

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ЦИКЛИЧЕСКОЙ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗАДОВА-ЧУ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ХАРАКТЕРИСТИК КВАНТОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Киселева Т.П., аспирант кафедры радиотехнических систем Московского технического университета связи и информатики (МТУСИ), e-mail: golzev2011@yandex.ru.

INVESTIGATION OF PROPERTIES OF CYCLIC AUTOCORRELATION FUNCTION OF THE SEQUENCE DEPENDING ON THE CHARACTERISTICS OF QUANTIZATION OF THE SEQUENCE ELEMENTS

Kiseleva T.P.

The article deals with the study of the properties of the cyclic autocorrelation function (ACF) complex multilevel sequences Zadoff-Chu depending on the number of quantization levels of the elementary signals of the sequence in two ways: without taking into account the quantization noise and these noises.

The mathematical model of the Zadoff-Chu sequence, the cyclic autocorrelation of the sequence, the linear characteristics of the quantizer and the calculation formula for calculating the ratio of the square of the maximum of the ACF of the Zadoff-Chu sequence to the average of the square of side lobes, the relationship module, the maximum value of the side lobe to the maximum of the ACF and graphs the ratio of the square of the maximum of the ACF quantized sequence Zadoff-Chu to average value of a square of side lobes, depending on the characteristics of the quantization with and without allowance for the quantization noise.

Key words: OFDM, the quantization step of the quantization the number of quantization levels, the quantizer characteristic, the sequence Zadoff-Chu (ZC), the cyclic autocorrelation function (ACF).

Ключевые слова OFDM, квантование, шаг квантования, число уровней квантования, характеристика квантователя, последовательность Задова-Чу (ZC), циклическая автокорреляционная функция (АКФ).

Введение

Постановка задачи исследования свойств циклической АКФ последовательностей, передаваемых по широкополосным каналам связи, определяется необходимостью снижения программно – аппаратных затрат и повышению скорости обработки данных при построении систем приема, передачи и обработки цифровой информации. Многоуровневые цифровые данные повышают точность при обработке информации, но одновременно снижают быстродействие и производительность систем, которые достигаются малоуровневым представлением обрабатываемых данных.

При сокращении разрядности данных до 8 и менее разрядов для функций приемопередатчиков можно использовать дешевые 8-разрядные микроконтроллеры, как старых разработок (конца 90-х – начала 2000-х годов), так и новейшие разработки специализированных контроллеров приемопередатчиков и обработки данных. Все еще актуален контроллер Am79C440, поддерживающий телефонный протокол и управление радиочастотным приемопередатчиком диапазона 902-928 МГц с GMSK – гауссовской частотной модуляцией. Его ядром является 8-разрядный микроконтроллер, совместимый с семейством 8051 [1].

Проведено исследование свойств циклической автокорреляционной функции (АКФ) многоуровневых комплексных последовательностей Задова-Чу в зависимости от числа уровней квантования элементарных сигналов последовательностей в двух вариантах: без учета шумов квантования и с учетом этих шумов. Приведены математические модели последовательности Задова-Чу, циклической АКФ этой последовательности, характеристики линейного квантователя, а также расчетные формулы для вычисления отношения квадрата максимума АКФ последовательности Задова-Чу к среднему значению квадрата боковых лепестков, отношения модуля максимальной величины боковых лепестков к максимуму АКФ. Построены графики отношения квадрата максимума АКФ квантованной последовательности Задова-Чу к среднему значению квадрата боковых лепестков в зависимости от характеристик квантования с учетом и без учета шумов квантования.

Из числа последних разработок – процессоры платформы «Мультикор» (1892ВМ3Т) от АО НПЦ «ЭЛВИС». Это сигнальные процессоры на основе RISC-ядра с переменной разрядностью данных (1, 8, 16, 32 разряда данных) и повышением скорости обработки данных при снижении их разрядности. Процессоры предназначены для применения в системах связи и радиолокации [2]. Для гибкой конфигурации разрядности данных широко используются ПЛИС (программируемые логические интегральные схемы), как например, продукция Xilinx; некоторые семейства Xilinx построены на Flash-технологии и применяются в мобильных приложениях.

В данной работе исследуются свойства комплексной квантованной последовательности Задова-Чу и ее цик-

лической АКФ, в условиях малоразрядного представления обрабатываемых данных. Последовательности Задова-Чу применяются при формировании кода первичной синхронизации в технологии LTE OFDMA ((Long Term Evolution Orthogonal Frequency Division Multiple Access) [3] – одной из наиболее популярных технологий современных телекоммуникаций.

Последовательность Задова-Чу: свойства и математическая модель

Основной целью использования технологии OFDM является устранение влияния на качество приема и различения сигналов межсимвольных искажений, вызываемых явлением многолучевого распространения сигнала в канале связи. Подробное описание принципов формирования сигналов OFDM и SC-FDMA технологий приводится в [3, 4].

Помимо служебных и пользовательских данных канала связи технологии LTE в восходящем направлении необходимо передавать заранее известные базовой станции (БС) последовательности информационных символов для обеспечения условий когерентного приема сигналов, то есть синхронизирующие последовательности. Комплексные последовательности, используемые в качестве последовательностей первичной синхронизации (PSS) в технологии LTE, должны обладать следующими свойствами:

- последовательности должны иметь хорошие автокорреляционные и взаимокорреляционные свойства;
- количество возможных последовательностей должно быть достаточным для распределения среди абонентов, работающих как в одной соте, так и в соседних.

Таковыми последовательностями являются последовательности постоянной амплитуды с нулевой автокорреляцией (CAZAC-последовательности); примером таких последовательностей являются комплексные последовательности Задова-Чу (Zadoff-Chu sequences – ZC). Последовательностей ZC может быть сгенерировано достаточно много при условии, что длина последовательности есть простое число.

Последовательности ZC , длина которых есть простое число, обладают следующими свойствами [4]:

- имеют постоянную амплитуду как во временной, так и в частотной областях;
- циклическая (периодическая) автокорреляционная функция последовательности ZC идеальна, т.е. является дельта-функцией;
- взаимная корреляционная функция двух последовательностей ZC , образованных разными корнями,

имеет постоянное для всех сдвигов значение $\frac{1}{\sqrt{N_{ZC}}}$,

где N_{ZC} – длина последовательностей.

Математическая модель последовательности ZC [6]:

$$a_q(n) = \exp\left\{-i * 2\pi q * \frac{[n(n+1)/2] + l * n}{N_{ZC}}\right\} \quad (1)$$

– для ZC с нечетным числом элементов N_{ZC} ;

$$a_q(n) = \exp\left\{-i * 2\pi q * \frac{(n^2/2) + l * n}{N_{ZC}}\right\} \quad (2)$$

– для ZC с четным числом элементов, где q – индекс (корень) последовательности ZC ; $a_q(n)$ – n -й элемент ZC ; N_{ZC} – длина последовательности ZC (количество элементов).

Последовательность ZC любой длины имеет идеальную циклическую автокорреляционную функцию (АКФ), то есть корреляционную функцию циклического сдвига ZC относительно самой себя. При любом сдвиге $1 \leq \tau \leq N_{ZC}$ значение автокорреляционной функции $r_{KK}(\tau)$ равно 0, кроме $\tau = 0$, когда $r_{KK}(\tau) = \delta(0)$ – функция Дирака. Это свойство циклической АКФ можно представить как:

$$r_{KK}(\tau) = \sum_{n=0}^{N_{ZC}-1} a_K(n) * a_K^*[n+\tau] = \delta(\tau). \quad (3)$$

Индекс $r_{KK}(\tau)$ при изменении $1 \leq K \leq N_{ZC}-1$ означает номер циклического сдвига последовательности ZC относительно своей неподвижной копии. При каждом циклическом сдвиге вычисляется корреляционная функция сдвинутой на K разрядов ZC относительно неподвижной ZC , согласно выражению (3).

В данной работе свойства последовательностей ZC рассматриваются на примере последовательности ZC (25,139). В записи последовательности ZC (25,139) 25 – индекс последовательности ($q = 25$), 139 – длина последовательности ($N_{ZC} = 139$).

График циклической АКФ последовательности ZC (25,139) представлен на рис. 1. Максимум циклической АКФ ZC (25,139) равен 139. Боковые лепестки циклической АКФ ZC отсутствуют. Между максимумами АКФ – нулевой уровень. Период циклической АКФ равен 139 временным интервалам элементов ZC (25,139).



Рис. 1. Действительная часть циклической АКФ ZC (25,139)

Характеристика квантователя последовательности Задова-Чу

В данной работе проведено исследование зависимости свойств АКФ последовательностей ZC от числа уровней квантования. Моделирование квантования ZC проводилось в операционной среде МАТЛАБ. Для проведения моделирования необходимо выбрать математическую модель характеристики квантователя и определить основные принципы процедуры квантования элементарных сигналов (элементов) последовательности на примере ZC (25,139).

Математическая модель линейного квантователя:

$$H_q(L) = \frac{[A - (-A)]}{L-1},$$

где $H_q(L)$ – характеристика квантователя в зависимости от числа уровней квантования L , где $\pm A$ – диапазон квантуемых величин.

Пусть $ZC(25,139)$ – неквантованное значение последовательности Задова-Чу, $ZC_q(25,139)$ – квантованное значение последовательности Задова-Чу.

Диапазон квантуемых величин для последовательности Задова-Чу: $+1 \dots (-1)$, следовательно, шаг квантования $Q = (1 - (-1)) / (L - 1) = 2 / (L - 1)$, то есть $Q = H_q(L)$.

Тогда выражение для квантованной последовательности ZC примет вид:

$$ZC_q = \left\lfloor \frac{ZC}{Q} \right\rfloor * Q,$$

где выражение в квадратных полускобках $\left\lfloor \frac{ZC}{Q} \right\rfloor$ означает целую часть отношения внутри полускобок.

На рис. 2 представлена линейная характеристика квантователя с числом уровней квантователя $L = 16$.

Характеристика квантователя с числом уровней квантования L=16

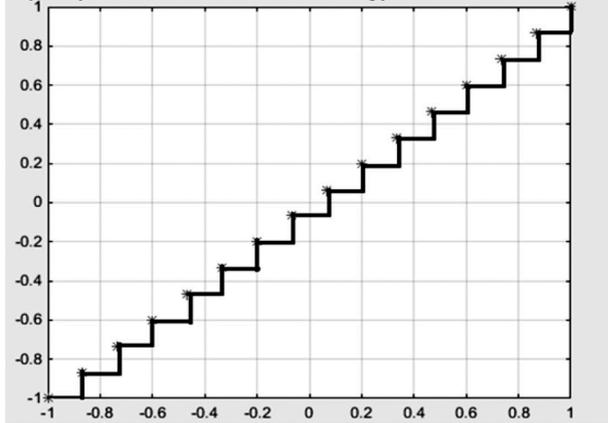


Рис. 2. Характеристика квантователя с числом уровней квантования 16

При квантовании вычисляется разность между величиной квантуемого элементарного сигнала до квантования и величиной $ZC_q = \left\lfloor \frac{ZC}{Q} \right\rfloor * Q$, то есть $\Delta = ZC - ZC_q$.

Если $\Delta \geq Q/2$, то к целой части числа уровней квантования данного элементарного сигнала добавляется 1, то есть квантованная величина элементарного сигнала равна:

$$ZC_q = \left(\left\lfloor \frac{ZC}{Q} \right\rfloor + 1 \right) * Q.$$

Результаты исследования зависимости свойств АКФ ZC от числа уровней квантования

Исследования проводились для числа уровней квантования $L = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ в двух вариантах:

- без учета шумов квантования;
- с учетом шумов квантования.

В первом варианте исследований формировался массив значений комплексной последовательности ZC

(25,139), затем – квантование с выбранным числом уровней отдельно действительной и мнимой частей $ZC(25,139)$, после чего вычислялась циклическая АКФ массива комплексной последовательности с квантованными действительной и мнимой частью. Строился график циклической АКФ квантованной комплексной последовательности $ZC_q(25,139)$, вычислялись отношения квадрата максимума АКФ последовательности ZC_q к среднему значению квадрата боковых лепестков (дБ) и отношение максимального уровня боковых лепестков к максимуму АКФ в процентах.

Во втором варианте исследований определялась математическая модель шума квантования и расчетные формулы статистических характеристик шума (математическое ожидание и дисперсия) [7]. В данной работе вероятностные оценки шума квантования основаны на представлении ошибок квантования как случайного стационарного процесса, не коррелированного с квантуемым сигналом. Любые два отсчета последовательности ошибок квантования не коррелированы. Распределение вероятности ошибок квантования является равномерным в пределах соответствующего уровня квантования.

$M_n = -0,5 * Q$ – математическое ожидание шума квантования,

$D_n = \frac{Q^2}{12}$ – дисперсия шума квантования, где Q – шаг квантования

Затем в системе математического моделирования МАТЛАБ формировалась математическая модель комплексной квантованной последовательности $ZC_q(25,139)$, с аддитивным шумом квантования, характеристики которого определялись для каждого уровня квантования L . Далее – вычисление циклической АКФ последовательности ZC_q с учетом шума квантования, построение графиков и вычисление характеристик, подобных указанным выше.

Для оценки АКФ по уровню боковых лепестков используют два параметра: мерит-фактор – отношение энергии главного лепестка к суммарной энергии всех боковых лепестков [8]:

$$MF = \frac{R_0}{\sum_i R_i},$$

и уровень максимального бокового лепестка (peak sidelobe):

$$PSL = \max(R_i).$$

В данной работе предлагается вычислять следующие величины оценки АКФ по уровню боковых лепестков:

$$MF_m = \frac{R_m^2}{\left(\sum_{i=0}^N R_i^2 \right) / N} \text{ (dB)} \text{ – отношение квадрата максимума циклической АКФ к среднему значению квадрата боковых лепестков в децибелах, где } R_m^2 \text{ – величина квадрата максимума (центрального пика) АКФ, } R_i^2 \text{ – величина квадрата } i\text{-го отсчета боковых лепестков АКФ, } N \text{ – длина последовательности } ZC;$$

$$PSL_m = \frac{|R_{i_{max}}|}{R_m} (\%) - \text{отношение модуля максимального значения боковых лепестков к максимуму циклической АКФ в процентах, где } R_{i_{max}} - \text{максимальное значение боковых лепестков, } R_m - \text{величина максимума АКФ.}$$

ного значения боковых лепестков к максимуму циклической АКФ в процентах, где $R_{i_{max}}$ – максимальное значение боковых лепестков, R_m – величина максимума АКФ.

Q шаг квант	MF_m (db) без учета шумов квант	PSL_m (%) без учета шумов квант	MF_m (db) без учета шумов квант	PSL_m (%) без учета шумов квант
1	25,1624	13,03 %	24,5609	12,21 %
1/2	25,2161	13,76%	24,9892	14,82%
1/4	33,1632	5,28%	32,6059	5,45%
1/8	39,5884	2,66%	38,4760	2,92%
1/16	41,9980	1,37%	41,3267	1,57%
1/32	42,5918	1,17%	42,5599	1,33%

Учитывая случайный характер шумов квантования, последовательности ZC_q с учетом шумов квантования усредняются по 10 вариантам их моделирования. Сумма боковых лепестков АКФ не включает величину максимума АКФ (центрального пика АКФ). Результаты вычислений отношения квадрата максимума циклической АКФ к среднему значению квадрата боковых лепестков АКФ квантованной последовательности MF_m (в децибелах), отношение модуля максимального значения боковых лепестков к максимуму циклической АКФ PSL_m (в процентах) без учета и с учетом шумов квантования ZC_q (25,139) в зависимости от шага квантования отражены в табл. 1 и графиках на рис. 3.

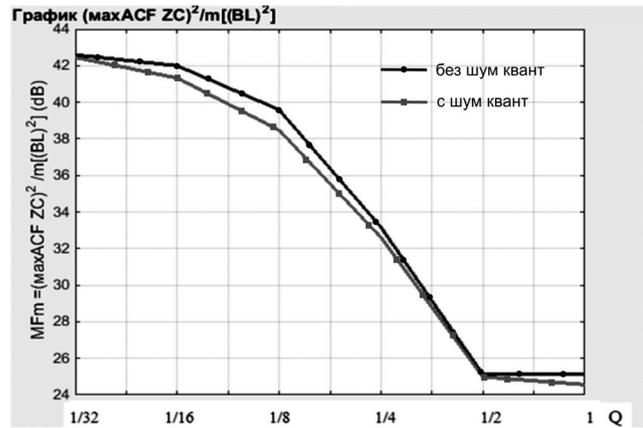


Рис. 3. График MF_m – отношение квадрата максимума циклической АКФ к среднему значению квадрата боковых лепестков АКФ ZC_q (25,139) в зависимости от шага квантования Q без учета шумов квантования и с учетом шумов квантования

На рис. 4 а-7 а представлены графики циклической АКФ квантованной последовательности ZC_q (25,139) с уровнями квантования $L = 64$ (рис. 4а), $L = 16$ (рис 5 а), $L = 4$ (рис. 6а), $L = 2$ (рис. 7 а). На рис. 4 б-7 б представлены соответственно графики циклической АКФ квантованной последовательности ZC (25,139) в увеличенном масштабе по осям X, Y .

На графиках циклической АКФ показаны в увеличенном формате боковые лепестки АКФ в окрестности максимума циклической АКФ (рис. 4 б-7 б).

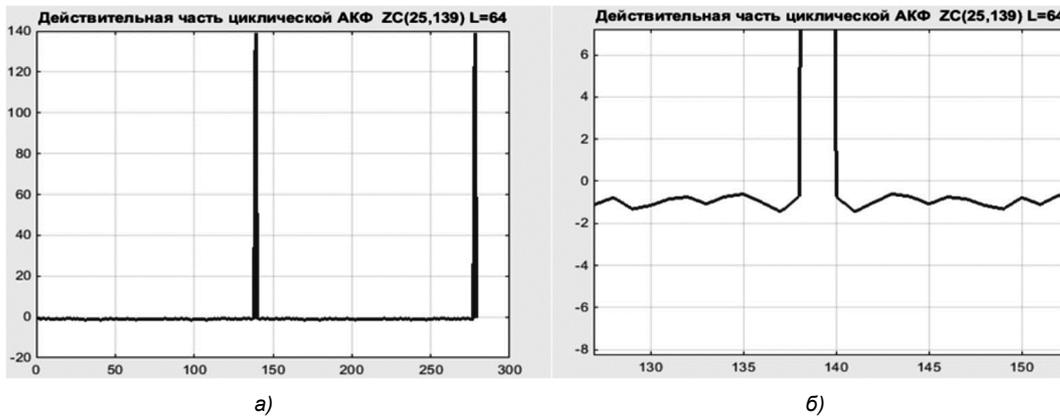


Рис. 4. а) действительная часть циклической АКФ ZC (25,139) с числом уровней квантования $L = 64$; б) то же в увеличенном масштабе

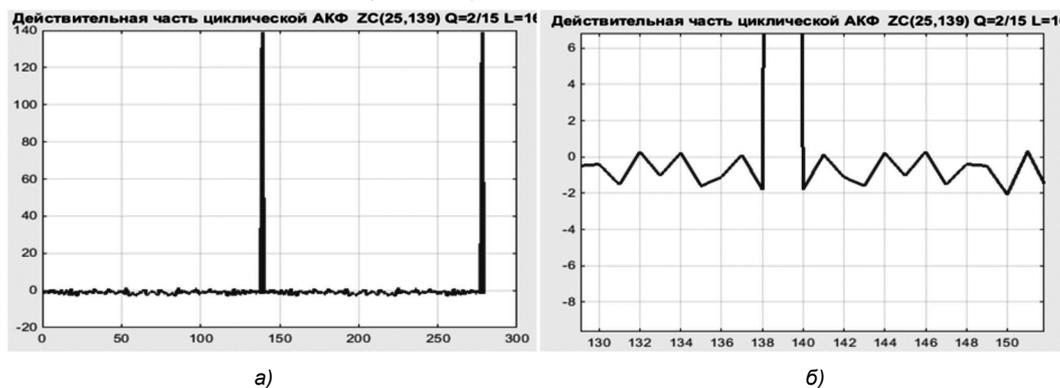


Рис. 5. а) действительная часть циклической АКФ ZC (25,139) с числом уровней квантования $L = 16$; б) то же в увеличенном масштабе

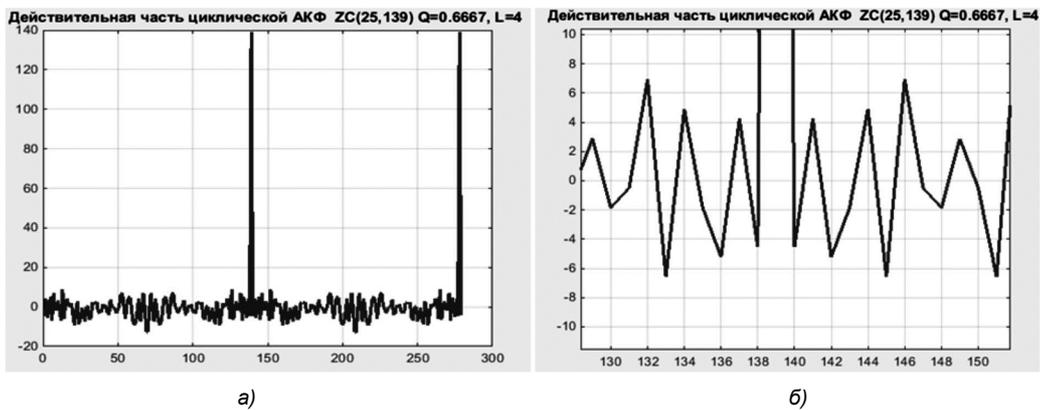


Рис. 6. а) Действительная часть циклической АКФ $ZC(25,139)$ с числом уровней квантования $L = 4$; б) то же в увеличенном масштабе

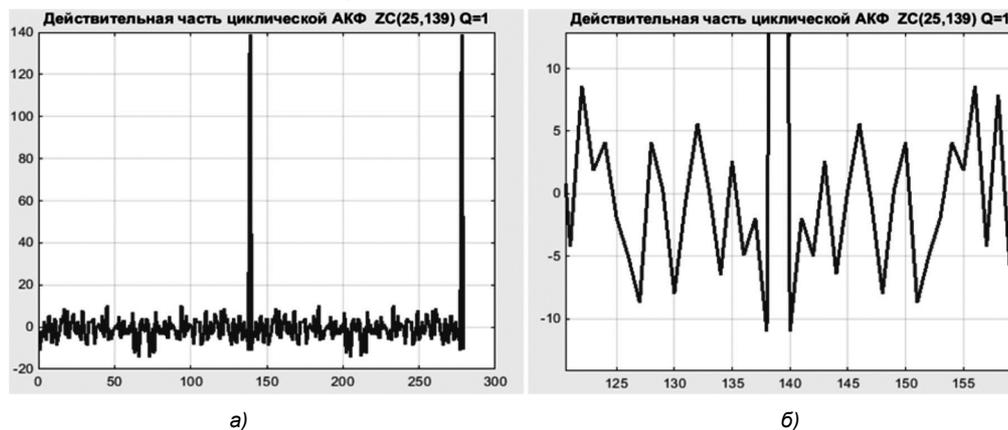


Рис. 7. а) Действительная часть циклической АКФ $ZC(25,139)$ с числом уровней квантования $L = 2$; б) то же в увеличенном масштабе

Заключение

Из приведенных результатов моделирования следует вывод, что с уменьшением числа уровней квантования с 64 до 2 быстро растет значение боковых лепестков циклической АКФ не наблюдалось: отношение модуля максимального значения боковых лепестков к максимуму циклической АКФ увеличивалось с 1,17 % от величины максимума АКФ при 64-х уровнях квантования до 13,03 % при 2-х уровнях квантования. Шумы квантования производят интегрирующее (усредняющее) действие на величины боковых лепестков (в основном, для уровней квантования $L = 2, L = 4, L = 8$). Отношение модуля максимального значения боковых лепестков к максимуму циклической АКФ с учетом шумов квантования меняется с 1,33 % до 12,21 %. При малых уровнях квантования отмечается снижение этой величины отношения. Для уровней квантования $L = 32, L = 64$ отношение квадрата максимума АКФ к квадрату среднего значения уровня боковых лепестков существенно не меняется.

Из данных табл. 1 и графиков на рис. 3 следует принципиальная возможность снижения уровней квантования с $2^{16} \dots 2^{32}$, что характерно для мощных сигнальных процессоров, до $2^4 \dots 2^6$, что позволяет применять при построении устройств передачи, приема и обработки данных дешевые сигнальные RISC – процессоры с высоким быстродействием и микроконтроллеры.

При увеличении числа уровней квантования свыше 64 уменьшение уровня боковых лепестков мало влияет

на характеристики циклической АКФ, поэтому в данной работе результаты моделирования при $L > 64$ не рассматривались. Таким образом, кодирование элементарных сигналов последовательности ZC 6-разрядным кодом ($2^6 = 64$) вполне достаточно для получения хороших корреляционных свойств последовательности ZC .

Литература

1. Малыгин И.В. Наборы микросхем для построения устройств Spread Spectrum. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://cxem.net/sprav/sprav110.php>.
2. Цифровой сигнальный процессор 1892BM3T. // Общероссийский информационный ресурс. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://multicore.ru/in-dex.php?id=48>.
3. ETSI TS 136 211 V10.0.0 (2011-01). Technical Specification. – European Telecommunications Standards Institute, 2011 – 104 с.
4. Гельгор А.Л., Попов Е.А. Технология LTE мобильной передачи данных: учебное пособие. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2011 – 204 с.
5. Райал Ф. Физический уровень LTE. – Электронные компоненты, №10, 2010, 36-41с.
6. Sesia S., Toufik I., Baker M. LTE – The UMTS Long Term Evolution: From Theory to Practice. – Torquay, UK: John Wiley & Sons, 2009 – 611с.
7. Шум квантования. // Общероссийский информационный ресурс. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/212854>.
8. Хасанов М.С., Курганов В.В. Методы определения коэффициентов квазиоптимального КИХ-фильтра свертки псевдослучайной бинарной последовательности. // Общероссийский информационный ресурс. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mes-conference.ru/data/year2014/pdf/D145.pdf>.