

УДК 621.391

## СИНТЕЗ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА С ПРОИЗВОЛЬНО ЗАДАННОЙ СКОРОСТЬЮ СПАДА ЛЕПЕСТКОВ СПЕКТРА И МИНИМАЛЬНЫМ УРОВНЕМ МАКСИМАЛЬНОГО БОКОВОГО ЛЕПЕСТКА

*Зайцев Г.В., д.т.н., зам. начальника СКБ ПАО «НПО «Алмаз», e-mail: gennady-zaytsev@yandex.ru;  
Хзмальян А.Д., д.ф.-м.н., главный специалист направления ПАО «НПО «Алмаз».*

### SYNTHESIS OF WINDOW FUNCTIONS FOR HARMONIC ANALYSIS WITH ARBITRARY SIDELobe FALLOFF RATE AND MINIMUM LEVEL OF THE HIGHEST SIDELobe

*Zaytsev G.V., Khzmalyan A.D.*

*Application of window functions is an inherent part of spectral analysis algorithms. Sidelobe falloff rate of the known functions is multiple of 6 decibel per octave. The paper presents a new type of window functions with an arbitrary given falloff rate. Representation of these functions is simple enough for implementation in real-time embedded systems. A synthesis algorithm for the optimal functions that meet the minimax criterion for the sidelobe level is developed. Optimal functions with falloff rates 9, 15, and 21 decibel per octave and highest sidelobe level down to minus 200 dB are synthesized and described and their parameters are tabulated.*

**Key words:** digital signal processing, falloff rate, harmonic analysis, minimax criterion, window function.

**Ключевые слова:** весовая (оконная) функция, минимаксный критерий, скорость спада лепестков, спектральный анализ, цифровая обработка сигналов.

#### Введение

Цифровой спектральный анализ сигналов, выполняемый, как правило, с помощью алгоритмов дискретного преобразования Фурье, широко используется в различных областях науки и техники. При этом перед вычислением спектра анализируемый сигнал умножается на действительную положительную функцию, называемую весовой, или оконной. Обзор известных весовых функций можно найти в [1, 2].

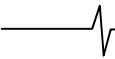
Весовая функция служит для снижения эффекта размывания спектральных линий [1]. Для этого спектр весовой функции должен иметь малую ширину главного лепестка и низкий уровень боковых лепестков. Поскольку эти параметры невозможно сделать малыми одновременно, при выборе весовой функции необходимо искать наиболее подходящий баланс между ними. Решению этой задачи при тех или иных ограничениях посвящены многочисленные работы. Однако асимптотическая скорость спада дальних лепестков спектра у известных весовых функций принимает только дискретные значения, кратные 6 децибелам на октаву [1, 2]. Весовых функций с промежуточными скоростями спада, насколько известно авторам, не описано.

В настоящей работе предложено семейство весовых функций, обеспечивающих произвольно заданную скорость спада лепестков спектра и простую реализацию. Разработан алгоритм синтеза оптимальных весовых функций, который минимизирует уровень максимального бокового лепестка в заданной области частот вне главного лепестка, а параметры полученных функций

*Применение весовых функций является неотъемлемой частью алгоритмов цифрового спектрального анализа. Известные весовые функции имеют скорость спада боковых лепестков спектра, кратную 6 децибелам на октаву (дБ/окт.). В настоящей работе предложен способ построения весовых функций с произвольно заданной скоростью спада лепестков. Функции имеют простой вид, обеспечивающий возможность вычисления в реальном масштабе времени. Для предложенных функций разработан метод оптимизации по критерию минимума максимального бокового лепестка на заданном отрезке частотной оси вне главного лепестка. Синтезированы оптимальные весовые функции со скоростями спада лепестков 9, 15 и 21 дБ/окт. и уровнем максимального лепестка до минус 200 дБ, и их параметры табулированы.*

табулированы. Работа направлена на приложения, в которых необходимы высокий уровень подавления боковых лепестков при малом расширении главного лепестка и возможность вычисления функции в реальном масштабе времени.

Введем необходимые обозначения. Пусть анализируемый сигнал представлен  $N$  временными отсчетами, взятыми с шагом  $\delta$ . Для упрощения формул удобно вместо размерных величин времени  $t_{\text{abs}}$  и частоты  $f_{\text{abs}}$  использовать безразмерные  $t$  и  $f$ :  $t = t_{\text{abs}}/\delta$ ,  $f = f_{\text{abs}}\delta$ . Начало временной оси расположим в центре между крайними отсчетами. Тогда моменты выборок равны  $t_p = -0,5(N-1) + p$ ,  $p = 0, 1, \dots, N-1$ . Спектр такого сигнала периодичен с периодом 1, и его достаточно анализировать на периоде  $f \in [-0,5, 0,5]$ . Для расчета спектра взвешенного дискретного сигнала необходимы только отсчеты весовой функции в точках  $t_p$ , однако при теоретическом анализе и практическом применении весовую функцию  $w(t)$  удобно рассматривать как непрерывную, а необходимые дискретные отсчеты – как значения этой непрерывной функции в точках  $t_p$ .



Спектр  $W(f)$  непрерывной функции  $w(t)$ , используемой при гармоническом анализе непрерывного сигнала, определяется интегральным преобразованием Фурье:

$$W_c(f) = \int_{-N/2}^{N/2} w(t) \exp(-j2\pi t f) dt, \quad -\infty < f < \infty, \quad (1)$$

а в дискретном случае – формулой дискретного по времени преобразования Фурье [3]

$$W(f) = \sum_{p=0}^{N-1} w(t_p) \exp(-j2\pi t_p f), \quad f \in [-0,5; 0,5]. \quad (2)$$

Спектры (1) и (2) связаны известным соотношением [3]:

$$W(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_c(f+k). \quad (3)$$

Из этой формулы следует, что характеристики спектров (1) и (2) аналогичны.

Так как в настоящей работе рассматриваются весовые функции для цифровой обработки, то при расчете их параметров будет использоваться формула (2) за исключением следующего параметра, изначально определенного для непрерывных функций. Асимптотическая скорость спада боковых лепестков спектра  $W(f)$  определяется как величина  $V$  снижения максимума модуля лепестков при увеличении частоты вдвое и измеряется в децибелах на октаву (сокращенно дБ/окт.). Строго говоря, этот параметр характеризует непрерывную функцию  $w(t)$ , однако используется и для дискретных весовых функций, когда число выборок  $N$  велико. Для краткости слово «асимптотическая» в дальнейшем опускается.

### Базисные функции

Для обеспечения простоты вычисления представим рассматриваемые весовые функции в виде линейной комбинации небольшого числа  $m$  базисных функций  $\phi(p_k, t)$ :

$$w(\mathbf{b}, t) = \sum_{k=0}^m b_k \phi(p_k, t), \quad -0,5N \leq t \leq 0,5N, \quad (4)$$

где  $b_0, b_1, \dots, b_m$  – коэффициенты, образующие вектор  $\mathbf{b}$ , являющийся аргументом весовой функции, а  $p_k$  – параметр базисной функции.

Наиболее часто в качестве базисных функций используются тригонометрические функции ряда Фурье, т.е. косинусоидальные функции, у которых на интервале наблюдения укладывается целое число периодов. При этом высокие характеристики весовых функций можно получить при малом порядке  $m$  [1], что обеспечивает простоту вычисления. Уже для функций порядков 1–3 можно получить уровень боковых лепестков, достаточно низкий для большинства приложений. Многие классические весовые функции имеют указанное представление [1, 2, 4, 5], и именно такие функции наиболее востребованы на практике. Однако при этом возможные скорости спада лепестков ограничены величинами, кратными 6 дБ/окт.

Базисные функции, предлагаемые в настоящей работе, имеют следующий вид:

$$\phi(p, t) = \cos^p(\pi t / N), \quad -0,5N \leq t \leq 0,5N, \quad (5)$$

где  $p \geq 0$  – неотрицательное действительное число. В области определения весовой функции  $|t| \leq 0,5N$  укла-

дывается половина периода косинуса (5). Для целых  $p$  функции вида (5) являются одним из классических примеров весовых функций [1], однако для нецелых  $p$  такие функции не анализировались.

Рассмотрим свойства спектра (1) функции (5). Так как функция (5) действительна и симметрична, то ее спектр можно записать в виде

$$\Phi_c(p, f) = \int_{-N/2}^{N/2} \cos^p(\pi t / N) \cos(2\pi t f) dt, \quad -\infty < f < \infty. \quad (6)$$

Эта функция симметрична относительно нуля частот, поэтому достаточно проанализировать ее на интервале  $0 \leq f < \infty$ .

Интеграл (6) согласно [6], № 332.9с, (также [7], № 3.631.9 и № 8.384.1) при  $p > -1$  равен

$$\Phi_c(p, f) = \frac{N \Gamma(p+1)}{2^p \Gamma[0,5(p+2Nf+2)] \Gamma[0,5(p-2Nf+2)]}, \quad (7)$$

где символ  $\Gamma(\dots)$  означает гамма-функцию. Преобразуя вторую гамма-функцию в знаменателе (7) с помощью известного соотношения  $[\Gamma(0,5-x)]^{-1} = \Gamma(0,5+x) \times \cos(\pi x) / \pi$  [7], № 8.334.2, при  $x = 0,5(2Nf-p-1)$ , получаем выражение для спектра базисной функции (5):

$$\Phi_c(p, f) = \frac{N \Gamma(p+1)}{2^p \pi} \times \frac{\Gamma[0,5(2Nf-p)]}{\Gamma[0,5(2Nf+p+2)]} \cos[0,5\pi(2Nf-p-1)]. \quad (8)$$

Формулу (8) можно трактовать как произведение осциллирующего множителя (косинуса), описывающего лепестки спектра, на их огибающую. Оценим асимптотическое поведение спектра (8) при  $f \rightarrow \infty$ . В силу соотношения  $\lim_{z \rightarrow \infty} [\Gamma(z+a) / \Gamma(z)] = z^a$  [7], № 8.328.2, полагая  $z = 0,5(2Nf+p+2)$  и  $a = -(p+1)$ , получаем асимптотическое равенство

$$\Phi_c(p, f) \sim (2N)^{-p} \pi^{-1} \Gamma(p+1) \times \cos[0,5\pi(2Nf-p-1)] f^{-(p+1)}, \quad (9)$$

Таким образом, при  $f \rightarrow \infty$  спектр (6) имеет асимптотическую оценку

$$\Phi_c(p, f) = O(f^{-(p+1)}). \quad (10)$$

Из (10) следует, что боковые лепестки спектра базисной функции (5) спадают со скоростью  $V = 6(p+1)$  дБ/окт. Выбор степени  $p$  в соответствии с соотношением  $p = V/6 - 1$  позволяет получить произвольно заданное действительное значение скорости спада  $V \geq 6$  дБ/окт.

Выражение (8) определяет также нули спектра базисной функции. Они находятся в тех нулях функции косинуса, для которых аргумент  $0,5(2Nf-p)$  гамма-функции положителен, т.е. при  $0,5\pi(2Nf-p-1) = \pi/2 + k\pi$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Следовательно, координаты нулей равны:

$$f_z = (0,5p+k+1) / N, \quad k = 0, 1, \dots \quad (11)$$

При заданном  $p$  первый ноль имеет место при  $f_z = 0,5(p+1) / N$ , а далее нули следуют периодически с периодом  $1/N$ .

Весовая функция (4) содержит несколько базисных функций вида (5). Для эффективных весовых функций лепестки одной базисной функции компенсируются ле-

пестками другой. Очевидно, для хорошей компенсации целесообразно обеспечить совпадение нулей спектров базисных функций в области боковых лепестков. Из (11) следует, что это достигается, если разности степеней  $p_0, p_1, \dots, p_m$  базисных функций, используемых в (4), равны целым четным числам:

$$p_i - p_j = 2k, \quad i > j, k - \text{целое.} \quad (12)$$

При этом весовая функция (4) приобретает вид

$$w(\mathbf{b}, t) = \cos^\mu(\pi t / N) \sum_{k=0}^m b_k \cos^{2k}(\pi t / N), \quad (13)$$

$$-0,5N \leq t \leq 0,5N.$$

Далее будем считать, что общий косинусный множитель в этой формуле вынесен за знак суммы, т.е.  $b_0 \neq 0$ . Тогда скорость спада боковых лепестков спектра этой функции составляет  $V = 6(\mu + 1)$  дБ/окт.

Формулу (13) можно трактовать как представление весовой функции в виде произведения гладкой функции в форме начального отрезка обобщенного ряда Фурье и множителя перед суммой, определяющего порядок нуля функции на краях ее области определения. Именно порядок нуля функции (степень  $\mu$  этого множителя) определяет скорость убывания лепестков спектра, а не порядок наивысшей непрерывной производной, как это обычно трактуется в литературе. Для целых степеней  $\mu$  оба способа оценки совпадают.

Заметим, что вид (13) весовых функций определен, исходя из свойств спектра непрерывной весовой функции. Спектр дискретной функции может быть получен из спектра непрерывной с помощью наложения отрезков последнего по формуле (3). Из формул (3) и (8) следует, что для целочисленных  $\mu$  нули дискретного спектра базисных функций совпадают с соответствующими нулями непрерывного спектра (11). В случае нецелого параметра  $\mu$  положения нулей несколько изменяются. Численные оценки показывают, что эти изменения, в основном, происходят в области последних двух лепестков у границ однозначного интервала частот. В области первых, наибольших лепестков смещение нулей незначительно для рассматриваемых задач. Поэтому для дискретного случая положение нулей также можно приближенно оценивать по формуле (11), соотношение (12) по-прежнему обеспечивает наилучшее согласование положения нулей, а ухудшение характеристик получаемых функций практически не наблюдается.

Вычисление функции вида (13) требует достаточно малого объема вычислений. Это обусловлено малым числом членов  $m$  в сумме (13) и одинаковым аргументом косинуса для всех слагаемых. Поэтому вычисление весовой функции вида (13) может быть реализовано в реальном масштабе времени на современных процессорах обработки сигналов.

### Функции с целыми степенями

Рассмотрим частные случаи формулы (13).

1. Степень множителя перед суммой в (13) – целое четное число:  $\mu = 2\eta$ , где  $\eta$  – целое:

$$w(\mathbf{b}, t) = \sum_{k=0}^m b_k \cos^{2(k+\eta)}(\pi t / N), \quad -0,5N \leq t \leq 0,5N. \quad (14)$$

Функцию  $\cos^{2r}(\pi t / N)$  при целом  $r$  можно преобразовать в линейную комбинацию тригонометрических функций кратных аргументов  $\cos(2\pi i t / N)$ ,  $i = 0, 1, \dots, r$  по известной формуле:

$$\begin{aligned} \cos^{2r}(\pi t / N) &= \\ &= 2^{-2r} \left\{ C_{2r}^r + \sum_{i=0}^{r-1} 2 C_{2r}^i \cos[2(r-i)\pi t / N] \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

(см. [7], № 1.320.5), где  $C_u^v$  – биномиальные коэффициенты.

Подставляя (15) в (14), преобразуем весовую функцию (12) к традиционному виду

$$w(t) = \sum_{k=0}^M a_k \cos[2\pi k t / N], \quad (16)$$

где  $M = m + \eta$ , а коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_M$  являются линейными комбинациями коэффициентов  $b_0, b_1, \dots, b_m$ .

Функция (16) представляет собой начальный отрезок ряда Фурье и многие классические весовые функции имеют указанный вид [1, 2]. В работах авторов [8-12] для функций вида (14), (16) решена задача синтеза весовых функций с минимальным уровнем максимального бокового лепестка в заданной области частот вне главного лепестка.

2. Степень множителя перед суммой в (13) – нечетное целое число:  $\mu = 2\eta + 1$ ,  $\eta$  – целое:

$$w(\mathbf{b}, t) = \sum_{k=0}^m b_k \cos^{2(k+\eta)+1}(\pi t / N), \quad -0,5N \leq t \leq 0,5N. \quad (17)$$

Функцию  $\cos^{2r+1}(\pi t / N)$  в (17) можно преобразовать в линейную комбинацию гармонических функций  $\cos[(2i+1)\pi t / N]$ ,  $i = 0, 1, \dots, r$ , с помощью известной формулы [7], № 1.320.7:

$$\begin{aligned} \cos^{2r+1}(\pi t / N) &= \\ &= 2^{-2r} \sum_{i=0}^r 2 C_{2r+1}^i \cos[(2(r-i)+1)\pi t / N] \}. \end{aligned} \quad (18)$$

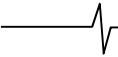
С помощью этого соотношения (17) может быть преобразовано к виду

$$w(t) = \sum_{k=0}^M a_k \cos[(2k+1)\pi t / N]. \quad (19)$$

где  $M = m + \eta$ , а коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_M$  являются линейными комбинациями коэффициентов  $b_0, b_1, \dots, b_m$ .

Вычисление весовых функций с помощью представлений (14) и (17) проще по сравнению с представлениями (16) и (19), соответственно, поскольку, во-первых, количество слагаемых в (14) и (17) меньше, чем в (16) и (19), особенно при большой скорости спада лепестков (большом  $\eta$ ). Во-вторых, формулы (14) и (17) требуют вычисления только одной тригонометрической функции, а в (16) и (19) необходимо вычислять  $M$  (или  $M + 1$ ) таких функций.

Функции (19) представляют собой начальный отрезок обобщенного ряда Фурье по системе ортогональных гармонических функций  $\cos[(2k+1)\pi t / N]$ , частоты которых располагаются посередине между частотами стандартного ряда (16). Задача синтеза весовых функций с минимальным уровнем максимального бокового лепестка для функций вида (17), (19) решена в работах авторов [10, 12].



Весовые функции могут применяться двумя способами: путем умножения сигнала на весовую функцию во временной области или путем свертки их спектров в частотной области. Для обоих случаев целого  $\mu$  при применении во временной области представления (14) и (17) предпочтительнее по объему вычислений. Для частотной области более эффективны представления (16) и (19), так как в этом случае использование весовой функции сводится к нерекурсивной цифровой фильтрации с малым числом  $2M$  ненулевых отсчетов фильтра [8, 12]. Это свойство является существенным преимуществом рассмотренных в данном разделе функций с целочисленными показателями.

### Минимаксная задача

Перепишем формулу (2) для вычисления спектра, включив в функцию в качестве аргумента вектор коэффициентов и используя симметрию весовой функции

$$W(\mathbf{b}, f) = \sum_{p=0}^{N-1} w(\mathbf{b}, t_p) \cos(2\pi t_p f), \quad f \in [-0,5; 0,5]. \quad (20)$$

Подставляя сюда из (11) выражение для весовой функции, получаем

$$W(\mathbf{b}, f) = \sum_{k=0}^m b_k \Phi(\mu + 2k, f), \quad f \in [-0,5; 0,5], \quad (21)$$

где  $\Phi(\mu + 2k, f)$  – дискретный спектр базисной функции  $\phi(p_k = \mu + 2k, t)$ :

$$\Phi(\mu + 2k, f) = \sum_{p=0}^{N-1} \varphi(p_k = \mu + 2k, t_p) \cos(2\pi t_p f).$$

Пусть  $W_{\max}$  – максимальное значение модуля спектра (21). Определим функцию качества  $\varphi(\mathbf{b})$  как максимальное значение нормированного модуля спектра  $W_{\max}(\mathbf{b}, f) / W_{\max}$  вне области  $[-\beta, \beta]$ , где  $\beta$  – задаваемая максимально допустимая полуширина главного лепестка по уровню максимального бокового лепестка:

$$\varphi(\mathbf{b}) = \max_{\beta \leq |f| \leq 0,5} |W(\mathbf{b}, f) / W_{\max}|. \quad (22)$$

Построение оптимальной весовой функции заключается в отыскании вектора коэффициентов  $\mathbf{b}$ , минимизирующего функцию  $\varphi(\mathbf{b})$ , т. е. в решении задачи

$$\varphi(\mathbf{b}) \rightarrow \min_{\mathbf{b}}. \quad (23)$$

Поставленная задача относится к задачам чебышевского приближения [13]. Известны отдельные функции, являющиеся её решениями: функции Хэмминга [1], Наталла [4], Альбрехта [5]. В статьях [8-12] разработан регулярный метод синтеза, позволяющий получить для функций вида (14), (16), (17), (19) континуальное семейство оптимальных функций с заданной скоростью спада боковых лепестков вида  $V = 6k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и приведены сводки оптимальных функций. В настоящем разделе этот метод обобщается на случай функций вида (13).

Рассмотрим свойства оптимальной функции, являющейся решением задачи (22)-(23). Во-первых, максимум спектра (20) достигается при  $f = 0$ . Действительно, в выражении (20) для спектра суммируются неотрицательные числа  $w(\mathbf{b}, t_p)$  с весом  $\cos(2\pi t_p f)$ . Очевидно, максимум достигается, если все веса равны единице, что реализуется только при  $f = 0$ .

Во-вторых, умножение всех коэффициентов  $b_0, b_1, \dots, b_m$  на фиксированный множитель не изменяет функцию качества (22). Для обеспечения единственности решения задачи зафиксируем масштаб функции путем фиксации максимального значения спектра  $W_{\max} = W(\mathbf{b}, 0) = 1$ . Из (21) следует, что это эквивалентно условию

$$\sum_{k=0}^m d_k b_k = 1, \quad (24)$$

где  $d_k = \Phi(\mu + 2k, 0)$  – постоянные положительные коэффициенты.

Тогда функция качества (22), нелинейная относительно коэффициентов  $b_0, b_1, \dots, b_m$ , может быть переписана в линейном виде с линейным условием (24):

$$\varphi(\mathbf{b}) = \max_{\substack{\beta \leq |f| \leq 0,5 \\ \sum_{k=0}^m d_k b_k = 1}} |W(\mathbf{b}, f)|. \quad (25)$$

При выполнении условия (24) один из коэффициентов, например, последний, может быть выражен в виде линейной комбинации других:

$$b_m = (1 - \sum_{k=0}^{m-1} d_k b_k) / d_m. \quad (26)$$

а первые  $m$  являются независимыми.

Подставляя (26) в (21), получим выражение, описывающее спектр весовой функции через независимые коэффициенты:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{b}, f) \Big|_{\text{при условии (24)}} &= \\ &= W_0(\mathbf{b}_s, f) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k u_k(f) + u_m(f), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\mathbf{b}_s = (b_0, b_1, \dots, b_{m-1})$  – усеченный вектор, состоящий из независимых коэффициентов, а функции  $u_k(f)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} u_m(f) &= \Phi(\mu + 2m, f) / d_m = \\ &= \Phi(\mu + 2m, f) / \Phi(\mu + 2m, 0), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} u_k(f) &= \Phi(\mu + 2k, f) - (d_k / d_m) \Phi(\mu + 2m, f), \\ k &= 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (29)$$

Теперь задача минимизации (22)-(23) может быть переписана с уменьшением на единицу размерности вектора коэффициентов:

$$\varphi(\mathbf{b}_s) = \max_{\beta \leq |f| \leq 0,5} |W_0(\mathbf{b}_s, f)|, \quad \varphi(\mathbf{b}_s) \rightarrow \min_{\mathbf{b}_s}, \quad (30)$$

где функция  $W_0(\mathbf{b}_s, f)$  определяется формулой (27). В такой формулировке задача приведена к стандартному виду, и можно воспользоваться общей теорией линейных чебышевских приближений [13], где, в частности, показано, что решение задачи существует и единственно.

Используемый в данной работе подход к решению этой задачи состоит в непосредственной минимизации функции  $\varphi(\mathbf{b}_s)$  (30) с помощью численных методов. Для выбора эффективного алгоритма поиска экстремума необходимо исследовать характер поведения оптимизируемой функции.

Покажем, что функция качества  $\varphi(\mathbf{b}_s)$ , определяемая формулами (27), (30), является выпуклой функцией в пространстве коэффициентов, т. е. для любых векторов из  $m$  коэффициентов  $\mathbf{b}^{(1)} = (b_0^{(1)}, b_1^{(1)}, \dots, b_{m-1}^{(1)})$  и

$\mathbf{b}^{(2)} = (b_0^{(2)}, b_1^{(2)}, \dots, b_{m-1}^{(2)})$  справедливо соотношение

$$\phi[\lambda \mathbf{b}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{b}^{(2)}] \leq \lambda \phi(\mathbf{b}^{(1)}) + (1-\lambda)\phi(\mathbf{b}^{(2)}), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Для доказательства положим  $b_m^{(1)} = b_m^{(2)} \equiv 1$ , при этом правая часть (27) запишется в более компактном виде

$\sum_{k=0}^m b_k^{(i)} u_k(f)$ ,  $i=1,2$ . В силу линейности этой функции

по коэффициентам  $b_k$ ,  $k=0, 1, \dots, m$  и учитывая, что модуль суммы не превосходит суммы модулей слагаемых, имеем

$$\phi[\lambda \mathbf{b}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{b}^{(2)}] =$$

$$= \max_{\beta \leq |f| \leq 0,5} \left| \lambda \sum_{k=0}^m b_k^{(1)} u_k(f) + (1-\lambda) \sum_{k=0}^m b_k^{(2)} u_k(f) \right| \leq$$

$$\leq \max_{\beta \leq |f| \leq 0,5} \left\{ \lambda \left| \sum_{k=0}^m b_k^{(1)} u_k(f) \right| + (1-\lambda) \left| \sum_{k=0}^m b_k^{(2)} u_k(f) \right| \right\} \leq$$

$$\leq \lambda \max_{\beta \leq |f| \leq 0,5} \left| \sum_{k=0}^m b_k^{(1)} u_k(f) \right| + (1-\lambda) \max_{\beta \leq |f| \leq 0,5} \left| \sum_{k=0}^m b_k^{(2)} u_k(f) \right| =$$

$$= \lambda \phi(\mathbf{b}^{(1)}) + (1-\lambda)\phi(\mathbf{b}^{(2)}),$$

что и требовалось доказать.

Из выпуклости следует, что любой сходящийся алгоритм поиска приведет к глобальному минимуму. Однако оптимизируемая функция имеет довольно сложное поведение. Анализ функции показывает, что, с одной стороны, она имеет регулярные области, в которых превалирует один из лепестков. В таких областях функция качества (30) определяется величиной этого лепестка и является дифференцируемой. С другой стороны, там, где происходит перескок превалирования с одного лепестка на другой, эти области соприкасаются по линиям (областям), в которых функция имеет излом и является недифференцируемой. В результате рельеф функции качества имеет вид системы оврагов, на пологом дне которых, где и следует искать минимум, она недифференцируема, причём размерность овражной области может достигать  $m-1$ . Это делает неэффективным непосредственное применение традиционных численных методов минимизации, основанных на вычислении градиента, для поиска экстремума функции (30).

Алгоритмы, используемые авторами, описаны в работах [8, 12]. Основой первого из них являются элементы случайного поиска, второго – итерационное нахождение минимумов в пространстве, натянутом на  $m-1$  векторов, направленных вдоль dna овражной области.

Неотъемлемой частью обоих алгоритмов является проверка полученного решения на оптимальность, гарантирующая приближение к глобальному минимуму с заданной точностью. Эта проверка производится с использованием общей теории линейных чебышевских приближений [13], согласно которой точка  $\tilde{\mathbf{b}}_s$  является точкой глобального минимума функции  $\phi(\mathbf{b}_s)$  (30) тогда и только тогда, когда существует  $l \leq m+1$  точек  $f_1, f_2, \dots, f_l$  на отрезке  $[\beta, 0,5]$ , и ненулевые числа  $c_1, c_2, \dots, c_l$ , для которых выполняются соотношения:

$$\sum_{k=1}^l c_k u_j(f_k) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (31)$$

$$W(\tilde{\mathbf{b}}_s, f_k) \equiv \phi(\tilde{\mathbf{b}}_s) \cdot \text{sign } c_k, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (32)$$

Из условия (32) следует, что в указанных точках

функция  $W(\tilde{\mathbf{b}}_s, f)$  имеет максимальные и равные по модулю экстремумы. Заметим также, что случай  $l < m+1$  является довольно редким: для всех синтезированных функций, описанных ниже,  $l = m+1$ .

Из условий (31), (32) следует нижняя граница для величины минимума  $\phi(\tilde{\mathbf{b}}_s)$  при  $l = m+1$  [13]:

$$\phi(\tilde{\mathbf{b}}_s) \geq \left| \sum_{k=1}^l c_k u_m(f_k) \right| / \sum_{k=1}^l |c_k| \quad (33)$$

где  $c_k$ ,  $k=1, 2, \dots, l$ , – решение системы линейных уравнений (31) для  $l = m+1$  различных произвольных точек  $f_1, f_2, \dots, f_l$ .

Используя формулу (33), можно предложить следующую методику оценки близости полученного решения к оптимальному. После нахождения вектора коэффициентов  $\hat{\mathbf{b}}_s$  вычисляются экстремумы функции  $W_0(\hat{\mathbf{b}}_s, f)$  по  $f \in [\beta; 0,5]$  и выбираются  $M \geq m+1$  экстремумов с максимальным уровнем. Далее проводится оценка  $\phi(\tilde{\mathbf{b}}_s)$  по формуле (33) для каждого сочетания из  $M$  по  $m+1$  этих экстремумов. Выбирая наибольшую из этих оценок  $\rho$ , имеем

$$\rho \leq \phi(\tilde{\mathbf{b}}_s) \leq \phi(\hat{\mathbf{b}}_s).$$

Если рассчитанные таким образом верхняя и нижняя границы в этой формуле отличаются не более, чем на заданную величину, то задача считается решенной, в противном случае повторяется поиск из точки  $\hat{\mathbf{b}}_s$ .

Приведенная методика гарантирует, что получаемый уровень максимального бокового лепестка отличается от его величины для точного решения не более, чем на заданную величину.

### Весовые функции со скоростью спада лепестков 6k+3 дБ на октаву

В данном разделе приводятся результаты синтеза весовых функций со скоростями спада боковых лепестков  $V = 6k + 3$  дБ/окт.,  $k=1, 2, \dots$ , занимающих по этому параметру серединное положение среди известных функций. Для достижения такой скорости спада параметр  $\mu$  в формуле (13) должен быть равен  $\mu = k - 0,5$ .

Расположение нулей функции (8) описывается формулой (11). Отсюда следует, что для функции порядка  $m$  минимальный аргумент, при котором все слагаемые функции (21) обращаются в ноль, равен  $f_{z0} = (0,5\mu + m + 1) / N$ . Главный лепесток не выходит за пределы области  $[0, f_{z0}]$ . При минимизации всех боковых лепестков синтезируемой функции параметр  $\beta$  полуширины главного лепестка не должен превосходить величину  $f_{z0}$ :  $\beta \leq (0,5\mu + m + 1) / N$ . Наоборот, при заданном  $\beta$  минимально необходимый порядок функции равен  $m \geq N\beta - 0,5\mu - 1$ . Расчеты показывают также, что увеличение порядка функции сверх минимально необходимо приводит к весьма слабому улучшению характеристик функции. Поэтому для сокращения приводимые ниже таблицы содержат параметры функций только для минимального порядка  $m = \lceil N\beta - 0,5\mu - 1 \rceil$ , где  $\lceil x \rceil = q$  – наименьшее целое, такое, что  $q \geq x$ . Функции, удовлетворяющие этому условию, будем называть регулярными, в противном случае – нерегулярными. Нерегулярные функции вынужденно возникают в случае, когда мини-

мально необходимый порядок по приведенной формуле меньше или равен нулю. При этом минимизация лепестков для функции (21) не имеет смысла, и порядок необходимо увеличить до единицы.

Следующее соображение, позволяющее сократить объем таблиц, относится к параметру  $N$ . Характеристики весовых функций слабо зависят от этого параметра. Типичная зависимость уровня  $P$  максимального лепестка от  $N$  приведена в табл. 1 для функций с параметрами  $\mu = 0,5$ ,  $m = 3$ ,  $\beta = 4,5/N$ . Приведены величины максимального лепестка для оптимальных весовых функций (первая строка) и для функций при коэффициентах, равных оптимальным для  $N = 1024$  (вторая строка).

Для различных  $N$  разница в уровне максимального лепестка выражается в долях, максимум в единицах, децибел и тем меньше, чем больше сравниваемые значения  $N$ . Для  $N = 1024$  разница с асимптотическим случаем составляет менее сотой доли децибела. В связи с этим ниже приводятся характеристики оптимальных функций только для одного значения  $N = 1024$ , часто используемого в приложениях. При таком значении  $N$  как коэффициенты, так и характеристики весовых функций практически совпадают с асимптотическими. При

значениях  $N$  порядка нескольких десятков эту зависимость следует учитывать.

Заметим также, что ширина главного лепестка обратно пропорциональна  $N$ . Поэтому параметры этой ширины, включая  $\beta$ , в литературе принято выражать в относительном масштабе, умножая их на  $N$ , т.е. выражая их в бинах [1]. Такая нормировка используется ниже.

Характеристики регулярных оптимальных весовых функций для скоростей спада лепестков  $V = 9, 15$  и  $21$  дБ/окт. ( $\mu = 0,5, 1,5, 2,5$ ) приведены, соответственно, в табл. 2, 3 и 4 при  $N = 1024$ , минимально необходимом  $m$  и шаге  $0,25$  бин по параметру  $\beta$ .

Табулированы следующие стандартные параметры весовых функций [1]: уровень  $P$  максимального бокового лепестка по отношению к главному лепестку; потери  $\Pi_w$  в отношении сигнал/шум за счет использования весовой функции; потери  $\Pi_s$  за счет рельефа; эквивалентная шумовая полоса  $L_n$ , ширины главного лепестка  $L_3$  и  $L_6$  по уровням минус 3 и минус 6 дБ соответственно. Потери за счет рельефа определяются как максимальный относительный спад огибающей амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) гребенки полосовых фильтров, рас-

Таблица 1. Зависимость подавления от величины  $N$

Уровень максимального лепестка, дБ	Число выборок $N$					
	16	64	256	1024	4096	16384
Оптимальный	-105,8	-104,86	-104,63	-104,61	-104,60	-104,60
При коэффициентах для $N = 1024$	-100,7	-103,33	-104,45	-104,61	-104,56	-104,56

Таблица 2. Параметры весовых функций со скоростью спада лепестков 9 дБ/окт. ( $\mu = 0,5$ )

$m$	$\beta N$	$P$ , дБ	$b_0, b_1, \dots, b_m$	$\Pi_w$ , дБ	$\Pi_s$ , дБ	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
1	1,25	-22,9	1,0; 0,381	0,604	2,437	1,149	1,106	1,524
	1,5	-30,6	0,930; 1,0	0,910	2,114	1,233	1,186	1,642
	1,75	-35,4	0,469; 1,0	1,206	1,858	1,320	1,265	1,758
	2,0	-41,6	0,2756; 1,0	1,443	1,674	1,394	1,332	1,857
	2,181	-49,1	0,1469; 1,0	1,681	1,503	1,473	1,406	1,961
2	2,25	-50,8	0,12977; 1,0; 0,03739	1,748	1,459	1,496	1,427	1,992
	2,5	-57,0	0,08627; 1,0; 0,20676	1,969	1,323	1,574	1,499	2,095
	2,75	-64,3	0,05558; 1,0; 0,44600	2,177	1,206	1,651	1,570	2,198
	3,0	-69,4	0,04229; 1,0; 0,73886	2,329	1,128	1,709	1,624	2,275
	3,206	-77,3	0,021777; 0,766679; 1,0	2,514	1,037	1,784	1,694	2,374
3	3,25	-78,6	0,018770; 0,707031; 1,0; 0,007415	2,544	1,023	1,797	1,705	2,391
	3,5	-84,4	0,009898; 0,476428; 1,0; 0,070093	2,695	0,957	1,860	1,764	2,475
	3,75	-91,0	0,0052556; 0,3330947; 1,0; 0,1630217	2,840	0,897	1,923	1,823	2,558
	4,0	-97,9	0,0028517; 0,2364079; 1,0; 0,2934571	2,978	0,843	1,985	1,881	2,641
	4,217	-104,6	0,0016603; 0,1769931; 1,0; 0,4845976	3,104	0,796	2,044	1,935	2,719
4	4,25	-105,4	0,0015589; 0,1704697; 1,0; 0,5162597; 0,0011438	3,121	0,790	2,052	1,943	2,729
	4,5	-112,6	0,0009108; 0,1269798; 1,0; 0,7923694; 0,0236290	3,249	0,746	2,113	2,000	2,810
	4,75	-118,1	0,00056845; 0,09378422; 0,90952713; 1,0; 0,07578975	3,354	0,712	2,164	2,048	2,879
	5,0	-126,2	0,00022947; 0,04891686; 0,63124405; 1,0; 0,14719062	3,478	0,673	2,227	2,106	2,962
	5,223	-131,9	0,000126550; 0,031563064; 0,489585642; 1,0; 0,236932204	3,571	0,645	2,275	2,151	3,026
5	5,25	-132,5	0,000118468; 0,030093618; 0,476244892; 1,0; 0,249070968; 0,000189297	3,581	0,642	2,281	2,156	3,033
	5,5	-139,3	0,000061567; 0,018783936; 0,366029035; 1,0; 0,380622968; 0,005621739	3,682	0,614	2,334	2,206	3,104
	5,75	-146,0	0,000033257; 0,012109485; 0,287175048; 1,0; 0,544738228; 0,022027783	3,777	0,588	2,386	2,254	3,173
	6,0	-152,6	0,000018848; 0,008104107; 0,230452629; 1,0; 0,748648301; 0,059603937	3,867	0,564	2,436	2,301	3,239
	6,229	-159,8	0,000010413; 0,005333636; 0,183424368; 0,995382998; 1,0; 0,133613434	3,958	0,541	2,488	2,349	3,308
6	6,25	-160,5	0,0000096198; 0,0050076968; 0,1753102151; 0,9707095166; 1,0; 0,1392892683; 0,0000357630	3,966	0,540	2,492	2,354	3,314
	6,5	-166,5	0,0000047859; 0,0028620029; 0,1162032099; 0,7651796964; 1,0; 0,2120911718; 0,0016572519	4,044	0,521	2,537	2,396	3,374
	6,75	-174,0	0,0000021111; 0,0014918272; 0,0725976108; 0,5893546728; 1,0; 0,3123908186; 0,0073469918	4,132	0,500	2,589	2,444	3,443
	7,0	-179,7	0,0000011761; 0,0009362985; 0,0517286698; 0,4866945833; 1,0; 0,4192662919; 0,0196477373	4,202	0,485	2,631	2,483	3,498
	7,231	-186,8	0,00000058673; 0,00054102940; 0,03498459497; 0,39273107507; 1,0; 0,56391732921; 0,04571392665	4,280	0,468	2,679	2,528	3,562

Таблица 3. Параметры весовых функций со скоростью спада лепестков 15 дБ/окт. ( $\mu = 1,5$ )

$m$	$\beta N$	$P$ , дБ	$b_0, b_1, \dots, b_m$	$\Pi_w$ , дБ	$\Pi_s$ , дБ	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1,75	-31,2	1,0; 0,1985	1,504	1,602	1,414	1,359	1,885
	2,0	-39,2	1,0; 0,6005	1,710	1,469	1,482	1,420	1,976
	2,25	-45,2	0,8740; 1,0	1,897	1,357	1,548	1,478	2,062
	2,5	-51,1	0,5226; 1,0	2,064	1,262	1,608	1,533	2,142
	2,689	-59,3	0,2921; 1,0	2,243	1,166	1,676	1,596	2,232
2	2,75	-60,9	0,26400; 1,0; 0,02252	2,286	1,144	1,693	1,611	2,253
	3,0	-67,4	0,18079; 1,0; 0,13844	2,450	1,065	1,758	1,671	2,339
	3,25	-74,7	0,12359; 1,0; 0,30012	2,608	0,993	1,823	1,731	2,426
	3,5	-80,6	0,09137; 1,0; 0,50433	2,738	0,937	1,878	1,782	2,499
	3,710	-88,1	0,06523; 1,0; 0,86709	2,886	0,877	1,943	1,843	2,586
3	3,75	-89,3	0,062049; 1,0; 0,931660; 0,004546	2,908	0,868	1,953	1,852	2,599
	4,0	-96,0	0,034173; 0,722338; 1,0; 0,050031	3,036	0,820	2,012	1,906	2,676
	4,25	-102,1	0,0194069; 0,5141116; 1,0; 0,1201647	3,155	0,778	2,068	1,958	2,750
	4,5	-110,0	0,0102535; 0,3617319; 1,0; 0,2205037	3,280	0,735	2,128	2,014	2,831
	4,719	-115,9	0,0064679; 0,2775630; 1,0; 0,3592086	3,384	0,701	2,180	2,062	2,899
4	4,75	-116,8	0,0060815; 0,2683918; 1,0; 0,3799162; 0,0005666	3,398	0,697	2,187	2,069	2,908
	5,0	-123,9	0,0036982; 0,2041097; 1,0; 0,5782528; 0,0130441	3,507	0,664	2,242	2,121	2,982
	5,25	-130,2	0,0024542; 0,1633348; 1,0; 0,8072959; 0,0468682	3,602	0,636	2,292	2,167	3,048
	5,5	-137,6	0,00136131; 0,11148230; 0,87685401; 1,0; 0,11396434	3,708	0,606	2,348	2,219	3,123
	5,726	-144,2	0,00070714; 0,06943642; 0,67053450; 1,0; 0,18467600	3,795	0,583	2,396	2,264	3,186
5	5,75	-144,7	0,00067039; 0,06665030; 0,65429552; 1,0; 0,19342119; 0,00009565	3,804	0,580	2,401	2,269	3,193
	6,0	-151,1	0,000369359; 0,043090411; 0,509682368; 1,0; 0,295258468; 0,003373217	3,891	0,558	2,450	2,314	3,257
	6,25	-158,6	0,000192096; 0,027051216; 0,394971921; 1,0; 0,427477753; 0,013714674	3,982	0,535	2,501	2,362	3,326
	6,5	-164,5	0,000118229; 0,019019680; 0,323769422; 1,0; 0,578780802; 0,036781546	4,059	0,517	2,546	2,404	3,385
	6,730	-171,9	0,000065990; 0,012637435; 0,259826529; 1,0; 0,775331366; 0,083133776	4,142	0,498	2,595	2,450	3,450
6	6,75	-172,5	0,000063185; 0,012244516; 0,255314967; 1,0; 0,793844608; 0,088680365; 0,000016214	4,149	0,496	2,599	2,454	3,456
	7,0	-178,6	0,000039684; 0,008757815; 0,211078544; 0,986739864; 1,0; 0,17162877; 0,001058479	4,222	0,480	2,643	2,495	3,514
	7,25	-185,9	0,000018491; 0,004757490; 0,135609318; 0,769995763; 1,0; 0,251021743; 0,004781225	4,300	0,464	2,692	2,540	3,578
	7,5	-192,3	0,0000098233; 0,0028754967; 0,0943052868; 0,6289615217; 1,0; 0,3392530732; 0,0129492140	4,367	0,450	2,734	2,579	3,634
	7,732	-198,9	0,0000052042; 0,0017290941; 0,0651789329; 0,5116874572; 1,0; 0,4559077315; 0,0305836635	4,438	0,435	2,779	2,621	3,694

Таблица 4. Параметры весовых функций со скоростью спада лепестков 21 дБ/окт. ( $\mu = 2,5$ )

$m$	$\beta N$	$P$ , дБ	$b_0, b_1, \dots, b_m$	$\Pi_w$ , дБ	$\Pi_s$ , дБ	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
1	2,25	-38,9	1,0; 0,129	2,180	1,184	1,652	1,580	2,202
	2,5	-47,1	1,0; 0,4131	2,322	1,116	1,707	1,629	2,274
	2,75	-54,3	1,0; 0,7638	2,447	1,059	1,757	1,674	2,339
	3,0	-59,9	0,7890; 1,0	2,571	1,004	1,807	1,719	2,406
	3,195	-68,9	0,4585; 1,0	2,706	0,946	1,865	1,772	2,482
2	3,25	-70,3	0,41724; 1,0; 0,01524	2,737	0,933	1,878	1,784	2,499
	3,5	-77,2	0,29047; 1,0; 0,10171	2,863	0,883	1,933	1,835	2,572
	3,75	-84,2	0,20164; 1,0; 0,22484	2,991	0,835	1,991	1,888	2,649
	4,0	-91,1	0,14964; 1,0; 0,37755	3,099	0,796	2,041	1,935	2,715
	4,212	-98,4	0,11091; 1,0; 0,63363	3,217	0,755	2,097	1,987	2,790
3	4,25	-99,5	0,106172; 1,0; 0,677746; 0,002329	3,234	0,749	2,106	1,995	2,801
	4,5	-106,9	0,079273; 0,989272; 1,0; 0,037995	3,346	0,713	2,160	2,045	2,874
	4,75	-112,6	0,0465941; 0,7122272; 1,0; 0,0936077	3,444	0,682	2,210	2,091	2,939
	5,0	-121,3	0,0243226; 0,4979014; 1,0; 0,1750235	3,557	0,648	2,268	2,146	3,017
	5,221	-126,8	0,0161011; 0,3894673; 1,0; 0,2809904	3,643	0,623	2,314	2,188	3,077
4	5,25	-127,6	0,0152528; 0,3776819; 1,0; 0,2963852; 0,0003157	3,654	0,620	2,320	2,193	3,085
	5,5	-135,0	0,0094144; 0,2904419; 1,0; 0,4470264; 0,0078626	3,749	0,595	2,371	2,241	3,152
	5,75	-141,3	0,0063045; 0,2314653; 1,0; 0,6310516; 0,0295458	3,835	0,572	2,418	2,285	3,216
	6,0	-148,6	0,0041313; 0,1840136; 1,0; 0,8733422; 0,0796950	3,925	0,549	2,469	2,332	3,283
	6,227	-155,9	0,0023759; 0,1278336; 0,8637379; 1,0; 0,1498870	4,008	0,529	2,517	2,377	3,346
5	6,25	-156,5	0,00226378; 0,12329412; 0,84529975; 1,0; 0,15627266; 0,00005252	4,015	0,527	2,521	2,381	3,351
	6,5	-162,3	0,00130674; 0,08159924; 0,66402519; 1,0; 0,23892530; 0,00218652	4,091	0,509	2,565	2,422	3,411
	6,75	-170,6	0,000662649; 0,050440945; 0,510747633; 1,0; 0,348868915; 0,009174912	4,177	0,490	2,616	2,470	3,479
	7,0	-175,9	0,000430814; 0,036652904; 0,425026470; 1,0; 0,466591751; 0,024360367	4,243	0,476	2,656	2,507	3,532
	7,231	-183,5	0,000244615; 0,024568362; 0,342171383; 1,0; 0,625362180; 0,055601146	4,319	0,459	2,703	2,551	3,594

$m$	$\beta N$	$P$ , дБ	$b_0, b_1, \dots, b_m$	$\Pi_{\text{ш}}$ , дБ	$\Pi_3$ , дБ	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
6	7,25	-184,1	0,000233712; 0,023806276; 0,336532164; 1,0; 0,638833622; 0,058934423; 0,000007808	4,325	0,458	2,707	2,555	3,599
	7,5	-190,4	0,000149322; 0,017253052; 0,281497735; 1,0; 0,818775369; 0,116895531; 0,000580991	4,393	0,444	2,750	2,595	3,656
	7,75	-197,6	0,000088313; 0,011814356; 0,225845077; 0,963743614; 1,0; 0,207121634; 0,003242525	4,462	0,431	2,794	2,636	3,714
	8,0	-204,2	0,0000463875; 0,0070303443; 0,1547530236; 0,7801349075; 1,0; 0,2831261676; 0,0090568468	4,527	0,418	2,836	2,675	3,770
	8,233	-210,9	0,0000250610; 0,0042970716; 0,1082992203; 0,6388975089; 1,0; 0,3784596213; 0,0213433595	4,591	0,406	2,878	2,715	3,826

ставленных через интервал  $1/N$ , АЧХ каждого из которых определяется функцией  $|W(f)|$ . Эквивалентная шумовая полоса – это ширина АЧХ идеального прямоугольного фильтра, который пропускает такую же мощность шума, что и фильтр с АЧХ  $|W(f)|$  при равных максимальных амплитудах АЧХ этих фильтров. Все полосы приведены в бинах.

Особый интерес представляют последние строки таблиц для каждого  $m$ , так как они дают ответ на вопрос о наименьшем значении уровня бокового лепестка, достижимом для весовой функции заданного порядка с заданной скоростью спада лепестков.

В таблицах приведены значения уровня максимального лепестка для точного решения минимаксной задачи, округленные до 0,1 дБ, а разрядность коэффициентов выбрана таким образом, чтобы обеспечить значения, отличающиеся от точных не более, чем на 0,05 дБ.

**Характеристики оптимальных весовых функций**

Проанализируем характеристики оптимальных весовых функций, полученных в данной и в предыдущих работах авторов [8-12]. Рис. 1 иллюстрирует зависимость уровня максимального бокового лепестка для регулярных функций от параметра  $\beta$  при скоростях спада боковых лепестков  $V = 3k$  дБ/окт.,  $k = 2, 3, \dots, 8$ . Кривые для разных  $k$  лежат одна над другой. Самая нижняя кривая имеет индекс  $k = 2$ . При переходе с одной кривой на следующую, более высокую, индекс увеличивается на единицу. Функции из таблиц данной работы показаны сплошными линиями, из предыдущих работ – пунктирными линиями (скорости спада кратны 6 дБ/окт.).

Увеличение скорости спада лепестков приводит к увеличению уровня максимального бокового лепестка. Для фиксированной скорости спада каждая кривая хорошо аппроксимируется прямой линией, небольшие отклонения от которой имеют случайный вид. При увеличении скорости спада лепестков увеличивается наклон аппроксимирующих прямых с -27,3 дБ/бин для  $V = 6$  дБ/окт. до -29,2 дБ/бин для  $V = 24$  дБ/окт. Это приводит к сближению кривых между собой при увеличении  $\beta$ . Для грубой оценки значения параметра синтеза  $\beta$ , требуемого для получения желаемого уровня бокового лепестка можно использовать линейное соотношение  $P = (-28 \beta + 20)$  дБ.

Сближение кривых при увеличении  $\beta$  наблюдается и для других параметров функций. На рис. 2 показана зависимость ширины главного лепестка  $L_3$  по уровню минус 3 дБ для тех же самых функций. При нумерации

кривых снизу вверх индекс  $k$  монотонно возрастает, начиная с  $k = 2$ . Ориентировочное значение для средней кривой может быть оценено по формуле  $L_3 \approx -0,01\beta^2 + 0,3\beta + 0,86$ .

$P$ , дБ

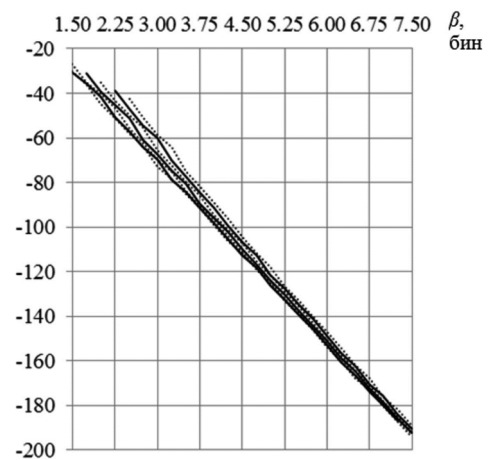


Рис. 1. Зависимость уровня максимального бокового лепестка от параметра  $\beta$  для оптимальных функций со скоростью спада лепестков  $3k$ ,  $k = 2, 3, \dots, 8$

$L_3$ , бин

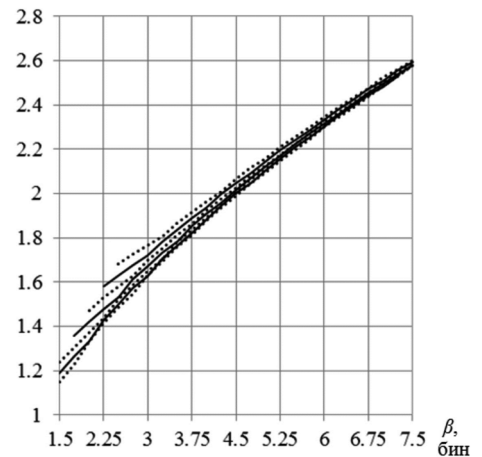


Рис. 2. Зависимость ширины главного лепестка по уровню -3 дБ от параметра  $\beta$  для оптимальных функций со скоростью спада лепестков  $3k$ ,  $k = 2, 3, \dots, 8$

В табл. 2, 3 и 4 приведены три вида полос: шумовая полоса  $L_n$  и ширины главного лепестка  $L_3$  и  $L_6$  по уровням минус 3 и минус 6 дБ соответственно. Рис. 3 иллюстрирует соотношения между этими полосами. На рисунке приведены указанные параметры всех оптимальных регулярных функций, параметры которых табулиро-



ваны в этой и предыдущих работах авторов [8-12]. Общее количество функций составляет 240.

Каждая функция отображается одной точкой для каждой из зависимостей. Параметры оптимальных функций с высокой точностью ложатся на прямолинейные тренды, проведенные на рисунке тонкими линиями и имеющими уравнения:

$$L_n = 1,0757 L_3 - 0,0415, \quad L_6 = 1,4301 L_3 - 0,0539. \quad (34)$$

С использованием этих уравнений можно довольно точно оценить шумовую полосу и полосу главного лепестка по уровню минус 6 дБ, зная полосу по уровню минус 3 дБ. Кроме того, потери весовой функции также являются зависимым параметром и рассчитываются по формуле  $\Pi_w = 10 \log L_n$ .

В работе [1] замечено, что для весовых функций, которые по совокупности параметров можно отнести к «хорошим», относительная разность  $\delta$  между шумовой полосой и полосой по уровню минус 3 дБ

$$\delta = L_n / L_3 - 1 \quad (35)$$

не превышает 4-5,5 % и предложено использовать этот параметр в качестве критерия качества весовой функции. Однако в [1] рассматриваются функции с уровнем максимального лепестка больше минус 92 дБ, а из приведенных выше данных следует, что для рассмотренных выше оптимальных функций величина  $\delta$  растет при уменьшении уровня максимального лепестка. Поэтому, если использовать (35) в качестве критерия качества, то в диапазоне от минус 92 до минус 200 дБ верхнюю границу допуска необходимо увеличить до 6 %.

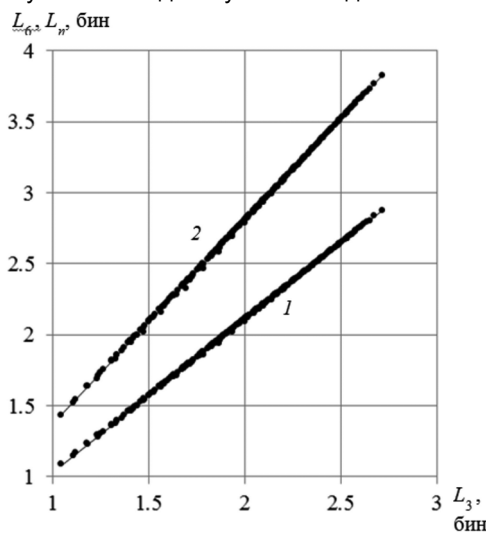


Рис. 3. Зависимость шумовой полосы  $L_n$  (кривая 1) и полосы  $L_6$  (2) от полосы  $L_3$

Следует заметить, что параметры многих классических функций [1] также соответствуют уравнениям (34) с большой точностью. Поэтому более общий критерий может состоять в сравнении реальной шумовой полосы  $L_n$  и шумовой полосы  $L_{n(32)}$ , вычисленной по формуле (34):

$$\delta_1 = L_n / L_{n(34)} - 1. \quad (36)$$

Для рассматриваемого множества синтезированных функций максимальная величина параметра (36) составляет 0,7 %, а среднее значения модуля – 0,1 %. Возможно также использование в качестве критерия качества второго соотношения из (34).

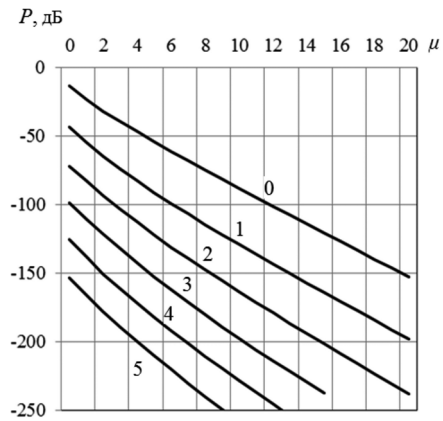


Рис. 4. Зависимость минимального уровня максимального лепестка от параметра  $\mu$  при  $m = 0$  (кривая 0), 1 (1), 2 (2), 3 (3), 4 (4) и 5 (5)

Особый интерес представляют функции с минимально достижимым уровнем  $P_{\min}(\mu, m)$  максимального лепестка при заданных порядке  $m$  и скорости спада лепестков  $V = 6(\mu + 1)$ . Для синтеза таких функций степень  $\mu$  задается выражением  $\mu = V / 6 - 1$ , а параметр синтеза  $\beta$  – равным положению первого нуля (9) функции (11):  $\beta = 0,5\mu + m + 1$ . Реально получаемое значение  $\beta$  несколько меньше, поскольку значение  $P_{\min}(\mu, m)$  достигается в главном лепестке несколько левее первого нуля. На рис. 4 показаны зависимости  $P_{\min}(\mu, m)$  от параметра  $\mu$  для фиксированных порядков в диапазоне  $m = 0-5$ , указанных цифрами над кривыми. Кривая для  $m = 0$  описывает фактически характеристики отдельных базисных функций. Из рисунка следует, что при увеличении параметра  $\mu$  не только возрастает скорость спада лепестков, но и быстро снижается уровень максимального лепестка. Приведенные зависимости хорошо аппроксимируются полиномом второго порядка, например, при  $m = 3$  кривая тренда имеет вид  $P = 0,14 \mu^2 - 11,55 \mu - 87,7$  дБ.

Ограниченный объем статьи не позволяет привести характеристики многочисленных функций, представленных на рис. 4. При малых целочисленных значениях  $\mu$  параметры функций можно найти в работах авторов [8-12]. В табл. 5 приведены функции рассматриваемого рисунка порядков  $m = 3, 4$  и 5 для целочисленных  $\mu$  в диапазоне 3-12.

Сравнение характеристик полученных функций со скоростью спада лепестков 6 дБ/окт. с известными проведено в [11], где показано, что полученные функции превосходят по характеристикам все известные, кроме функций Дольфа-Чебышева. Превосходство последних достигается за счет того, что они имеют максимально возможный порядок (примерно  $N/2$ ), что, однако, создает трудности при реализации в реальном масштабе времени. Для других случаев аналогов для сравнения, описанных в литературе, насколько известно авторам, нет.

### Заключение

Предложенный в данной работе класс весовых функций обеспечивает:

- произвольно заданную скорость спада лепестков  $V \geq 6$  дБ/окт.;
- минимальный уровень максимального бокового лепестка при заданных параметрах;

Таблица 5. Параметры оптимальных весовых функций с целым параметром  $\mu$

$m$	$\mu$	$\beta N$	$P$ , дБ	$b_0, b_1, \dots, b_m$	$\Pi_w$ , дБ	$\Pi_s$ , дБ	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3,0	5,472	-132,1	0,023184; 0,449251; 1,0; 0,252040	3,765	0,590	2,379	2,249	3,164
	4,0	5,973	-142,3	0,042115; 0,571914; 1,0; 0,208569	3,996	0,531	2,509	2,371	3,337
	5,0	6,475	-152,3	0,068667; 0,701887; 1,0; 0,176468	4,209	0,482	2,636	2,489	3,504
	6,0	6,976	-161,7	0,102390; 0,832747; 1,0; 0,153085	4,408	0,440	2,759	2,605	3,669
	7,0	7,477	-171,1	0,144844; 0,968905; 1,0; 0,134520	4,593	0,405	2,879	2,718	3,828
	8,0	7,978	-180,2	0,177205; 1,0; 0,901260; 0,107715	4,765	0,374	2,996	2,827	3,983
	9,0	8,479	-189,2	0,206119; 1,0; 0,796949; 0,085428	4,927	0,348	3,109	2,934	4,134
	10,0	8,979	-197,6	0,236050; 1,0; 0,713752; 0,069564	5,079	0,324	3,220	3,037	4,281
4	3,0	6,478	-161,4	0,00392566; 0,16624346; 0,96473914; 1,0; 0,13679347	4,110	0,505	2,576	2,433	3,425
	4,0	6,979	-171,7	0,00792192; 0,22568676; 1,0; 0,84656109; 0,09794942	4,301	0,463	2,692	2,542	3,580
	5,0	7,480	-181,9	0,01354043; 0,28265114; 1,0; 0,70950974; 0,07053459	4,481	0,426	2,806	2,649	3,731
	6,0	7,980	-191,7	0,02102882; 0,34155742; 1,0; 0,60870211; 0,05285773	4,652	0,394	2,919	2,754	3,880
	7,0	8,481	-201,3	0,03084060; 0,40367450; 1,0; 0,53041812; 0,04072587	4,812	0,367	3,028	2,857	4,026
	8,0	8,981	-210,4	0,04301561; 0,46717818; 1,0; 0,47021799; 0,03246188	4,964	0,342	3,136	2,958	4,169
	9,0	9,482	-219,3	0,05760781; 0,53204086; 1,0; 0,42158027; 0,02639260	5,108	0,320	3,242	3,057	4,310
	10,0	9,982	-228,2	0,07506308; 0,59941112; 1,0; 0,38071715; 0,02171947	5,245	0,301	3,346	3,154	4,447
5	3,0	7,481	-189,0	0,000420620; 0,032781377; 0,386542457; 1,0; 0,567767924; 0,046407407	4,404	0,442	2,757	2,601	3,665
	4,0	7,982	-199,7	0,001048611; 0,053942809; 0,478670287; 1,0; 0,477690562; 0,033511465	4,569	0,410	2,863	2,701	3,807
	5,0	8,482	-210,1	0,002213227; 0,082022106; 0,574892654; 1,0; 0,410490979; 0,025115088	4,726	0,382	2,969	2,800	3,946
	6,0	8,983	-220,3	0,004150383; 0,117798407; 0,675425148; 1,0; 0,357900847; 0,019282931	4,875	0,357	3,072	2,897	4,084
	7,0	9,483	-230,5	0,007120504; 0,161674142; 0,779186801; 1,0; 0,316098853; 0,015138404	5,017	0,334	3,175	2,993	4,220
	8,0	9,984	-240,0	0,011442664; 0,213838777; 0,884186284; 1,0; 0,283329063; 0,012248416	5,153	0,314	3,276	3,088	4,354
	9,0	10,484	-249,5	0,017476842; 0,275287328; 0,992104604; 1,0; 0,256142481; 0,010066935	5,282	0,296	3,375	3,181	4,486
	10,0	10,985	-258,8	0,023196479; 0,314114378; 1,0; 0,906982487; 0,211538400; 0,007601035	5,406	0,280	3,472	3,272	4,615
6	11,0	11,485	-267,8	0,029586852; 0,350832980; 1,9; 0,824672224; 0,176647937; 0,005848637	5,524	0,265	3,568	3,362	4,743
	12,0	11,985	-276,8	0,036991772; 0,388611342; 1,0; 0,754422268; 0,149105840; 0,004565411	5,638	0,252	3,662	3,451	4,868

– простоту вычисления весовых функций, достаточную для приложений реального времени.

Разработанный алгоритм синтеза реализует вычисление оптимальной функции данного класса с минимальным уровнем максимального бокового лепестка, задаваемой следующими тремя параметрами: целочисленный порядок функции  $m$ , определяющий объем вычислений при реализации, параметр  $\mu \geq 0$ , задающий скорость спада лепестков  $V = 6(\mu + 1)$  дБ/окт., и ширина главного лепестка по уровню максимального бокового. Два последних параметра являются произвольными положительными действительными числами, что определяет широту предложенного класса функций.

### Литература

1. Хэррис Ф.Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье. // ТИИЭР, 1978, Том 66, №1, с. 60-96.
2. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Оконные функции для гармонического анализа сигналов. М.: Техносфера, 2016.
3. Опенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006.
4. Nuttall A.H. Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior. // IEEE Trans., v. ASSP 29, 1981. № 1, с. 84-91.

5. Hans-Helge Albrecht. A Family of Cosine-Sum Windows for High-Resolution Measurements. // Proc. Conf. ICASSP-01, Salt Lake City, 2001. N.Y.: IEEE, 2001. V. 5. P. 3081.
6. Gröbner W. and Hofreiter N. Integraltafel, Teil II, Bestimmte Integrale. Wien and Innsbruck: Springer-Verlag, 1958.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
8. Зайцев Г.В. Класс весовых функций малого порядка для спектрального анализа, оптимальных по минимаксному критерию. // Радиотехника, 2011, № 3, с. 21-32.
9. Зайцев Г.В. Класс весовых функций для спектрального анализа с высокой скоростью спада лепестков и минимальным уровнем максимального бокового лепестка. // Радиотехника, 2012, № 1, с. 55-65.
10. Хзмалян А.Д. Новые представления весовых функций с высокой скоростью спада лепестков спектра и минимальным уровнем максимального бокового лепестка. // Вестник ВКО, 2018, № 4(20), с. 90-100.
11. Zaytsev G.V., Khzmalyan A.D. A Family of Optimal Cosine-Sum Windows for Real-Time Spectral Analysis. // Proc. V Int. Conf. on Engineering and Telecommunication, 2018, pp. 103-107.
12. Зайцев Г.В., Хзмалян А.Д. Класс оптимальных весовых функций для спектрального анализа со скоростью спада лепестков спектра, кратной 12 децибел на октаву. // Радиотехника и электроника, в печати.
13. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. М.: Наука, 1978.