратного ДПУ становится очевидным, если рассмотреть значения самих коэффициентов. Так из упомянутых ранее сорока трёх коэффициентов одиннадцать равны минус 1, пять – минус 3 и т.д., а больших по амплитуде коэффициентов 1303, 540 и 259 всего по одному. В случае ста десяти коэффициентов двадцать четыре равны минус 1, одна-

дцать – минус 3, а больших по амплитуде коэффициентов 20860, 8641 и 4149 также по одному. Для малых коэффициентов не требуется использовать все разряды, заложенные для их представления. Например, для знакового коэффициента минус 1 достаточно всего двух разрядов. Это означает, что при реализации обратного ДПУ (1) сумматоры, которые должны складывать такие коэффициенты, также могут быть мало разрядными. Как видно из рис. 5, показывающем распределение коэффициентов по их разрядности, таких малоразрядных сумматоров большинство. Это, несомненно, сокращает количество аппаратных ресурсов, необходимых для реализации блока обратного ДПУ (рис. 1).

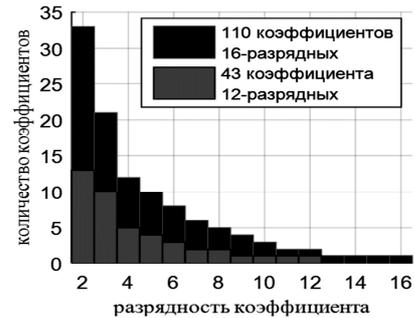
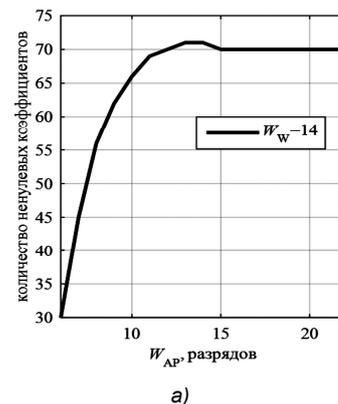


Рис. 5. Распределение коэффициентов разложения косинуса по их разрядности

В ходе математического моделирования установлено, что при некоторой заданной разрядности  $W_W$ , количество, индексы и значения ненулевых коэффициентов  $c_i$  с ростом  $W_{AP}$ , начиная с некоторого значения  $W_{AP}^{GP}$ , не изменяются. Для примера на рис. 6 показаны зависимости количества ненулевых коэффициентов и нормированной среднеквадратической ошибки  $NMSE$  [4] (Normalized Mean-Square Error) восстановления косинуса от разрядности  $W_{AP}$  при  $W_W = 14$  разрядов. Так, начиная с  $W_{AP}^{GP} = 15$  разрядов, количество ненулевых коэффициентов остаётся постоянным и равным 70 (рис. 6, а). С помощью этих 70 коэффициентов можно восстановить косинус с  $NMSE$  лучше чем -65.54 дБ (рис. 6, б). Такое поведение объясняется тем, что с ростом  $W_{AP}$  более  $W_{AP}^{GP}$  общее количество коэффициентов увеличивается, но все новые коэффициенты по модулю меньше 0.5 МЗР, поэтому они округляются в ноль.

Данный факт позволяет рассчитывать коэффициенты  $c_i$ , используя (4), для больших разрядностей аккумулятора фазы  $W_{AP}$  при значительно меньшем объеме вычислений простой заменой  $N = 2^{W_{AP}}$  на  $N^{GP} = 2^{W_{AP}^{GP}}$ .



а)

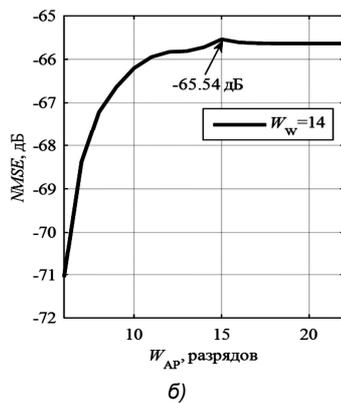


Рис. 6. К расчету коэффициентов Уолша при больших разрядностях аккумулятора фазы

Также следует отметить, что широко применяемое в реализации цифровых синтезаторов свойство периодичности и симметричности функции косинуса, позволяющее воспроизводить только четверть периода с последующим её преобразованием до целого периода, не даёт выигрыша в случае преобразователя фаза-косинус на основе базиса функций Уолша. Так как разложение целого периода косинуса и его четверти по базису Уолша даёт одинаковое количество ненулевых коэффициентов.

### Оценка ресурсов и сравнение с классическим цифровым синтезатором

Чтобы оценить количество ресурсов, требуемых для реализации предлагаемого синтезатора, и сравнить его с классическим синтезатором на блоках памяти, использовалось программное обеспечение *Xilinx Vivado* 2015.1 [13]. Для этого оба синтезатора были реализованы с помощью языка описания аппаратуры *Verilog* и скомпилированы под программируемую логическую интегральную схему (ПЛИС) *xc7vx690tffg1761-2* семейства *Virtex-7* [13]. При этом общие параметры синтезаторов выбирались одинаковыми: разрядность аккумулятора фазы  $W_{AP} = 32$ , разрядность выходного косинуса  $W_D = 16$ , а индивидуальные параметры такими, чтобы обеспечить приблизительно одинаковое качество генерируемого сигнала. А именно для классического синтезатора фазовые слова усекались с 32 разрядов до 18, что соответствует объёму памяти  $2^{18-2} \times 15 = 960$  Кбит и обеспечивает показатели качества  $NMSE = -95.1$  дБ и максимальный уровень побочных спектральных составляющих  $PLSH = -108.1$  дБ (Peak Level of Spurious Harmonics). Для синтезатора Уолша разрядность преобразователя фаза-косинус принималась равной  $W_w = 20$ , что даёт уровни  $NMSE = -94.3$  дБ и  $PLSH = -115.3$  дБ. Для  $W_w = 20$  получается 245 ненулевых коэффициентов, и для их расчета использовалось значение  $W_{AP}^{TP} = 21$  вместо 32. Ресурсы, необходимые для реализации аккумуляторов фазы, при сравнении не учитывались, поскольку они одинаковые для обоих синтезаторов. Для оценки «чистого» количества требуемых ресурсов без учета регистров конвейеризации, преобразователи фаза-косинус реализовывались как комбинационная схема на базе логических примитивов ПЛИС: таблиц соответствия (slice LUT, Look-Up Table) и мультиплексоров (mux, Multiplexer). Быстродействие комбинационной схемы оце-

нивалось максимальной задержкой сигнала (latency) при прохождении его от входа преобразователя к выходу. Результаты сравнения приведены в табл. 1.

Как видно из таблицы предлагаемый преобразователь фаза-косинус на основе базиса функций Уолша требует примерно в 5 раз меньше ресурсов, чем классический преобразователь на блоках памяти.

Таблица 1. Сравнение преобразователей фаза-косинус

Тип	slice LUT	mux	Latency
Классический преобразователь фаза-косинус	6087	1554	7.087 нс
Преобразователь фаза-косинус по Уолшу	1496	0	7.579 нс

### Заключение

Таким образом, в статье предложен цифровой синтезатор частот, основанный на обратном дискретном преобразовании Уолша, позволяющий получить требуемое качество генерируемого гармонического сигнала при приемлемых аппаратных затратах. Предлагаемый преобразователь фаза-косинус примерно в пять раз проще, по сравнению с классическим преобразователем на блоках памяти при одинаковом уровне качества генерируемого сигнала. Синтезатор рекомендуется для реализации на программируемой логике или в виде специализированных микросхем.

### Литература

1. Синтезаторы частот: Учебное пособие / Шахтарин Б.И., Прохладин Г.Н., Иванов А.А., Быков А.А., Чечулина А.А., Гречищев Д.Ю. - М.: Горячая линия - Телеком, 2007. – 128 с.
2. Tierney J., Rader C.M., Gold B. A digital frequency synthesizer // IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics. 1971. Vol.19. No. 3. P. 48–57.
3. Смекалов А.И. Метод прямого цифрового синтеза гармонического сигнала. Анализ и математическое моделирование // Радиотехника. 2011. №1. С.16-29.
4. Смекалов А.И., Джиган В.И. Применение линейной интерполяции сигнала в прямом цифровом синтезе частот // Телекоммуникации. 2015. №9. – С.2-7.
5. Джиган В.И., Смекалов А.И. Цифровой синтезатор с прямым вычислением гармонического сигнала // Известия высших учебных заведений. Электроника. 2015. Том 20. №6. С. 625-633.
6. Kampik M., Popok G. Low-spur numerically controlled oscillator using Taylor series approximation // XI International PhD Workshop OWD 2009.
7. Wheatley C.E., Phillips D.E. Spurious suppression in direct digital synthesizers // Proceedings of the 35th Annual Frequency Control Symposium. 1981. – P.428.
8. Sunderland D.A. CMOS/SOS frequency synthesizer LSI circuit for spread spectrum communications // IEEE Journal of Solid-State Circuits. 1984. Vol. SC-19. No. 4. – P.497-506.
9. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша: теория и применения. М.: Наука, 1987. – 352 с.
10. Смекалов А.И. Применение базиса функций Уолша в цифровом синтезе частот // 18-я Международная конференция «Цифровая обработка сигналов и её применение – DSPA-2016». Москва, 2016.
11. Смекалов А.И. Реализация цифрового синтезатора частот на основе базиса функций Уолша // Международная конференция «Радиоэлектронные устройства и системы для инфокоммуникационных технологий – РЭУС-2016». Москва. 2016. С. 127-132.
12. Угрюмов Е.П. Цифровая схемотехника: Учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: БХВ–Санкт-Петербург, 2007. 800 с.
13. URL: <http://www.xilinx.com> (дата обращения: 29.05.2016).