

УДК 621.372

СИНТЕЗ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ БИХ-ФИЛЬТРОВ МИНИМАЛЬНОЙ ДЛИНЫ СЛОВА КОЭФФИЦИЕНТОВ

*Бугров В.Н., к.т.н., доцент Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского,
e-mail: bug@rf.unn.ru.*

SYNTHESIS OF THE INTEGER IIR FILTERS WITH SHORT COEFFICIENT WORD LENGTH

Bugrov V.N.

The integer simulation and development infinite impulse response (IIR) filters taking into account the possibilities of their realization on digital integer platforms are considered. The problem statement and solution of multifunctional synthesis of digital filters such a problem on the basis of the numerical methods of integer nonlinear mathematical programming are given. As an several examples, the problem solution of synthesis of high-pass IIR-filters with short coefficient word length has been given. The analysis of their characteristics is resulted.

Key words: the integer IIR-filter, integer nonlinear programming, multifunctional synthesis, criterion function.

Ключевые слова: целочисленный рекурсивный фильтр, целочисленное нелинейное программирование, многофункциональный синтез, целевая функция.

Введение

Наряду с селективной способностью совокупное качество цифрового фильтра определяется и его быстродействием, то есть минимальным временем расчёта отклика при реализации на заданной цифровой платформе. При этом под селективностью обычно понимают возможность удовлетворения совокупности требуемых характеристик фильтра в частотной области. К основным факторам, определяющих быстродействие, относятся, прежде всего, арифметика вычислений и длина слова коэффициентов (разрядность) цифрового БИХ-фильтра. Обзор публикаций по методам расчёта и синтеза рекурсивных фильтров показывает, что в настоящее время преобладает косвенное проектирование рекурсивных фильтров по аналоговому прототипу с применением метода билинейного преобразования [1 - 3] либо различных подходов, на нём базирующихся [4 - 6], при использовании в алгоритмах цифровой фильтрации вещественной арифметики вычислений обычно в формате с плавающей точкой. Вещественный формат представления данных вынуждает квантовать их значения, что приводит к весьма нежелательным для работы такого БИХ-фильтра последствиям, таким как искажение частотных характеристик, появление шумов квантования, необходимость масштабирования вещественных коэффициентов фильтра и возможность появления малых предельных циклов при квантовании результатов внутренних вычислений. К тому же проектное решение в вещественных числах может быть реализовано только на специализированных сигнальных процессорах. Вопросам квантования при аналитическом расчёте БИХ-фильтра посвящено много работ [5, 6]. В некоторых из

Рассматриваются вопросы моделирования и синтеза рекурсивных (IIR) цифровых фильтров с учетом возможностей их реализации на цифровых платформах с целочисленной арифметикой вычислений. Приводится постановка задачи многофункционального синтеза IIR-фильтров методами целочисленного нелинейного математического программирования. Иллюстрируется эффективность применения данного подхода на примерах решения задач синтеза рекурсивных целочисленных фильтров верхних частот с минимальной длиной слова коэффициентов. Проводится анализ характеристик синтезированных фильтров.

них рассматривалась также возможность ограничения радиусов полюсов передаточной функции фильтра. В целом можно отметить, что при высоком порядке фильтра ($N > 20$) весьма существенные трудности возникают уже при квантовании вещественных данных до 8 - 10 бит.

Однако возможность прямого синтеза цифровых БИХ-фильтров непосредственно в целочисленном пространстве состояний может быть предоставлена методологией целочисленного нелинейного программирования (ЦНП), общее описание которой приведено в работах [7 - 11]. Под пространством состояний в данном случае понимается, прежде всего, многомерное пространство целочисленных параметров (коэффициентов фильтра), входных и выходных сигналов – целочисленных временных последовательностей, а также базовые целочисленные операции над данными в алгоритме цифровой фильтрации. Идеология ЦНП позволяет эффективно проектировать целочисленные рекурсивные фильтры с заданной разрядностью представления данных и максимальном выполнении требований к совокупности частотных характеристик фильтра при произвольной форме их задания. В настоящее время в общей номенклатуре коммерческих цифровых платформ существенную долю занимают 8-разрядные цифровые платформы с целочисленной арифметикой вычислений. При реализации высокоскоростных целочисленных цифровых фильтров (ЦЦФ) на специализированных платфор-

мах или на кристалле разрядность представления данных может быть ещё ниже (до 4 или даже до 3 бит).

В данной статье рассматривается возможность решения задач синтеза каскадных рекурсивных ЦЦФ минимальной разрядности представления данных компьютерным пакетом ЦНП (версии 3.1), примеров, иллюстрирующих принципиальные возможности данного подхода к многофункциональному проектированию цифровых систем.

Моделирование и синтез рекурсивных ЦЦФ малой разрядности

Рекурсивные фильтры, являясь дискретными линейными системами с обратной связью, обладают значительно большими селективными возможностями по сравнению с КИХ-фильтрами и позволяют реализовать требуемые частотные характеристики значительно меньшей разрядностью представления данных и меньшим порядком N фильтра. Что касается структуры построения рекурсивных фильтров, то в [5, 12] приведено сравнение каскадных, параллельных, прямых и волновых структур построения, и показано, что каскадная структура является наилучшей. Поэтому в настоящее время построение рекурсивных ЦЦФ в форме каскадного соединения звеньев первого или второго порядка на практике используется наиболее часто.

Передаточная функция для рекурсивного ЦЦФ, состоящего из каскадного соединения m -звеньев второго порядка ($m = N/2$), имеет следующий вид [7, 8]:

$$H(z) = \prod_{i=1}^m \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}}{a_{0i} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}, \quad (1)$$

где комплексная переменная z при переходе к описанию комплексной частотной характеристики $K(e^{j\omega}) = |K(e^{j\omega})| \times e^{j\varphi(\omega)}$ принимает значение $z = e^{j\omega}$, а $\omega = 2\pi f / fs$ – приведенная круговая частота.

Все коэффициенты системной функции (1) являются целочисленными, а их интервал изменения (вариации) определяется заданной длиной битового слова (разрядностью) коэффициентов фильтра. Из соотношения (1) легко получается разностное уравнение для одного звена целочисленного фильтра:

$$y_n = (b_0x_n + b_1x_{n-1} + b_2x_{n-2} - a_1y_{n-1} - a_2y_{n-2}) / a_0, \quad (2)$$

где x_n, y_n – входная и выходная целочисленные временные последовательности, a_0 – масштабирующий множитель.

Как видно из (2), при вычислении отклика фильтра должна выполняться операция деления на целочисленный коэффициент a_0 , которая может быть реализована операцией сдвига при условии принадлежности каждого i -го коэффициента биномиальному целочисленному ряду:

$$a_{0i} \in \{2^q\}, \quad q = \overline{0, W_k} \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

где W_k – длина (разрядность) битового слова целочисленных коэффициентов фильтра.

На рис. 1 приведена типичная структура звеньев ре-

курсивного целочисленного фильтра, соответствующая разностному уравнению (2). Как видно, при вычислении отклика фильтра кроме традиционных операций сложения, умножения и задержки на такт присутствует операция сдвига на $B = \log_2 a_0$ бит, с помощью которой реализуется целочисленное деление на биномиальный коэффициент a_0 .

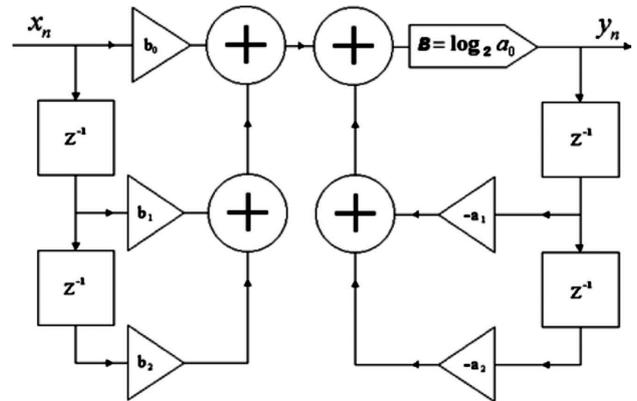


Рис. 1. Структура звена рекурсивного ЦЦФ

Можно отметить, что именно наличие итоговой операции сдвига в алгоритме расчёта отклика рекурсивного целочисленного звена нарушает коммутативность расчётной процедуры реализации нулей и полюсов его передаточной функции (1), что не позволяет, в свою очередь, реализовать целочисленное рекурсивное звено в канонической форме.

Как известно, рекурсивный фильтр будет устойчив, если все полюсы p_i передаточной функции лежат внутри единичного круга в z -плоскости:

$$|Zp_i| < 1. \quad (4)$$

Заметим, однако, что это стандартное условие является необходимым, но далеко не достаточным, так как устойчивость работы БИХ-фильтра, как системы с обратной связью, может быть нарушена появлением предельных циклов (limit cycle), когда вроде бы устойчивый по соотношению (4) фильтр начинает демонстрировать неустойчивое поведение, приводящее к возникновению на выходе периодических колебаний. При этом предельные циклы типа «granular» [3] возникают, когда при отсутствии сигнала на входе амплитуда выходного сигнала затухает, но из-за вычислительных погрешностей не доходит до нуля. На рис. 2, в качестве примера проявления таких циклов, представлены осциллограммы сигналов на выходе рекурсивных фильтров различного порядка при нулевом входе.

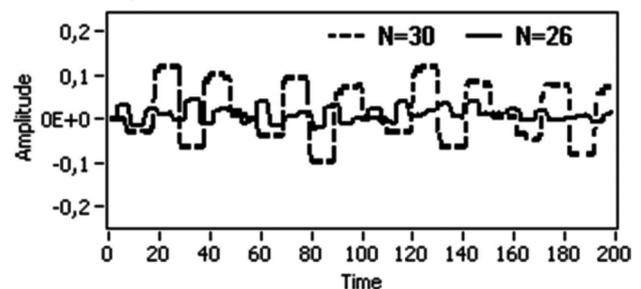


Рис. 2. Амплитуда предельных циклов при нулевом входе «Переполняющие» (overflow) предельные циклы имеют место, когда амплитуда выходного сигнала не затухает

хает, а возрастает, вызывая в итоге переполнение. Как известно, возможность возникновения предельных циклов возрастает с увеличением порядка рекурсивного фильтра и во многом определяется добротностью полюсов его передаточной функции, т.е. коэффициентами знаменателя системной функции (1). В настоящее время провести теоретический анализ, расчёт предельных циклов весьма непросто даже для БИХ-фильтров малого порядка. Поэтому действенной, а порой и единственной альтернативой является практическая реализация синтезированного ЦЦФ на конкретной цифровой платформе (MCU, DSP или FPGA) и экспериментальный анализ амплитуды выходного сигнала фильтра при нулевом входе. Именно поэтому проектирование цифровых БИХ-фильтров высокого порядка ($N > 20$) не должно ограничиваться только теоретическим нахождением коэффициентов (как это обычно принято), но обязательно этапом реализации фильтра и практического исследования решения на возможное наличие предельных циклов. В том же случае, когда предельный цикл наблюдается, действенной мерой его устранения является проведение повторного синтеза фильтра под меньшую допустимую добротность его полюсов. А так как добротность полюсов пропорциональна их радиусу в z -плоскости, то достаточно задать меньшее значение допустимого радиуса полюсов передаточной функции и вновь синтезировать фильтр. Попытки задания различных радиусов полюсов [6] на стадии аналитического проектирования БИХ-фильтров малоэффективны из-за низкой адекватности и чрезмерных вычислительных затрат, тогда как поисковый синтез численными методами ЦНП позволяет это сделать без затруднений. Таким образом, совместное условие устойчивости проектируемого БИХ-фильтра с учётом отсутствия предельных циклов можно представить как

$$|Z_{pi}| < r_{max} ,$$

где r_{max} – допустимый максимальный радиус полюсов передаточной функции фильтра в z -плоскости, при котором предельные циклы в системе отсутствуют.

Так в пакете ЦНП 3.1 возможно задание следующей линейки значений максимальных радиусов полюсов при решении конкретной проектной задачи: $\Gamma_{max} = \{1,0, 0,98, 0,9, 0,82 \text{ и } 0,75\}$. Как показала практика, при синтезе с меньшим значением максимального радиуса, практически всегда удаётся получить проектное решение без предельных циклов того или иного рода, хотя селективная способность фильтра при этом, естественно, снижается.

Что касается результатов необходимых для расчёта отклика ЦЦФ промежуточных вычислений, то все они также являются целочисленными, и при заданной битовой разрядности квантования входного сигнала W_x достаточно выделить внутренний аккумуляторный регистр с разрядностью

$$W_{ak} = W_x + W_k + 2 \text{ [бит]}$$

для хранения результата целочисленного умножения с накоплением, осуществляемого по алгоритму (2). Колебаний переполнения, то есть возникновения больших предельных циклов, вызванных переполнением разрядной сетки регистра-аккумулятора, при таком расчёте его

разрядности практически никогда не возникает, особенно если учесть, что накопление результата целочисленного умножения в (2) осуществляется алгебраически, с учётом знака слагаемых, что существенно понижает разрядность результата.

Как известно, в каскадных формах построения цифровых фильтров необходима процедура масштабирования сигнала, что позволяет каскадному фильтру работать в широком динамическом диапазоне входных сигналов. Однако в каскадных ЦЦФ расчёт такого масштабирования для целочисленного звена гораздо легче осуществлять не применением L_p -нормы, а прямым введением требования обеспечения малого разброса коэффициентов передачи отдельных звеньев [9, 10]. Формально требование масштабирования усиления записывается двусторонними функциональными ограничениями (9) экстремальной задачи ЦНП-синтеза.

В общем виде задачу целочисленного нелинейного программирования при машинном синтезе рекурсивного ЦЦФ с заданной разрядностью представления данных можно записать так [10]:

$$F^o(\mathbf{IX}^o) = \min F(\mathbf{IX}) \quad \mathbf{IX} \in I^{6m} \quad (5)$$

$$-2^{W_k} - 1 \leq a_i \leq 2^{W_k} - 1 \quad i = \overline{1, m}, \quad (6)$$

$$-2^{W_k} - 1 \leq b_i \leq 2^{W_k} - 1 \quad i = \overline{1, m},$$

$$a_{0i} \in \{2^q\}, \quad q = 0, W_k \quad i = \overline{1, m}, \quad (7)$$

$$|Z_{pi}| < r_{max} \quad i = \overline{1, m}, \quad (8)$$

$$K_i^{\min} \leq |K_i(e^{j\omega})| \leq K_i^{\max} \quad i = \overline{1, m}, \quad (9)$$

где m – число звеньев второго порядка, \mathbf{IX} – вектор многомерного целочисленного пространства параметров (коэффициентов), $F(\mathbf{IX})$ – целевая функция, K_i^{\min} , K_i^{\max} – допустимые границы изменения коэффициента усиления i -го звена.

Экстремальная задача синтеза (5) записана относительно целочисленного пространства I^{6m} параметров (коэффициентов фильтра), размерностью $6m$. Ограничения (6) задают границы изменения этих целочисленных коэффициентов, а соотношение (7) определяет принадлежность коэффициентов a_{0i} биномиальному ряду. Функциональные ограничения (8) контролируют в процессе синтеза условие устойчивости рекурсивного фильтра по всем полюсам коэффициента передачи с радиусами, не выше Γ_{max} , а ограничения (9) масштабируют коэффициенты передачи звеньев в заданный интервал.

Многофункциональное задание целевой функции наиболее часто формируется в виде взвешенной суммы (10) частных целевых функций $f_i(\mathbf{IX})$, которые определяют выполнение функциональных требований по той или иной частотной характеристике фильтра [10, 13]:

$$F(\mathbf{IX}) = \sum_i \beta_i \cdot f_i(\mathbf{IX}) . \quad (10)$$

Коэффициент β_i задает значимость (вес) характеристики (i -го частотного окна). Сами частные целевые функции $f_i(\mathbf{IX})$ формирует функциональный редактор пакета синтеза обычно по критерию минимума среднеквадратичного отклонения

$$f_i(\mathbf{IX}) = \sqrt{\frac{1}{p} \cdot \sum_{n=1}^p [Y_n(\mathbf{IX}) - Y_n^T]^2}, \quad (11)$$

где $Y_n(\mathbf{IX})$ – текущее значение характеристики фильтра на n -ой дискретной частоте диапазона определения, а Y_n^T – требуемое значение частотной характеристики.

Критерий максимальной ошибки

$$f_i(\mathbf{IX}) = \max_n |Y_n(\mathbf{IX}) - Y_n^T| \quad (12)$$

используется значительно реже. Очень часто ради экономии времени расчёта в соотношении (11) корень не извлекают и работают по ненормированному квадратичному критерию

$$f_i(\mathbf{IX}) = \sum_{n=1}^p [Y_n(\mathbf{IX}) - Y_n^T]^2. \quad (13)$$

Поисковое итеративное решение экстремальной задачи ЦНП (5) в заданном пространстве параметров осуществляет программный алгоритмический комплекс [7, 13], обращаясь к модельному блоку программы для расчёта текущих функциональных характеристик фильтра. Вектор \mathbf{IX}^0 , минимизирующий скалярную целевую функцию $F(\mathbf{IX})$ на множестве допустимых целочисленных решений (6), является эффективным решением задачи параметрического синтеза рекурсивного ЦЦФ.

Следует отметить, что, в отличие от классического аналитического расчёта, поисковое проектирование является, безусловно, интеллектуальным процессом. Множество сценариев решения сложной проектной задачи может быть предложено, много специфических приёмов и навыков может быть применено опытным проектировщиком-поисковиком для успешного решения сложной проектной задачи.

Типовым сценарием поискового проектирования каскадных ЦЦФ является сценарий в стиле динамического программирования, как последовательность поисковых задач с поэтапным повышением порядка проектируемого фильтра. На первом, стартовом этапе используют структуру низкого порядка (4-го или 6-го, не выше). Естественно, выполнение совокупных требований таким фильтром будет низким. На втором этапе уже данное решение используется в качестве исходного решения. Порядок фильтра при этом повышают путём дублирования найденных ранее коэффициентов звена (что в пакете синтеза может делаться автоматически). После нескольких подобных итераций и определяется итоговый порядок проектируемого фильтра, при котором погрешность выполнения сложных совокупных требований лежит в пределах заданного допуска.

Ниже показана возможность синтеза методом ЦНП целочисленных рекурсивных фильтров верхних частот минимальной разрядности представления данных с учётом заданного радиуса полюсов его передаточной функции в z -плоскости. Многофункциональный синтез при этом осуществляется как по критерию требуемой частотной селективности, так и по критерию возможного обеспечения линейности фазы в полосе пропускания фильтра. Таким образом, целевая функция в приведённых ниже проектных задачах формировалась в виде

взвешенной суммы двух частных целевых функций $f_{AЧХ}(\mathbf{IX})$ и $f_{ФЧХ}(\mathbf{IX})$, обеспечивающих соответственно выполнение требований как амплитудной селекции фильтра, так и линейности его фазы

$$F(\mathbf{IX}) = \beta_1 f_{AЧХ}(\mathbf{IX}) + \beta_2 f_{ФЧХ}(\mathbf{IX}), \quad (14)$$

где сами частные целевые функции формировались по аддитивному квадратичному критерию (13). Весовые коэффициенты целевых функций определялись практически в ходе поэтапного решения экстремальных задач целочисленного программирования.

Техническое задание для синтеза ФВЧ с требуемой фазовой линейностью в целочисленном пространстве 3-битовых параметров было следующим:

1. Полоса пропускания фильтра 0,24 – 0,5 в шкале относительных частот ff/s , где fs – частота дискретизации;
2. Коэффициент передачи в полосе пропускания 0 дБ с допуском $\pm 1,2$ дБ;
3. Неравномерность фазы в полосе не выше 10° ;
4. Переходная полоса 0,07 – 0,24;
5. Уровень подавления на частотах ниже 0,07 не менее 40 дБ;
6. Длина слова коэффициентов W_x – 3 бита;
7. Порядок рекурсивного фильтра – 20;
8. Максимально-допустимый радиус полюсов – 0,75;
9. Масштабирование коэффициентов передачи звеньев в интервал $\{0,5 - 2,5\}$.

Требуемая АЧХ фильтра приведена на рис. 3а (выделена пунктиром). При синтезе рекурсивного ФВЧ с линейной фазой целевая функция формировалась в виде взвешенной суммы частных целевых функций $f_{AЧХ}(\mathbf{IX})$ и $f_{ФЧХ}(\mathbf{IX})$ по соотношению (14). Сами частные функций формировались по аддитивному критерию (13).

Задача целочисленного программирования для многофункционального синтеза ФВЧ в форме каскадного соединения 10 звеньев второго порядка записывалась так

$$F^0(\mathbf{IX}^0) = \min F(\mathbf{IX}) \quad \mathbf{IX} \in I^{50} \quad (15)$$

$$-3 \leq a_i, b_i \leq 3 \quad i = \overline{1, 10}, \quad (16)$$

$$a_{0i} = 4 \quad i = \overline{1, 10}, \quad (17)$$

$$|Z_{pj}| < 0,75, \quad (18)$$

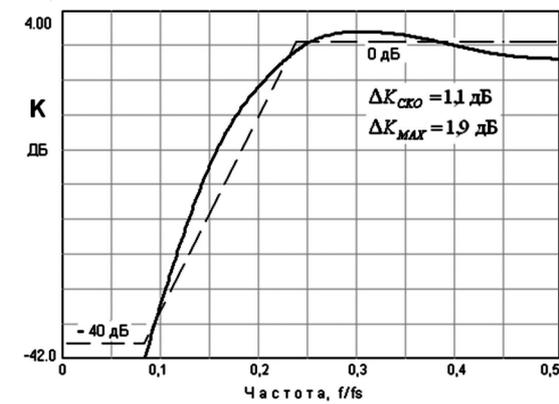
$$0,5 \leq K_i(e^{j\omega}) \leq 2,5 \quad i = \overline{1, 10}. \quad (19)$$

Таким образом, итоговая минимизация целевого функционала осуществлялась на 50-мерном целочисленном пространстве 3-битовых параметров в допустимой области (16) при выполнении функциональных ограничений устойчивости фильтра (18) по всем полюсам передаточной функции с радиусами, не превышающими $r_{\max} = 0,75$ в z -плоскости, и масштабировании (19) коэффициентов усиления звеньев в заданный интервал. Нормирующие коэффициенты (17) всех звеньев фильтра были одинаковыми. Для ввода структуры ППФ в программу использовался встроенный топологический редактор ЦНП-пакета, позволяющий сформировать файл исходных данных к решению конкретной задачи синтеза с указанием числа варьируемых коэффициентов, их начальных значений и границ изменения, а также возможного их дублирования в случае необходимости.

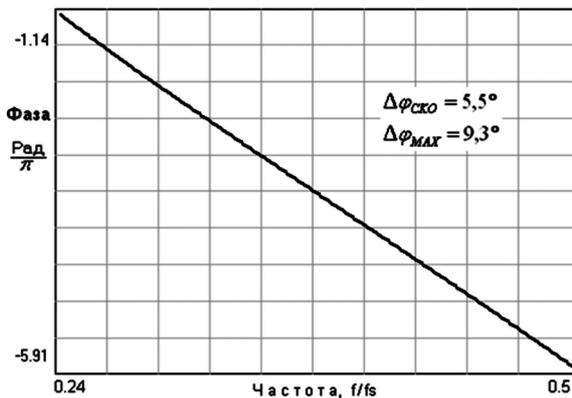
Таблица 1. Оптимальные коэффициенты трёхбитового ФВЧ

Звено фильтра	Коэффициенты передаточной функции фильтра					Усиление звена K_{max}
	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	
1	2	0	2	-3	-1	2,0
2	0	0	-2	3	0	1,3
3	0	2	0	3	1	1,6
4	2	1	0	-3	0	1,2
5	-3	2	1	3	-3	1,5
6	-2	0	1	3	-2	0,9
7	0	0	-3	3	1	1,3
8	0	0	0	3	-3	1,5
9	0	0	1	3	-2	1,1
10	1	0	-3	0	-1	1,3

В табл. 1 приведены оптимальные значения целочисленных 3-битовых коэффициентов передаточной функции по синтезу ФВЧ с одинаковой значимостью ($\beta_1 = \beta_2$) требований к АЧХ и ФЧХ, а также достигнутые значения коэффициентов усиления его звеньев. Графики его частотных характеристик представлены на рис. 3. Время решения данной задачи на стандартном персональном компьютере по сценарию динамического программирования и целевой функции (14) не превышало 10 минут.



а) АЧХ



б) ФЧХ

Рис. 3. Характеристики ФВЧ по синтезу

Что касается оценки фазовой нелинейности в полосе пропускания синтезированного фильтра, то по критерию влияния на форму выходного сигнала корректно применение в данном случае аддитивной среднеквадратичной оценки (СКО) фазовых искажений

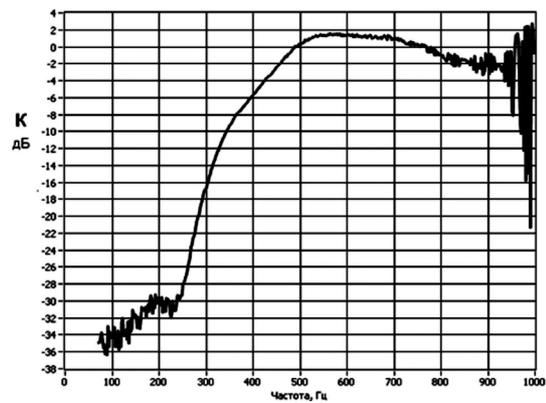
$$\Delta\varphi_{ско} = \sqrt{\frac{1}{P} \cdot \sum_{n=1}^P [\varphi_n(\mathbf{IX}) - \varphi_n^L]^2}, \quad (20)$$

а не оценки по критерию максимальной ошибки

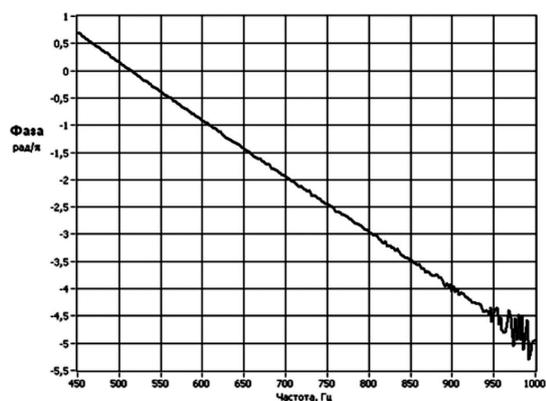
$$\Delta\varphi_{max} = \max_n |\varphi_n(\mathbf{IX}) - \varphi_n^L|,$$

где $\varphi_n(\mathbf{IX})$ – текущее значение ФЧХ на n -ой дискретной частоте интервала оценки, а φ_n^L – требуемое значение линейной ФЧХ. Это следует непосредственно из преобразования Фурье, которое определяет именно аддитивное влияние фазового и амплитудного спектра всех гармоник обрабатываемого сигнала на искажение его формы. Поэтому в дальнейшем для оценки фазовой нелинейности, а также неравномерности АЧХ в полосе пропускания фильтра, будет применяться, в основном, оценка по критерию СКО, хотя и максимальная ошибка будет также приводиться. В данном случае среднеквадратичная неравномерность АЧХ и ФЧХ в полосе пропускания 3-битового ФВЧ были равны соответственно $\Delta K_{ско} = 1,1$ дБ и $\Delta\varphi_{ско} = 5,5^\circ$. Максимальный радиус полюсов передаточной функции при этом был равен 0,71.

Практическая реализация фильтра осуществлялась на многофункциональном микроконтроллере MSP430F1611 с целочисленным RISC-ядром [14]. Результаты автоматизированного измерения частотных характеристик фильтра на всём интервале Найквиста для частоты дискретизации $f_s=2$ кГц. приведены на рис. 4. Так как выходной сигнал снимался непосредственно с ЦАП, то также наблюдается возрастание шумов измерения вблизи частоты Найквиста, где эффекты квантования сигнала наиболее выражены.



а) АЧХ



б) ФЧХ

Рис. 4. Экспериментальные измерения 3-битового ФВЧ

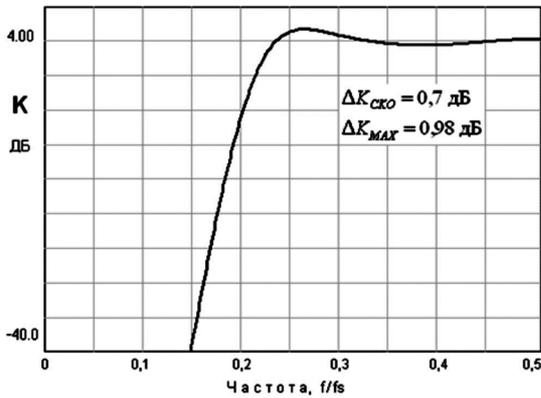
Анализ выходного сигнала при нулевом входе показал, что предельные циклы того или иного рода при максимальном радиусе полюсов 0,71 в синтезированном

фильтре отсутствуют. Таким образом, функциональные требования при ЦНП-синтезе трёхрядного рекурсивного ФВЧ с одинаковой значимостью ($\beta_1 = \beta_2$) требований к АЧХ и ФЧХ фильтра были выполнены.

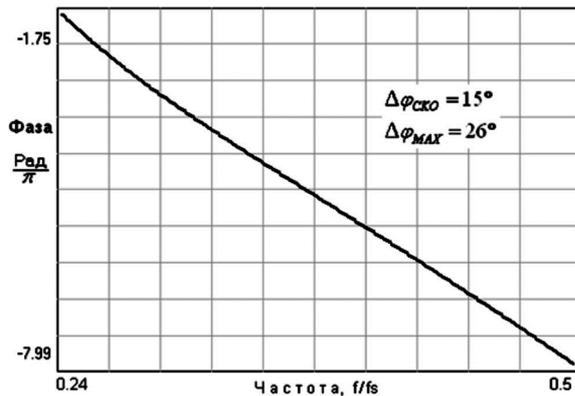
В табл. 2 приведены оптимальные значения 3-битовых коэффициентов передаточной функции уже по синтезу ФВЧ с различной значимостью ($\beta_1 = 5\beta_2$) требований к АЧХ и ФЧХ. Графики его частотных характеристик представлены на рис. 5.

Таблица 2. Оптимальные коэффициенты трёхбитового ФВЧ

Звено фильтра	Коэффициенты передаточной функции фильтра					Усиление звена K_{max}
	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	
1	-2	2	-1	-3	-2	1,8
2	1	0	-2	2	0	1,3
3	-1	2	0	2	-2	1,4
4	-1	1	2	-3	0	1,1
5	2	0	1	2	-3	2,0
6	-1	2	0	2	-3	1,7
7	0	0	-3	2	1	1,2
8	1	0	0	2	-3	1,7
9	0	0	0	2	-2	1,0
10	1	0	0	2	-2	1,3



а) АЧХ



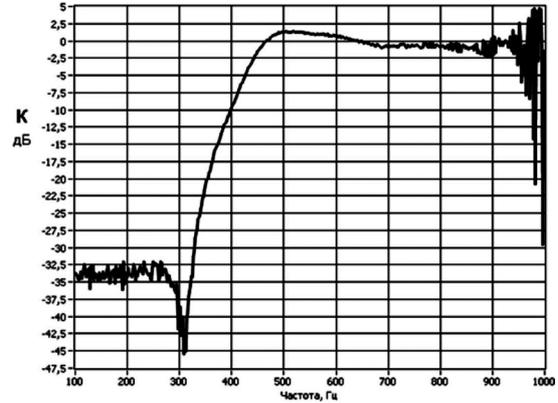
б) ФЧХ

Рис. 5. Характеристики ФВЧ по синтезу

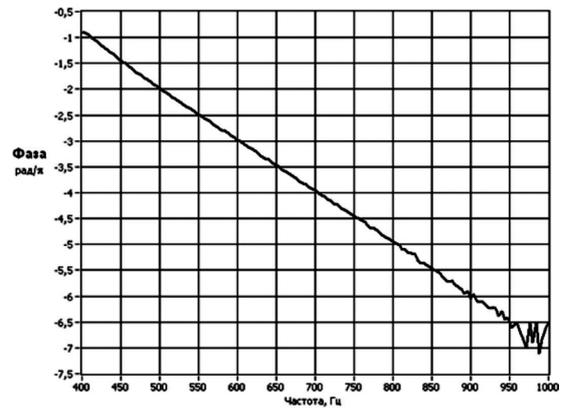
Как видно, в данном случае ширина переходной зоны существенно уменьшилась, а среднеквадратичная неравномерность АЧХ в полосе пропускания снизилась до значения $\Delta K_{CKO} = 0,7$ дБ, в то время как фазовые искажения возросли до $\Delta \varphi_{CKO} = 15^\circ$. Этого и следовало ожидать, так как в последовательной форме построения рекурсивный фильтр является квазимиимальнофазовой структурой, в которой модуль и аргумент передаточной функции связаны преобразованием Гильберта.

Строго минимальнофазовой структурой синтезированный фильтр не является, поскольку имеет нули коэффициента передачи вне пределов единичной окружности в z -плоскости.

Результаты измерения частотных характеристик фильтра (рис. 6) на всём интервале Найквиста для частоты дискретизации $f_s = 2$ кГц соответствуют данным синтеза.



а) АЧХ



б) ФЧХ

Рис. 6. Экспериментальные измерения 3-битового ФВЧ

Анализ выходного сигнала при нулевом входе показал, что предельные циклы того или иного рода при максимальном радиусе полюсов 0,71 в синтезированном фильтре также отсутствуют.

Заключение

Методы целочисленного нелинейного программирования в приложении к задачам проектирования линейных цифровых фильтров являются современной альтернативой традиционным методам проектирования цифровых фильтров [2 – 5]. Классическое проектирование базируется, как известно, на аналитическом представлении функциональных зависимостей, начиная с аналитической аппроксимации требуемой частотной характеристики БИХ-фильтра, что, естественно, приводит к чрезвычайной сложности аналитических вычислений даже в относительно простых задачах. Так аналитический расчёт цифровых фильтров или фазовых корректоров даже с учётом возможности обеспечения только требуемой фазовой линейности, как справедливо указано в [2, 3, 15], уже вызывает значительные математические трудности. Если же необходимо реализовать некий сложный закон изменения характеристики, например,

фазы коэффициента передачи либо её производных (ГВЗ и дисперсии), то аналитический расчёт фильтра становится невозможен. Принципиальное отличие ЦНП-синтеза состоит в применении современных численных методов машинного проектирования, позволяющих работать не с аналитическим, а с дискретным представлением характеристик проектируемого фильтра, тогда как исходные требуемые, так и текущие характеристики табулированы с заданной дискретностью их представления в частотной области и в вычислительной системе представлены двумерными массивами (векторами). Это даёт возможность, с одной стороны, без труда, применением численных методов, рассчитывать с заданной точностью все требуемые характеристики фильтра (включая ГВЗ и дисперсионные характеристики). С другой стороны – применять для синтеза технического решения весьма эффективные поисковые методы дискретного программирования, позволяющие осуществлять проектирование цифровых БИХ-фильтров непосредственно в целочисленном пространстве состояний. Критерием поиска при этом является соответствие совокупного текущего функционирования синтезируемого фильтра его требуемому функционированию. Современные алгоритмические комплексы целочисленной минимизации позволяют решать такие проектные задачи надёжно и эффективно при выполнении всех внешних требований и ограничений к работе цифрового фильтра, что даёт возможность существенно повысить качество проектируемых фильтров и сократить время их разработки.

Из материалов, приведённых в статье видно, что в сравнении с традиционными подходами, синтез цифровых фильтров методом целочисленного нелинейного программирования позволяет:

1. Осуществлять синтез фильтра по совокупности требуемых его частотных характеристик при произвольной форме их задания и заданной частотной шкале (линейной, логарифмической и др.).

2. Гарантировать устойчивость решения для целочисленных БИХ-фильтров приоритетным выполнением функциональных условий устойчивости в процессе ЦНП-синтеза фильтра. При этом возможно задание требуемого максимального радиуса полюсов передаточной функции при синтезе, что позволяет эффективно управлять добротностью проектируемого фильтра в случае возникновения предельных циклов того или иного рода.

3. Проектировать фильтры с любой, наперёд заданной разрядностью представления данных (вплоть до 3-х бит) непосредственно в целочисленном пространстве параметров (коэффициентов) фильтра.

Глобальная модельная идеология поиска определяет высокую надёжность отыскания эффективного решения экстремальной задачи ЦНП. Хорошего начального приближения (прототипа) здесь не требуется. Как правило, в проектных задачах со сложными селективными требованиями оптимальное решение определяется не из начальной точки, заданной пользователем, а из точки, сгенерированной самим поисковым алгоритмом решения задачи.

Необходимое масштабирование сигнала в каскад-

ных структурах может быть обеспечено непосредственно в ходе ЦНП-синтеза целочисленного фильтра. Здесь нет необходимости использования косвенных приёмов масштабирования усиления применением, например, L_p -нормы.

Целочисленная дискретизация пространства параметров (коэффициентов) фильтра позволяет получать проектные решения в целых числах, что снимает все ограничения по арифметике вычислений при реализации ЦНП-фильтров на любых цифровых платформах (сигнальных процессорах, контроллерах, FPGA) с заданной разрядностью представления данных, а также на кристаллах заказных или полужаказных СБИС.

Литература

1. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход. М.: Издательский дом «Вильямс», 2004.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. - М.: Мир, 1978.-848 с.
3. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2002. 608 с
4. EzIIR filter design package. <http://www.ti.com/tool/sprc072>.
5. Мингазин А.Т. Синтез передаточных функций цифровых фильтров в области дискретных значений коэффициентов (обзор). // Электронная техника. Сер. 10. 1993. № 1,2. С. 3-35.
6. Mathias Lang. Algorithms for the Constrained Design of Digital Filters with Arbitrary Magnitude and Phase Responses. // Vienna, June 1999.
7. Бугров В.Н. Проектирование цифровых фильтров методами целочисленного нелинейного программирования. // Вестник ННГУ, 2009, № 6. с. 61 – 70.
8. Шкелев Е.И., Бугров В.Н., Пройдаков В.И., Артемьев В.В. Целочисленные цифровые фильтры – эффективное решение для 8-битовых цифровых платформ. М., Компоненты и технологии, № 10, 2013, с. 104 – 110.
9. Бугров В.Н., Пройдаков В.И., Артемьев В.В. Синтез цифровых фильтров методами целочисленного нелинейного программирования. 17-ая международная конференция «Цифровая обработка сигналов и её применение – DSPA-2915», Тезисы докладов. М.: НТО РЭС им. А.С. Попова, 2015 г, с. 200 – 204.
10. Бугров В.Н. Сложноселективные задачи целочисленной цифровой фильтрации. М., Компоненты и технологии, № 10, 2016, с. 100-120.
11. Бугров В.Н, Морозов Н.С. Синтез целочисленных цифровых КИХ-фильтров с линейной фазой. // Цифровая обработка сигналов, №1, 2016, с. 14-19
12. Dempster A.G., Macleod M.D. IIR digital filter design using minimum adder multiplier blocks.//IEEE Trans.on Circuits and Systems-II, 1998, v. 45, N 6.
13. Воинов Б.С., Бугров В.Н., Воинов Б.Б. Информационные технологии и системы: поиск оптимальных, оригинальных и рациональных решений. М.: Наука, 2007, 730 с.
14. Семенов Б.Ю. Микроконтроллеры MSP430. Первое знакомство, М.: Изд-во «Солон-пресс», 2006.
15. Кисель В.А. Аналоговые и цифровые корректоры: Справочник. - М.: Радио и связь, 1986, 184 с.