

УДК 621.396.96:519.61

АЛГОРИТМ АДАПТИВНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ЕГО ЧИСЛЕННО УСТОЙЧИВАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

*Ратынский М.В., д.т.н., начальник сектора АО «ВНИИРТ», e-mail: m3v5r7@inbox.ru;
Кирякмасов А.К., ведущий инженер АО «ВНИИРТ», e-mail: bp19z@yandex.ru.*

LINEARLY CONSTRAINED ADAPTIVE SPACE FILTERING ALGORITHM AND ITS NUMERICALLY STABLE SOLUTION

Ratynsky M.V., Kiryakmasov A.K.

It is established that linearly constrained adaptive space filtering algorithm for complex numbers may be realized in numerically stable form that does not require direct matrices inverting. Numerically stable algorithm requires lesser computer word length against the methods based on Gauss algorithm of linear equations system solving, the required word length may be different as one and a half to twice.

Key words: adaptive space filtering, linear constraints, orthogonalization, numerical stability.

Ключевые слова: адаптивная пространственная фильтрация, линейные ограничения, ортогонализация, численная устойчивость.

Введение

Каноническое решение задачи адаптивной пространственной фильтрации (АПФ) дает для N -элементного комплексного адаптивного весового вектора следующее выражение (без учета нормировки) [1]:

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{Y}\mathbf{Y}^H, \quad (1)$$

где \mathbf{R} – выборочная оценка корреляционной матрицы (КМ) сигналов с выходов элементов антенной решетки; \mathbf{S} – управляющий вектор, определяемый направлением прихода ожидаемого полезного сигнала и геометрией решетки; \mathbf{Y} – прямоугольная матрица размера $N \times K$ (обучающий пакет), столбцами которой являются N -мерные комплексные векторы \mathbf{Y}_k , $k = 1, \dots, K$, комплексных огибающих сигналов с выходов элементов решетки в K последовательных моментов времени, отстоящих один от другого на интервал дискретизации по Котельникову; $(\cdot)^H$ – знак эрмитовой сопряженности (транспонирования и комплексной сопряженности). Практически вместо явного формирования КМ \mathbf{R} (которая всегда является плохо обусловленной) и ее прямого обращения оказывается удобнее использовать эквивалентное ему решение с более высокой численной устойчивостью – ортогонализацию строк пакета \mathbf{Y} с последующей фильтрацией вектора \mathbf{S} фильтром-биортогонализатором [1].

В некоторых случаях, например, для защиты главного лепестка диаграммы направленности решетки при неточно известном направлении прихода ожидаемого полезного сигнала или для обеспечения нужной формы частотной характеристики фильтра при обработке широкополосных сигналов, используется алгоритм с дополнительными линейными ограничениями (ЛО) [2-5], требующий обращения еще одной матрицы более

Показано, что алгоритм адаптивной пространственной фильтрации с линейными ограничениями над полем комплексных чисел может быть реализован в численно устойчивой форме, не требующей прямого обращения матриц. Численно устойчивый алгоритм требует меньшей разрядности вычислителя по сравнению с методами, основанными на решении системы линейных уравнений методом Гаусса, причем требуемая разрядность может различаться в полтора – два раза.

сложной структуры. Этот алгоритм также может быть реализован в численно устойчивой форме, хотя на первый взгляд это и не представляется очевидным.

В соответствии со сказанным, в настоящей работе рассматриваются три вопроса:

- вывод формулы для комплексного весового вектора в задаче АПФ с ЛО;
- реализация полученного решения в численно устойчивой форме;
- оценка численной устойчивости и вычислительной сложности предлагаемого решения в сопоставлении с прямым обращением соответствующих матриц.

Оптимальное решение задачи АПФ с ЛО

Задача нахождения оптимального весового вектора при наличии L ЛО может быть сформулирована в виде задачи минимизации выходной мощности антенной решетки при наличии ЛО:

$$\min_{\mathbf{W}} \mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W} \quad \text{при условии} \quad \mathbf{W}^H \mathbf{C} = \mathbf{F},$$

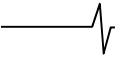
где \mathbf{C} – матрица ЛО размера $N \times L$, \mathbf{F} – L -элементный вектор-строка коэффициентов ЛО.

В соответствии с методом неопределенных множителей Лагранжа введем вспомогательную функцию $H(\mathbf{W})$, равную

$$H(\mathbf{W}) = \mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W} + (\mathbf{W}^H \mathbf{C} - \mathbf{F}) \boldsymbol{\Lambda},$$

где $\boldsymbol{\Lambda}$ – вектор-столбец неопределенных множителей размера L .

Условием экстремума (минимума) является равенство нулю градиента функции $H(\mathbf{W})$, равного (в соответствии с



правилами вычисления градиента функции комплексных векторно-матричных аргументов по Брендвуду [6])

$$\nabla_{\mathbf{W}} H(\mathbf{W}) = \mathbf{R}\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{\Lambda} = 0,$$

откуда следует

$$\mathbf{W}_{opt} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}.$$

Из условия $\mathbf{W}_{opt}^H \mathbf{C} = \mathbf{F}$ непосредственно получается, с учетом эрмитовости матриц \mathbf{R} и $\mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}$, что $\mathbf{\Lambda} = -(\mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{F}^H$, и окончательно

$$\mathbf{W}_{opt} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{F}^H. \quad (2)$$

Полученный результат, являющийся комплексным аналогом формулы (16) работы Фроста [2], требует обращения двух матриц – \mathbf{R} и $\mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}$.

Прямая реализация решения (2)

Возможны различные варианты прямой реализации решения (2). Как минимум два из них основаны на решении системы линейных уравнений методом последовательного исключения (методом Гаусса) [7].

Первый вариант – прямое обращение матрицы \mathbf{R} решением системы

$$\mathbf{R}\mathbf{X}_N = \mathbf{I}_N,$$

где \mathbf{X}_N – матрица размера $N \times N$, \mathbf{I}_N – единичная матрица размера N , т.е. фактически решением N систем с одной и той же матрицей \mathbf{R} , но с разными правыми частями, в роли которых выступают столбцы матрицы \mathbf{I}_N , а решениями являются столбцы матрицы \mathbf{X}_N . Очевидно, что получаемая таким образом матрица \mathbf{X}_N обратна по отношению к матрице \mathbf{R} : $\mathbf{X}_N = \mathbf{R}^{-1}$. Этот вариант требует предварительного прямого формирования матрицы \mathbf{R} в соответствии со вторым из равенств (1), а последующие шаги могут быть представлены следующей схемой:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}^{-1} \rightarrow \mathbf{C}_1 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_2 = \\ &= \mathbf{C}^H \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2^{-1} \rightarrow \mathbf{F}_1 = \mathbf{C}_2^{-1} \mathbf{F}^H \rightarrow \mathbf{W}_{optG1} = \mathbf{C}_1 \mathbf{F}_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Второй вариант использует то обстоятельство, что в решении (2) нам фактически нигде не нужна обратная матрица, как таковая, а нужно ее произведение на вектор или на матрицу. Поэтому, например, матрицу $\mathbf{C}_1 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}$ можно получить не как результат обращения матрицы \mathbf{R} и последующего умножения матрицы \mathbf{R}^{-1} на матрицу \mathbf{C} , а непосредственно из решения системы $\mathbf{R}\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}$. Схема этого варианта, аналогичная (3), имеет вид (матрица \mathbf{C}_1 и вектор \mathbf{F}_1 имеют тот же смысл, что и в схеме (3)):

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}\mathbf{C}_1 = \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_2 = \\ &= \mathbf{C}^H \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2 \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}^H \rightarrow \mathbf{W}_{optG2} = \mathbf{C}_1 \mathbf{F}_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Численно устойчивая реализация решения (2)

Известно, что если матрица \mathbf{R} представима в виде, определяемым вторым из равенств (1), то обратная к ней может быть определена как [1]

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{\Phi}^H \mathbf{\Phi}, \quad (5)$$

где $\mathbf{\Phi}$ – нижне-треугольная матрица размера $N \times N$, ортонормирующая строки пакета \mathbf{Y} , так что

$$\mathbf{\Phi}\mathbf{Y} = \mathbf{Z}, \mathbf{Z}\mathbf{Z}^H = \mathbf{I}_N.$$

Простейший способ получения матрицы фильтра-ортонормализатора $\mathbf{\Phi}$ заключается в ортонормировании

строк пакета \mathbf{Y} при помощи процедуры ортогонализации Грама-Шмидта.

Подставляя (5) в сомножитель в скобках равенства (2), представим его в виде:

$$\mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} = \mathbf{C}^H \mathbf{\Phi}^H \mathbf{\Phi} \mathbf{C} = (\mathbf{\Phi} \mathbf{C})^H \mathbf{\Phi} \mathbf{C} = \mathbf{Y}_1^H \mathbf{Y}_1,$$

где введено обозначение

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{\Phi} \mathbf{C}. \quad (6)$$

Матрица \mathbf{Y}_1 имеет размер $N \times L$. Ортонормирование ее столбцов при помощи фильтра-ортонормализатора $\mathbf{\Phi}_1$ (матрица $\mathbf{\Phi}_1$ – верхне-треугольная размера $L \times L$), так что

$$\mathbf{Y}_1 \mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_1^H \mathbf{Z}_1 = \mathbf{I}_L,$$

позволяет представить искомую обратную матрицу в виде:

$$(\mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1} = (\mathbf{Y}_1^H \mathbf{Y}_1)^{-1} = \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Phi}_1^H. \quad (7)$$

Используя выражения (2) и (5)...(7), получаем окончательную рабочую формулу:

$$\mathbf{W}_{optORT} = \mathbf{\Phi}^H \mathbf{\Phi} \mathbf{C} \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Phi}_1^H \mathbf{F}^H. \quad (8)$$

Последовательность вычислений по этой формуле, по аналогии с (3) и (4), может быть представлена следующей схемой, начиная с нахождения фильтра-ортонормализатора $\mathbf{\Phi}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi} &\rightarrow \mathbf{Y}_1 = \mathbf{\Phi} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{\Phi}_1 \rightarrow \mathbf{F}_1 = \\ &= \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Phi}_1^H \mathbf{F}^H \rightarrow \mathbf{F}_2 = \mathbf{C} \mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{W}_{optORT} = \mathbf{\Phi}^H \mathbf{\Phi} \mathbf{F}_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что фактически при вычислениях по (8) или (9) используются факторизованные представления фильтров-ортонормализаторов $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Phi}_1$, непосредственно получаемые в процессе ортогонализации [1].

Оценка численной устойчивости

Оценка численной устойчивости алгоритма (8), реализуемого по схеме (9), в сопоставлении с исходным алгоритмом (2), реализуемым по одной из схем (3) или (4), выполнена методом цифрового моделирования в виде оценки требуемой разрядности вычислителя для каждого из этих алгоритмов. Моделирование выполнено на языке VBA в среде Excel, при числе элементов решетки $N = 24 \dots 96$ (для одномерных и двумерных решеток), числе обучающих выборок $K = (1,5 \dots 5)N$, числе источников стохастических сигналов $M = 1 \dots 6$, интенсивности сигналов $P = 18 \dots 54$ дБ относительно собственных шумов в элементе решетки и числе ЛО $L = 1 \dots 6$. Ограничение разрядности вычислителя моделировалось, как и в предшествующей работе [8], усечением мантисс во всех промежуточных результатах вычислений (для каждой из квадратур в случае комплексных чисел) до требуемого числа разрядов после каждой арифметической операции используемого для решения задачи алгоритма с перебором числа разрядов J от большего к меньшему в заведомо достаточно широких пределах.

На рис. 1-3 представлены характерные примеры результатов моделирования в виде зависимости отношения помеха/шум Q на выходе адаптивного пространственного фильтра от числа разрядов вычислителя J для $N = 24$ (линейная решетка), $K = 3N = 72$, $M = 3$, $P = 54$ дБ, $L = 3$: рис. 1 – расчет по (3), рис. 2 – расчет по (4), рис. 3 – расчет по (9) (каждая точка графиков получена как среднее из 25 реализаций по случайности).

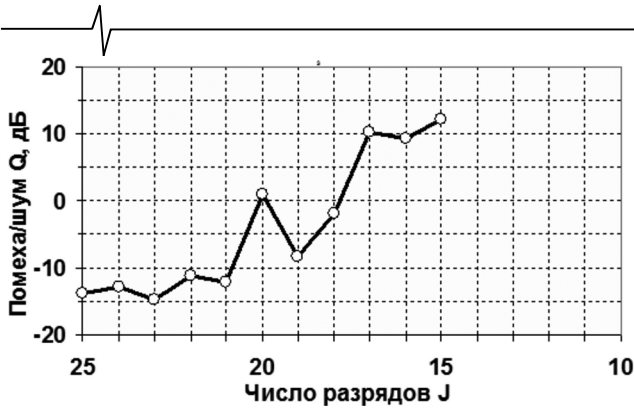


Рис.1. Алгоритм (2) в реализации (3)

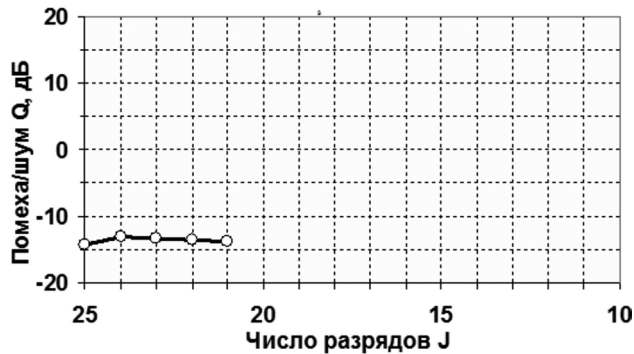


Рис.2. Алгоритм (2) в реализации (4)

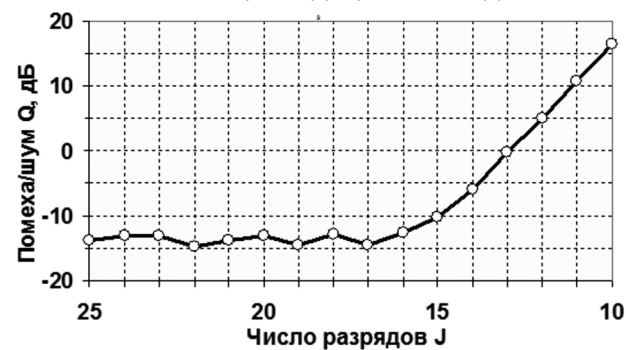


Рис.3. Алгоритм (8) в реализации (9)

Характерным для третьего варианта является малое и практически постоянное значение Q при достаточно большой разрядности (горизонтальный участок кривой на рис.3), и постепенное возрастание Q по мере уменьшения разрядности, когда число разрядов становится недостаточным (наклонный участок кривой). В качестве оценки требуемой разрядности вычислителя $J_{тр}$ в этом случае принималась абсцисса точки излома линейно-ломаной линии, аппроксимирующей зависимость Q от J ($J_{тр} = 15,5$ для рис. 3).

Для первых двух вариантов характер зависимости Q от J оказывается качественно иным: при некотором числе разрядов либо происходит аварийный останов по делению на ноль, и продолжение вычислений оказывается невозможным (рис. 2), либо из-за аномально больших ошибок вычислений плавный ход зависимости Q от J нарушается (рис. 1). В первом из этих случаев $J_{тр}$ принималось равным минимальному значению разрядности, при котором еще не происходил сбой, а во втором – значению разрядности, на котором заканчивался горизонтальный участок кривой. В приведенном примере в обоих случаях $J_{тр} = 21$, и эта закономерность явля-

ется общей – два первых варианта требуют практически одинаковой разрядности.

В общем случае величина требуемой разрядности оказывается практически не зависящей от конфигурации решетки (линейная или плоская), числа выборок K , числа линейных ограничений L и числа источников M (хотя от реализации к реализации величина $J_{тр}$ может изменяться в пределах двух – трех разрядов), но зависящей от интенсивности источников P , увеличиваясь на единицу при возрастании P на 6 дБ, и от числа элементов решетки N , увеличиваясь на единицу при удвоении N . Однако в любом случае третий вариант требует меньшей разрядности вычислителя по сравнению с двумя первыми, причем требуемая разрядность может различаться в полтора – два раза, что в общем согласуется с известными характеристиками точности матричных вычислений [9, 10].

Оценка вычислительной сложности

Оценка вычислительной сложности рассмотренных вариантов решения выполнена прямым расчетом числа операций, необходимых для их реализации. При этом под одной операцией мы понимаем операцию комплексного умножения-сложения, т.е. совокупность операции перемножения пары комплексных чисел и операции сложения пары комплексных чисел. Оценка числа операций выполнена в первом приближении – в пренебрежении в соответствующих формулах членами высших порядков малости (например, членами порядка N по сравнению с N^2 , и N^2 по сравнению с N^3).

В табл.1 приведено число комплексных умножений-сложений (КУС) для базовых операций, входящих в сопоставляемые расчетные соотношения, в табл. 2 даны окончательные результаты оценки их вычислительной сложности.

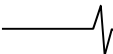
Таблица 1. Число комплексных умножений-сложений (КУС) для базовых операций

Базовая операция	Число КУС
Перемножение матриц размеров $N \times K$ и $K \times L$	KNL
Решение системы линейных уравнений с матрицей размера $N \times N$ и L правыми частями	$LN^2/2$
Ортогонализация строк матрицы размера $N \times K$	KN^2
Фильтрация N -элементного столбца факторизованным фильтром-ортогонализатором размера $N \times N$	$N^2/2$

Таблица 2. Число комплексных умножений-сложений (КУС) для сопоставляемых вариантов расчета

Варианты расчета	Число КУС
Вариант 1: алгоритм (2) в реализации (3)	$N^2(K + N)/2$
Вариант 2: алгоритм (2) в реализации (4)	$KN^2/2$
Вариант 3: алгоритм (8) в реализации (9)	KN^2

Мы видим, что второй вариант наиболее экономичен по числу операций, третий вариант уступает ему вдвое, а первый при $K > N$ занимает промежуточное положение (третий вариант уступает первому в $2/(1 + N/K)$ раз).



Заключение

Решение задачи адаптивной пространственной фильтрации при наличии линейных ограничений приводит к выражению (2) для оптимального весового вектора, которое требует обращения двух матриц – \mathbf{R} и $\mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}$. Использование приема ортогонализации (ортонормирования) строк исходного обучающего пакета \mathbf{Y} , входящего во второе из равенств (1), и столбцов матрицы \mathbf{Y}_1 по (6) при помощи соответственно фильтров-ортогонализаторов Φ и Φ_1 , позволяет свести реализацию решения (2) к виду (8), обладающему более высокой численной устойчивостью. Последняя характеризуется тем, что алгоритм (8) требует меньшей разрядности вычислителя, чем алгоритм (2), причем требуемая разрядность может различаться в полтора – два раза. Платой за это является увеличение объема вычислений – в худшем случае вдвое.

Литература

1. Ратынский М.В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках. М.: Радио и связь, 2003.
2. Frost O.L. An algorithm for linearly constrained adaptive array processing // Proc. IEEE. 1972. V.60. No.8. P.926 – 935.
3. Applebaum S.P., Chapman D.J. Adaptive arrays with main beam constraints // IEEE Trans. Antennas and propag. 1976. Vol. 24. No. 5. Pp. 650-662.
4. Takao K., Fujita M., Nishi T. An adaptive antenna array under directional constraint // IEEE Trans. Antennas and propag. 1976. Vol. 24. No. 5. Pp. 662-669.
5. Chapman D.J. Partial adaptivity for the large array // IEEE Trans. Antennas and propag. 1976. Vol. 24. No. 5. Pp. 685-696.
6. Brandwood D.H. A complex gradient operator and its application in adaptive array theory // IEE Proc. Pts.F and H. Vol. 130. No.1. Pp.11-16.
7. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980.
8. Ратынский М.В., Кирьямасов А.К. Оценка разрядности вычислительного устройства, требуемой для решения задач обработки стохастических сигналов // Цифровая обработка сигналов. 2016. № 4. С.40-42.
9. Van Trees H.L. Detection, estimation and modulation theory. Part IV. Optimum array processing. New York: Wiley, 2002.
10. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.