

УДК 621.391: 004(082)

ВЕКТОРНАЯ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ В МУЗЫКАЛЬНОЙ АКУСТИКЕ МЕТОДОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

*Смирнова Н.В., к.т.н., доцент Севастопольского государственного университета, e-mail: yolkanv@gmail.com;
Пономарева О.В., д.т.н., профессор Ижевского государственного университета имени М.Т. Калашникова,
e-mail: ponva@mail.ru.*

VECTOR AND SPECTRAL DIGITAL SIGNAL PROCESSING IN MUSICAL ACOUSTICS USING PARAMETRIC DISCRETE FOURIER TRANSFORM

Smirnova N.V., Ponomareva O.V.

We consider one of the relevant scientific areas of digital signal processing (DSP) – digital vector and spectral processing of musical signals playing an important role in digital information music technologies. System analysis of the vector and spectral processing of musical signals used in musical acoustics has shown a wide use of classical methods based on the discrete Fourier transform (DFT). It is shown that the unwanted effects of the DFT significantly affect the efficiency of vector and spectral processing of musical signals. It is proposed to increase the efficiency of classical methods in musical acoustics by using parametric Fourier transform (DFT-P). The use of DFT-P to determine the pitch and timbre of musical signals is investigated.

Key words: spectral processing of musical signals, digital signal processing (DSP), parametric Fourier transform.

Ключевые слова: музыкальная акустика, музыкальный сигнал, дискретное преобразование Фурье, параметрическое дискретное преобразование Фурье, цифровые информационные музыкальные технологии, локализация спектральных пиков, высота тона, тембр.

Введение

Одним из главных научных направлений цифровой обработки сигналов – (ЦОС) является цифровая векторная и спектральная обработка сигналов¹, которая играет важнейшую роль в цифровых информационных музыкальных технологиях, научные и прикладные аспекты которых рассматриваются в музыкальной акустике.

В настоящее время многие крупные научные коллективы, как в России, так и за рубежом, ведут интенсивные исследования в области музыкальной акустики по созданию, передаче, обработке, воспроизведению и восприятию эстетических музыкальных звуков², музыки в целом.

Основными задачами векторной и спектральной обработки сигналов в музыкальной акустике, являются определение высоты тона и тембра эстетических му-

Рассматривается одно из актуальных научных направлений цифровой обработки сигналов (ЦОС) – цифровая векторная и спектральная обработка музыкальных сигналов, которые играют важную роль в цифровых информационных музыкальных технологиях. Системный анализ применяемых в музыкальной акустике методов векторной и спектральной обработки музыкальных сигналов, показал широкое использование классических методов, основанных на дискретном преобразовании Фурье (ДПФ). Показано, что нежелательные эффекты ДПФ существенно влияют на эффективность и результативность методов векторной и спектральной обработки музыкальных сигналов. Предложено повышение эффективности и результативности методов в музыкальной акустике за счет применения метода параметрического преобразования Фурье (ДПФ-П). Исследованы вопросы применения ДПФ-П для определения основного тона и тембра музыкальных сигналов.

зыкальных звуков, поскольку именно эти характеристики музыкальных сигналов позволяют судить о мелодии, гармонии, звучащем голосе и инструменте.

Системный анализ применяемых в музыкальной акустике методов векторной и спектральной обработки музыкальных сигналов показал широкое использование классических методов, основанных на дискретном преобразовании Фурье (ДПФ) и алгоритмах быстрого его вычисления – алгоритмах быстрого преобразования Фурье (БПФ). Это объясняется адекватностью математического аппарата ДПФ структуре музыкальных сигналов, возможностью наглядной физической интерпретации и толкования полученных результатов.

В тоже время известно, что ДПФ помимо достоинств обладает и существенными недостатками, которые проявляются в виде нежелательных эффектов наложения, частотола, утечки и гребешкового эффекта. При обработке музыкальных сигналов особенно нежелателен эффект частотола, затрудняющий обработку сигналов

¹ **Векторный анализ** – множество методов частотного анализа дискретных сигналов, в результате которых обеспечивается получение информации о частотах, амплитудах и фазах составляющих сигналов и/или их изменений во времени. **Спектральный анализ** множество методов частотного анализа дискретных сигналов, в результате которых обеспечивается получение информации о частотах и амплитудах составляющих сигналов и/или их изменений во времени.

² **Эстетические музыкальные звуки** – музыкальные звуки пригодные для музыки (звуки внутримелодические, приятные и ровные, не раздражающие наш слух).



из-за несовпадения частот музыкальных звуков и их обертонов с частотами, получаемыми в результате применения ДПФ. В работе [1] предложено и исследовано обобщение дискретного преобразования Фурье в виде параметрического дискретного преобразования Фурье (ДПФ-П). Данное преобразование позволяет устранить или существенно снизить влияние нежелательных эффектов ДПФ при векторной и спектральной обработке сигналов. В работах [2-6] рассмотрены приложения ДПФ-П и множества его базисных систем для разного рода сигналов в различных предметных областях, доказана их эффективность.

Специфика музыкальных сигналов вытекает, во-первых, из их математической модели в виде трех сумм:

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N_1} X_i(t) + \sum_{j=1}^{N_2} Y_j(t) + \sum_{k=1}^{N_3} \xi_k(t);$$

где $Z(t)$ – сложный ангармонический сигнал³; $X_i(t)$ – i ангармонический сигнал, являющийся моделью i инструмента или вокала; $Y_j(t)$ – сигнал, являющийся моделью j шумового музыкального инструмента; $\xi_k(t)$ – сигнал, являющийся моделью k помехи, во-вторых, из структуры стадий становления сигналов музыкальных инструментов: начальная фаза (атака, процесс установления); средняя фаза (основная, стационарная часть); конечная фаза (глушение, процесс спада)⁴.

Учитывая аналитические и статистические свойства базисов ДПФ-П, представляется важным, актуальным и своевременным шагом применение ДПФ-П в музыкальной акустике для векторной и спектральной обработки музыкальных сигналов.

Задача данной работы – повышение эффективности и результативности векторной и спектральной обработки музыкальных сигналов в музыкальной акустике за счет применения метода параметрического преобразования Фурье.

Система цифровой обработки музыкальных сигналов на основе ДПФ-П

Параметрическое дискретное преобразование Фурье представляет собой разложение дискретного музыкального сигнала (ДМС) по базису параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ-П):

$$\begin{aligned} def_p(k, n, \theta) &= W_N^{(k+\theta)n} = \\ &= \exp\left[-j \frac{2\pi}{N} (k+\theta)n\right], \quad 0 \leq \theta < 1; \end{aligned} \quad (1)$$

и определяется в матричной форме следующим соотношением:

$$S_{N,\theta} = \frac{1}{N} F_{N,\theta} X_N; \quad 0 \leq \theta < 1,$$

$$F_{N,\theta} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^\theta & \dots & W_N^{\theta(N-1)} \\ 1 & W_N^{(1+\theta)} & \dots & W_N^{(1+\theta)(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1+\theta)} & \dots & W_N^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad (2)$$

где $X_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ – представление дискретного музыкального сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, в виде вектора N -мерного линейного пространства; T – знак транспонирования; θ – параметр ДПФ-П; $S_{N,\theta} = [s(0, \theta), s(1, \theta), \dots, s((N-1), \theta)]^T$ – вектор коэффициентов разложения X_N по системе ДЭФ-П, задаваемой матрицей $F_{N,\theta}$, которые задают амплитудно-частотный и фазово-частотный спектры ДМС.

Существует и алгебраическая форма ДПФ-П, которая имеет следующий вид:

$$S_N(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n}, \quad k = \overline{0, N-1}; \quad 0 \leq \theta < 1; \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что при значении параметра $\theta = 0$ ДПФ-П переходит в ДПФ. Важным свойством ДПФ-П является то, что за счет варьирования параметра θ в ДПФ-П у исследователя имеется возможность анализа амплитудно-частотного и фазово-частотного спектра ДМС между частотами стандартного ДПФ, т.е. возможность существенного ослабления влияния эффекта частотного.

Обработка дискретного музыкального сигнала $x(n)$, заданного на конечном интервале, может проводиться в двух равноправных и взаимосвязанных областях: во временной области (временной и корреляционный анализ ДМС, фильтрация, гомоморфная фильтрация ДМС) и в частотной области (векторный и спектральный анализ ДМС, кепстральный анализ).

В основе теории векторной и спектральной обработки дискретных сигналов (в том числе и музыкальных) на конечных интервалах, как во временной, так и частотной областях лежат три базовых постулата, которым удовлетворяет ДПФ-П [7]:

- определение дискретного сигнала на конечном интервале в той или иной форме (например, наличие или отсутствие операции квантования по уровню);
- определение сдвига дискретного сигнала в рамках конечного интервала, что позволяет периодически продолжить (периодизировать) сигнал;
- определение системы базисных функций разложения дискретного сигнала на конечном интервале во временной и частотной областях.

В теории векторной и спектральной обработки дискретных сигналов на конечных интервалах доказаны следующие положения:

- взвешивание дискретного сигнала прямоугольным окном (определение дискретного сигнала на конечном интервале) в одной из областей (временной или частотной) приводит к свертке в другой области с функцией вида; $\sin(N \cdot x/2)/(N \sin(x/2))$;

³ Сложный ангармонический сигнал – это сигнал, который может быть представлен в виде суммы ангармонических колебаний.

⁴ Продолжительность каждой фазы у различных музыкальных инструментов, как правило, различна.

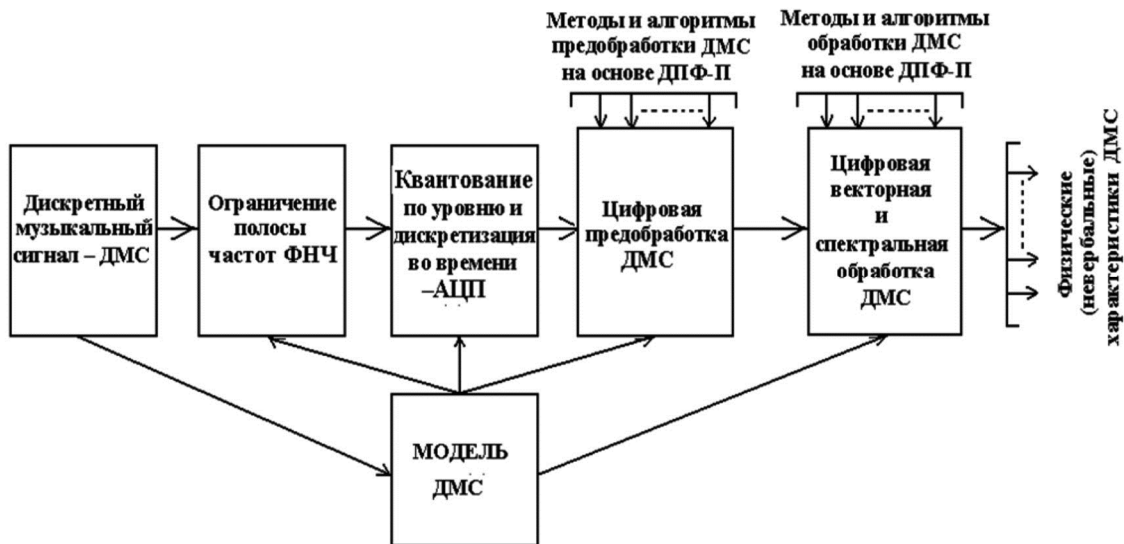


Рис. 1. Система цифровой векторной и спектральной обработки МДС методом ДПФ-П

– дискретизации сигнала в одной области приводит к операции периодизации в другой области.

На рис. 1 приведена обобщенная система цифровой векторной и спектральной обработки МДС методом ДПФ-П.

Рассмотрим решение, так называемой задачи локализации спектральных пиков применительно к определению частоты основного тона музыкального сигнала в музыкальной акустике.

Задача локализации спектральных пиков в музыкальной акустике

Одним из актуальных вопросов векторной и спектральной обработки сигналов в музыкальной акустике является решение задачи определения частот спектральных максимумов – задачи локализации спектральных пиков. Обычно задача определения частот спектральных максимумов решается с помощью ДПФ, применение которого осложнено в связи с проявлением эффектов частотола и утечки. Для ДМС проявление этих эффектов особенно нежелательно, поскольку (в силу принятых в настоящее время музыкальных шкал, определяющих частоты нот) частоты коэффициентов ДПФ не совпадают с соответствующими частотами конкретных нот, и спектральная картина ДМС оказывается «смазанной».

Введем в рассмотрение *дискретно-временное преобразование Фурье* (ДВПФ). Данное преобразование ставит в соответствие некоторой последовательности $y(n)$, $n = -\infty, +\infty$, непрерывное преобразование Фурье согласно выражению:

$$S_y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) \cdot \exp(-j2\pi \cdot f \cdot n); \quad -\infty \leq f \leq \infty. \quad (4)$$

Из выражения (4) непосредственно следует, что ДВПФ это Z-преобразование $y(n)$, $n = -\infty, +\infty$, вычисленное на единичной окружности.

Сформируем последовательность $x_1(n)$, $n = -\infty, +\infty$, дополнив последовательность $x(n)$, $n = \overline{0, (N-1)}$, ну-

левыми отсчетами от $-\infty, +\infty$. ДВПФ которой обозначим как $S_{x_1}(f)$. Таким образом, последовательность $x_1(n)$, $n = -\infty, +\infty$, на интервале $n = \overline{0, (N-1)}$ в точности равна $x(n)$, которую $(x(n))$ можно интерпретировать как взвешивание $x_1(n)$ прямоугольным окном $\omega(n) = 1$, $n = \overline{0, (N-1)}$.

Известно, что ДПФ последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, (N-1)}$, представляет собой (при соответствующей нормировке) отсчеты $S_{x_1}(f)$ на фиксированном множестве точек $2\pi \cdot k / N$, $k = \overline{0, (N-1)}$. Можно показать, что ДПФ-П последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, (N-1)}$, представляет собой (при соответствующей нормировке) отсчеты $S_{x_1}(f)$ на множестве точек, мощность которого регулируется параметром θ ; $\{2\pi \cdot (k + \theta) / N\}$, $k = \overline{0, (N-1)}$, $0 \leq \theta < 1$.

Задачу локализации спектральных пиков можно сформулировать и как задачу измерения частоты гармонического сигнала, которая, как правило, находится между частотами бинов ДПФ. В результате, вследствие дискретности измерения спектра, частота гармонического сигнала измеряется с погрешностью, равной половине частотного интервала Δf между бинами ДПФ ($\Delta f = f_d / N$ – частотный интервал между бинами ДПФ; f_d – частота дискретизации сигнала, N – размерность ДПФ)⁵.

Находить значения $S_{x_1}(f)$ на большем числе точек, чем позволяет ДПФ можно путем дополнения исходной

⁵ В том случае, если частота гармонической компоненты совпадает с центральной частотой одного из бинов ДПФ, проблемы, связанные с проявлением эффекта утечки, отсутствуют, и частота синусоидального сигнала измеряется с погрешностью, стремящейся к нулю.

последовательности $x(n)$ нулевыми отсчетами. Данная операция носит название операции дополнения нулями во временной области – ОДНВ. Отметим, что поскольку для выполнения ДПФ обычно применяют алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ) по основанию 2, то длительность последовательности дополненной нулями $x_d(n)$ должна удовлетворять соотношению: $N = 2^p$; $p = 3, 4, \dots$

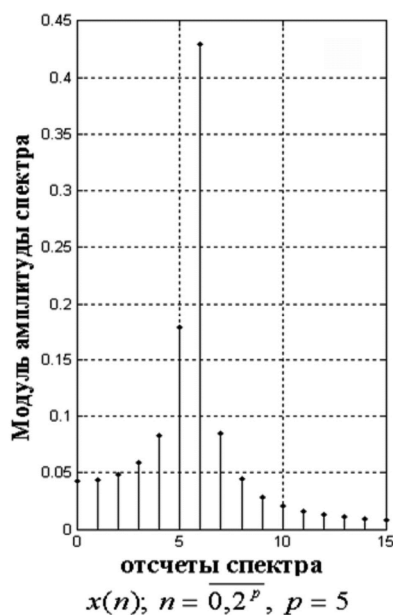
Известный метод измерения частоты сигнала, основанный на ОДНВ исходного сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, (N-1)}$, число которых определяется соотношением $N \cdot (2^m - 1)$; $m = 1, 2, 3, \dots$, позволяет за счет уменьшения частотного интервала $\Delta f_{\text{ОДНВ}}$ между бинами ДПФ сигнала $x_d(n)$; $n = \overline{0, (2^m - 1)}$: $\Delta f_{\text{ОДНВ}} = \Delta f / 2^m$, уменьшить погрешность измерения частоты исходного гармонического сигнала.

Метод, основанный на ОДНВ, имеет следующие существенные недостатки:

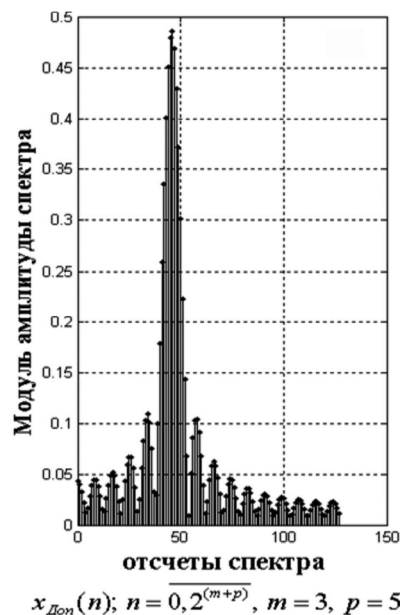
- необходимость существенного расширения оперативной памяти для хранения нулевых значений сигнала;
- проведение непроизводительных операций с нулевыми значениями сигнала;
- фиксированность шага дискретизации по частоте при измерении спектров;
- число операций, определяющее время измерения частоты, возрастает в $\nu = 2^m \cdot (m + p) / p$ раз.

Предлагаемый метод локализации спектральных пиков (измерения частоты гармонических сигналов) основан на параметрическом дискретном преобразовании Фурье и свободен от указанных недостатков.

Пусть задан сигнал $x(n) = \cos(2\pi / 32 \cdot k \cdot n)$; $n = \overline{0, 31}$; $k = 5, 750$; и сигнал $x_d(n)$; $n = \overline{0, 255}$, модули спектров, которых приведены на рис. 2, а и рис. 2, б, соответственно.



а)



б)

Рис. 2. Модули спектров сигналов $x(n)$ и $x_{\text{дон}}(n)$

Математическая формулировка задачи

Задана передаточная характеристика фильтра ДПФ: $F(x) = \sin(N \cdot x / 2) / (N \sin(x / 2))$ и два ее отсчета n_1 и n_2 , между которыми находится $\max F(x)$. Необходимо найти значение R , доставляющее максимум функции $F(x)$ на интервале $[n_1, n_2]$ с заданной точностью, т.е. найти:

$$R = \arg \max F(x), \quad R \in [n_1, n_2]. \quad (5)$$

Алгоритм метода локализации спектральных пиков

В силу структуры функции $F(x)$ из рис. 2, а следует, что $\max F(x)$ находится между пятым и шестым отсчетами, а из рис. 3 – между сороковым и сорок восьмым отсчетами (жирные линии). Поскольку амплитуда шестого бина больше пятого (рис. 2, а), и сорок восьмой отсчет ДПФ больше сорокового (рис. 3), несложно сделать вывод о том, что частота гармонического сигнала находится между $5,5 f_d / 32$ Гц и $6 f_d / 32$ Гц (пунктирная линия на рис. 3), а погрешность измерения частоты гармонического сигнала равна $0,5 f_{\text{кв}} / 32$ Гц. Согласно классическому методу – методу ОДНВ, дополняя 32-точечный сигнал $x(n) = \cos(2\pi / 32 \cdot k \cdot n)$ 224 нулевыми отсчетами, мы уменьшаем погрешность измерения в 4 раза, естественно мирясь с существенными недостатками данного подхода, которые приведены выше.

Разработанный метод для решения задачи поиска спектральных пиков предполагает выполнение нескольких ДПФ-П при разных значениях параметра θ , что позволяет уменьшить анализируемый частотный интервал в $1/\theta$ раз. Используя метод локализации спектральных пиков на основе ДПФ-П, мы получаем тот же результат, что и в методе ОДНВ, выполнив всего два измерения частотного спектра, при $\theta = 0,125$ и $\theta = 0,250$ (рис. 3, тонкие линии), сократив при этом время измерения частоты гармонического сигнала, в сравнении с методом ОДНВ, в $\gamma = 2^{m-1} (p + m) / p$ раз. Отметим, что применив метод однопараметрической безусловной оптимизации

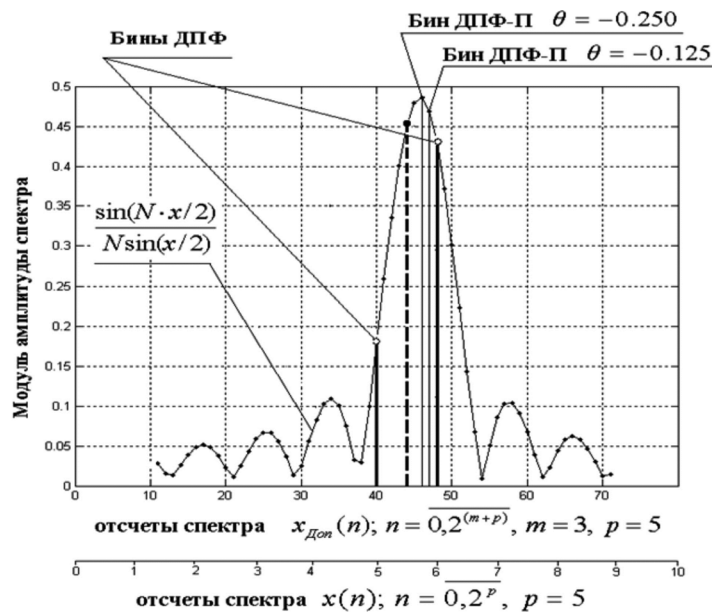


Рис. 3. Иллюстрация работы алгоритма измерения частоты сигналов на базе параметрического дискретного преобразования

на основе методов половинного деления и хорд, можно повысить сходимость предлагаемого алгоритма.

Отметим еще одно важное преимущество предлагаемого метода локализации спектральных пиков на основе ДПФ-П. В том случае, когда операция ОДНВ принципиально не позволяет «настроить» частоты бинов на частоту гармонического сигнала из-за фиксированности шага дискретизации по частоте ДПФ, точно определить частоту гармонического сигнала классическим методом невозможно. В то же время метод локализации спектральных пиков на основе ДПФ-П легко справляется с данной задачей за счет варьирования параметра θ .

Важным и эффективным приложением разработанного метода локализации спектральных пиков на основе ДПФ-П является решение актуальной задачи музыкальной акустики – задачи определения высоты МДС (определения частоты основного тона МДС). Актуальность определения частоты основного тона МДС объясняется тем, что восприятие высоты музыкально-акустических сигналов играет центральную роль в выделении партии отдельного музыкального инструмента и (или) партии вокала слуховой системой человека. Высота музыкального сигнала являются одним из двух основных идентификаторов «вычленения» конкретного музыкального сигнала из общего музыкально-акустического потока [8]. Вторым важным идентификатором для решения указанной задачи является тембр МДС, который будет рассмотрен ниже.

Результаты работ [8-12] подтверждают важнейшую роль основного тона в работе слуховой системы человека:

- слуховая система человека способна различать высоту звука только у периодических сигналов, которые могут быть чисто гармоническими и ангармоническими;

- слуховая система человека «присваивает» музыкальному сигналу высоту его основного тона, исходя из того, что спектр музыкального сигнала состоит из гармоник – обертонов, частоты которых находятся в целочисленных отношениях⁶;

- у музыкального сигнала, для которого условие периодичности не выполняется, слуховая система человека не может определить высоту тона и воспринимает его как шумовой сигнал. Например, музыкально акустические сигналы таких музыкальных инструментов как тарелки, марacas, щетки, гонги и др. не имеют определенной высоты и воспринимаются как шумовые сигналы;

- слуховая система человека может различить по высоте два звуковых сигнала, отличающихся по частоте всего на 0,2 %. Такая высокая разрешающая способность слуха позволяет выделять примерно 140 градаций высоты тона ниже частоты 500 Гц, а в диапазоне от 500 Гц до 16 кГц – примерно 480 градаций высоты тона (всего 620 градаций)⁷;

- слуховая система человека ощущение высоты чистого тона (сигнала одной частоты) связывает связано не только с частотой сигнала, но и с интенсивностью звука и его длительностью;

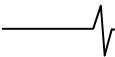
- фазовые соотношения в музыкально-акустическом сигнале оказывают существенное влияние на звуковысотные отношения (на мелодию и гармонию).

- высота тона позволяет классифицировать звуки количественно, опираясь на физические измерения физических величин, и служит в музыке основой мелодии, гармонии и интонации.

В заключение данного раздела статьи, подчеркнем, что разработанный метод локализации спектральных пиков кроме векторной и спектральной обработки МДС может найти свои приложения и в таких предметных областях, как анализ речевых сигналов в кибернетике и

⁶ **Примечание авторов статьи:** таким образом, еще раз подтверждается ангармоническая структура модели музыкального сигнала.

⁷ В европейской музыке инструменты с равномерно темперированной шкалой используют около 100 градаций высоты тонов, что создает большие перспективы для развития музыкальных компьютерных технологий [.]



связи, анализ биомедицинских сигналов в компьютерной медицинской диагностике и в целом ряде других областей научных исследований.

Применение параметрического дискретного преобразования Фурье для определения тембра музыкальных сигналов

Решение проблематики определения тембра и установления его функциональной или корреляционной зависимости от физических характеристик ДМС является одной из важных и актуальных задач музыкальной акустики. Тембр, ощущаемый слуховой системой человека как субъективная характеристика музыкального сигнала, является сложнейшим понятием в теории музыки, в определение которого внесли вклад многие всемирно известные ученые. Подчеркивая сложность определения тембра, известный ученый, проф. Алдошина И. А. [8, 9] сравнила сложность определения тембра со сложностью определения понятия жизнь – «все понимают, что это такое, однако над научным определением наука бьется уже несколько столетий».

Приведем основные этапы эволюции понятия «тембр» музыкальных сигналов [8-13]:

– исследуя музыкальные звуки Гельмгольц (1877 г.), пришел к выводу: о том, что «разница в музыкальном качестве тона (тембре) зависит только от присутствия и силы парциальных тонов (обертонов), и не зависит от разности фаз, с которой эти парциальные тоны вступают в композицию»⁸.

– Флетчер (1938 г.), пришел к заключению, что тембр зависит от обертоновой структуры звука, и изменяется при изменении громкости и высоты тона, хотя обертоновая структура может при этом сохраняться;

– Ликлайдер (1951 г.), показал, что тембр является многомерным объектом восприятия и зависит от общей обертоновой структуры звука, которая также может меняться с изменением громкости и высоты тона;

В стандарт США ANSI-60 (1973 г.) к существующему определению тембра⁹: сделано следующее дополнение: «Тембр зависит от спектра сигнала, и он (тембр) также зависит от формы волны, звукового давления расположения частот в спектре и временных характеристик звука».

Пломп (1976 г.), доказал, что восприятие тембра зависит как от амплитудного спектра (в первую очередь, от формы спектральной огибающей), так и от фазового спектра.

Россинг (1990 г.) показал, что тембр зависит от временной огибающей звука и его длительности.

Начиная с 1995 года происходит переход к изучению тембра с системных позиций, который основан на общих принципах гештальт-психологии распознавания слуховых образов¹⁰, на базе временных, спектральных, и векторных описаний музыкального сигнала, а также огибающих в соответствующих областях.

Прежде чем перейти к рассмотрению взаимосвязи тембра с физическими характеристиками музыкального сигнала, полученными в результате физических измерений, определимся с какими измерениями, мы имеем дело, при исследовании тембра. В современной теории измерений [14, 15] различают физические измерения и нефизические измерения. Физические измерения имеют целью установление значений количественных (связанных с естественными эталонами) объективных характеристик исследуемого физического объекта таких, как, например, частота, амплитуда, спектр. Нефизические измерения опираются на субъективные характеристики исследуемого объекта, которые связаны с его вербальными характеристиками, такими, например, как в случае исследования тембра: сухой, сочный, бархатистый, звонкий, мягкий, морозный, яркий, тусклый. Физические и нефизические измерения различаются между собой возможностью формализованного (математического) описания процедур измерения. Если физические измерения допускают исчерпывающую формализацию процедур измерения, то с нефизическими измерениями дело обстоит гораздо сложнее, поскольку последние, включают в себя наряду с формализуемыми процедурами измерений (процедуры могут и отсутствовать) и неформализуемые процедуры, слуховой системой человека.

Строго говоря, определение тембра того или иного музыкального сигнала – это нефизическое измерение, формализация которого, как уже отмечалось, представляет собой весьма не простую задачу. Под формализацией будем понимать результат отыскания для отдельных субъективных (вербальных) характеристик тембра соответствующих объективных характеристик.

На основе системного анализа отечественных и зарубежных информационных источников о результатах выявления физических параметров ДМС, характеризующих тембр того или иного музыкального инструмента, того или иного певческого голоса, а также результатов собственных исследований выделены следующие перспективные научные направления векторной и спектральной обработки музыкальных сигналов:

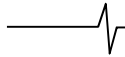
Скользкий векторный анализ¹¹ ДМС во всех фазах – начальной (атака), средней (стационарная часть) и конечной (спад), с целью выявления фазовых и амплитудных соотношений обертонов между собой во времени;

⁸ Данное положение практически дословно воспроизводится в современных учебниках физики, несмотря на существенные изменения, дополнения и уточнения в результате проводимых исследований тембра музыкальных сигналов (см., например, элементарный учебник физики / под ред. Ландсберга Г.С. – В 3 томах. Том 3. Колебания и волны. Оптика. Атомная и ядерная физика – М.: Физматгиз, 2015. – 662 с.).

⁹ Тембр – атрибут слухового восприятия, который позволяет слушателю судить, что два звука, имеющие одинаковую высоту и громкость, различаются друг от друга.

¹⁰ Гештальт-психология распознавания слуховых образов – основана на следующих общих принципах: сегрегации, подобии, непрерывности и «общей судьбе» – подборка статей с сайта <http://www.625-net.ru>.

¹¹ Скользящий векторный анализ ДМС – группа методов дискретной Фурье – обработки МДС, которая позволяет получать полную информацию об изменениях во времени частот, амплитуд и фаз гармонических составляющих исследуемых сложных МАС.



Спектральный анализ ДМС в начальной фазе (в атаке), с целью выявления порядка проявления обертонов во времени;

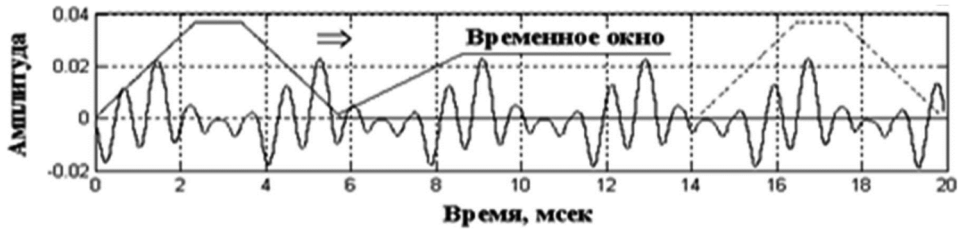
Скользящий векторный и спектральный анализ огибающей ДМС во всех фазах – начальной, средней и конечной, с целью выявления изменений формы огибающей во времени.

Использование в этих направлениях для исследований ДПФ-П вместо ДПФ позволяет получить более де-

тальную спектральную картину, как в статике, так и в динамике. Дело в том, что, как векторная, так и спектральная картины, полученные с помощью ДПФ, являются лишь «прореженными» вариантами соответствующих картин, полученных на основе ДПФ-П.

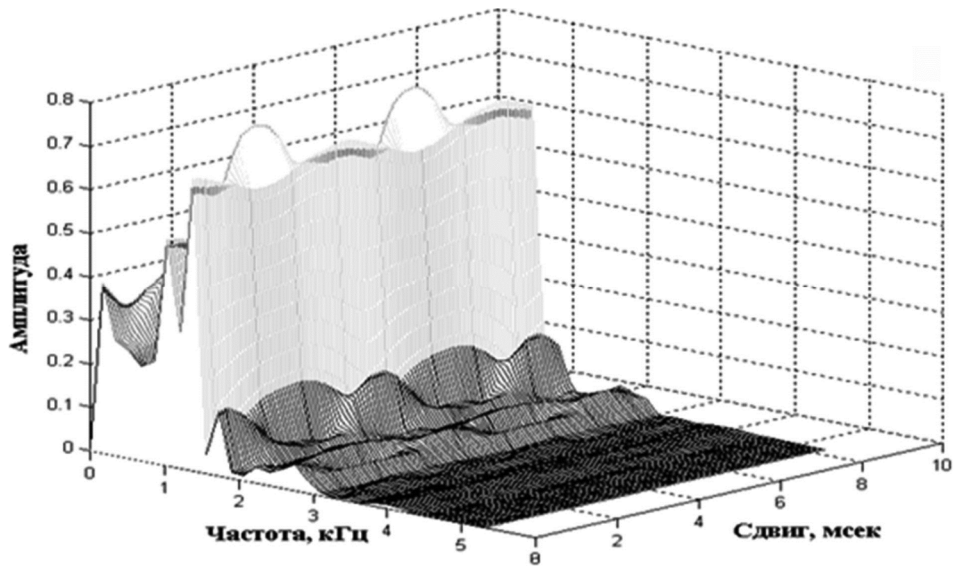
Эффективность и результативность векторной и спектральной обработки музыкальных сигналов в музыкальной акустике на основе ДПФ-П иллюстрируется рис. 4 и 5.

Гобой МАС ноты «до» первой октавы, стационарная часть



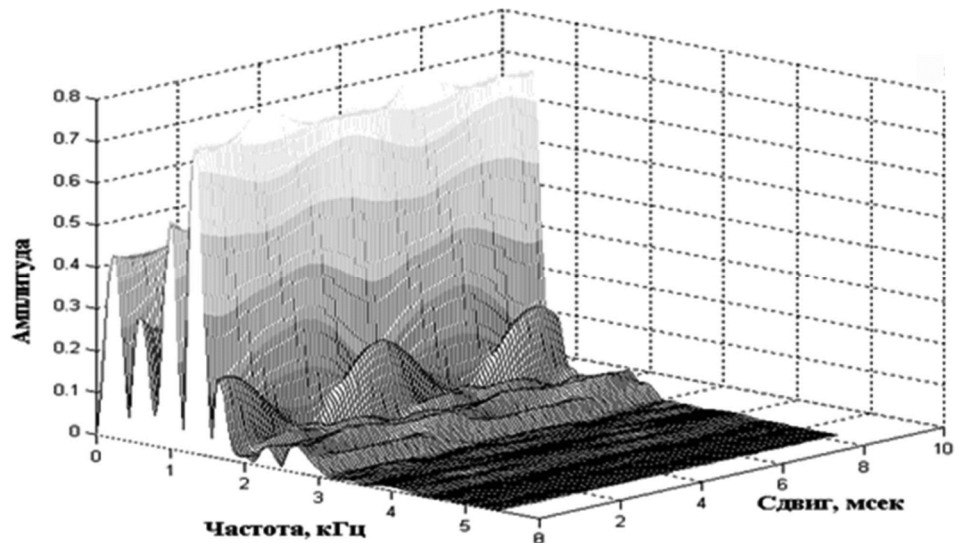
а)

Гобой, скользящий спектр ДПФ МАС ноты «до» первой октавы, стационарная часть



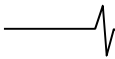
б)

Гобой, скользящий спектр ДПФ МАС ноты «до» первой октавы, стационарная часть $\theta = 0, 1/4, 1/2, 3/4$

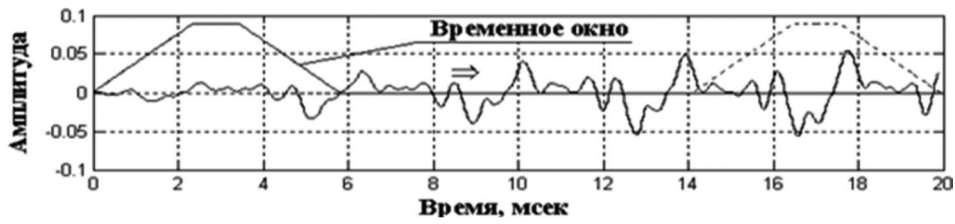


в)

Рис. 4. Спектральная обработка МДС ноты «до» первой октавы, гобой, стационарная часть

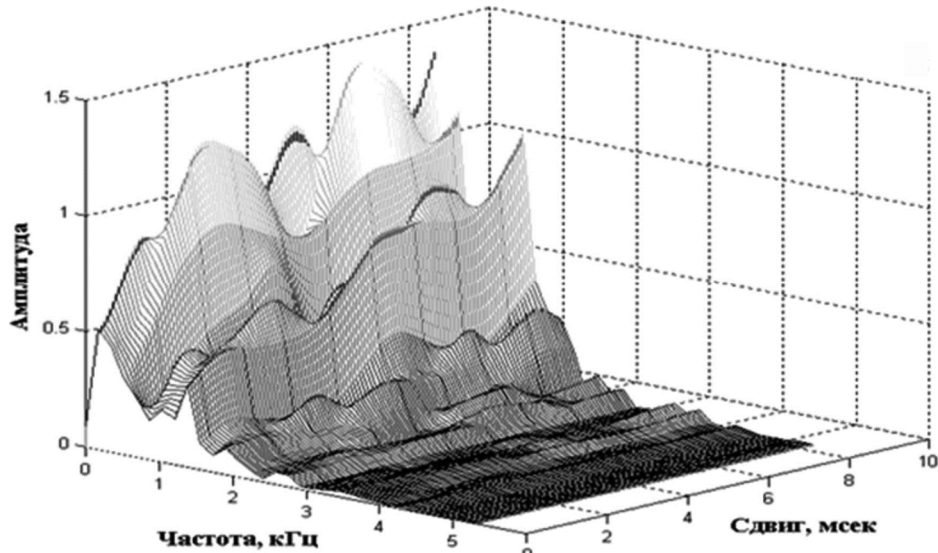


Пианино, МАС ноты «до» первой октавы, атака



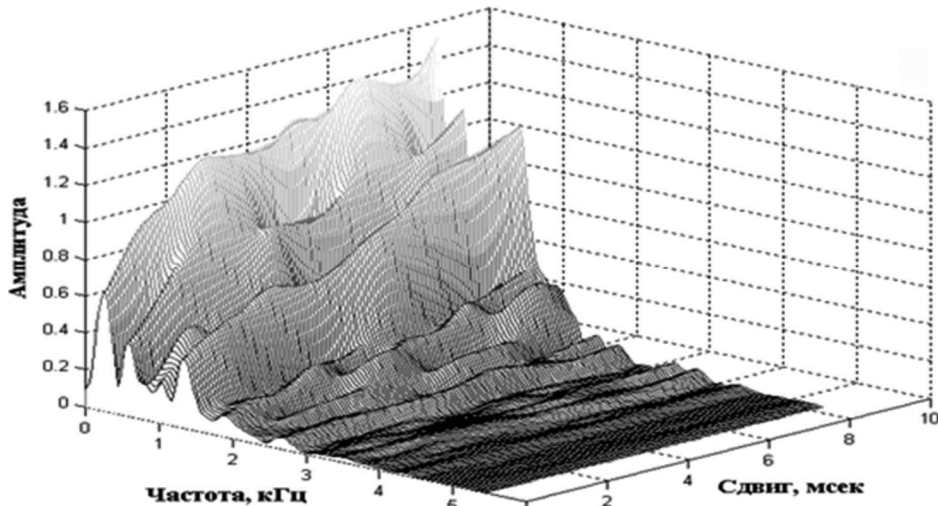
а)

Пианино, скользящий спектр ДПФ МАС ноты «до» первой октавы, атака



б)

Пианино, скользящий спектр ДПФ МАС ноты «до» первой октавы, атака $\theta = 0, 1/4, 1/2, 3/4$



в)

Рис. 5. Спектральная обработка МДС ноты «до» первой октавы, пианино, атака

Получение более детальной картины важно на всех стадиях становления ДМС и отдельно для каждого обертона, особенно на стадии атаки, т.к. обертоны нарастают неодинаково, и анализ их нарастания имеет принципиальное значение при определении тембра.

Отметим, что с увеличением частоты дискретизации музыкального сигнала спектральная картина, получаемая стандартным ДПФ, более детальной не становится, поскольку интервал между соседними анализируемыми частотами зависит только от временной длительности

анализируемого фрагмента сигнала, но не от количества отсчетов, приходящихся на этот фрагмент, и поэтому предложенные методы и алгоритмы останутся актуальными и при дальнейшем развитии технических средств записи и воспроизведения музыкальных звуков.

Заключение

1. Для описания ДМС используются объективные характеристики (частота, амплитуда, временной, частотный спектры), на основе физических измерений и субъек-

ективные (вербальные) характеристиками, основе внефизических измерений, посредством описания слуховых ощущений, испытываемых слуховой системой человека. Выяснение взаимосвязи субъективных и объективных характеристик ДМС является одной из главных проблем музыкальной акустики.

2. Важными и актуальными задачами компьютерной векторной и спектральной обработки ДМС являются следующие задачи:

– задача определения высоты (частоты основного тона), поскольку частота основного тона играет центральную роль в выделении партии отдельного музыкального инструмента и (или) партии вокала слуховой системой человека и служит в музыке основой мелодии, гармонии и интонации;

– задача формализации понятия тембра – задача установления зависимости тембра (функциональной или корреляционной) от физических характеристик МДС, поскольку именно тембром различаются звуки одинаковой высоты и громкости, но исполненные на различных инструментах, разными певческими голосами, или на одном инструменте, но разными способами.

3. ДПФ позволяет определить значения ДВПФ ДМС только в фиксированном множестве точек единичной окружности, что является основной причиной невысокой точности определения основного тона ДМС, методами и алгоритмами, основанными на ДПФ.

4. Применение ДПФ-П для анализа ДМС позволяет на порядок повысить точность определения основного тона ДМС за счет варьирования параметра преобразования.

5. Результаты приложения ДПФ-П для решения задачи формализации понятия «тембр», решения задачи анализа ДМС во временной области на его различных этапах (атака, стационарная часть, спад) показали, что ДПФ-П дает возможность повысить эффективность и результативность обработки ДМС во временной, частотной и частотно-временной областях.

Литература

1. Пономарева О.В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – № 2. – С. 7-11.

2. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. – 2011. – № 1. – С. 2-6.

3. Ponomarev V.A. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Method for Effective Measurement of a Sliding Parametric Fourier Spectrum. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, vol. 50, no. 2, pp.1-7. (2014).

4. Пономарева О.В. Основы теории дискретных косвенных измерений параметров сигналов – Ижевск: Издательство ИжГТУ, – 2016. 172 с.

5. Ponomareva O., Ponomarev A., Ponomarev V. Evolution of Forward and Inverse Discrete Fourier Transform // В сборнике: Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTs 2018). 2018. С. 313-318.

6. Ponomareva O., Ponomarev A., Ponomareva N. Window - presume Parametric Discrete Fourier Transform // В сборнике: Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTs 2018). 2018. С. 364-368.

7. Пономарева, О.В. Развитие теории и разработка методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье: дис... д-ра техн. наук: 05.13.01 / Пономарева Ольга Владимировна. – Ижевск, 2016. – 357 с.

8. Алдошина, И.А. Музыкальная акустика: учебник / И.А. Алдошина, Р. Приттс. – СПб: Композитор – Санкт-Петербург, 2006. – 720 с.

9. Алдошина, И.А. Основы психоакустики. Подборка статей с сайта <http://www.625-net.ru>. Ч.1-17. 154 с. – Режим доступа: <http://www.twirpx.com/file/141630/>.

10. Пономарева Н.В. Компьютерная спектральная обработка музыкально-акустических сигналов на основе параметрического дискретного преобразования Фурье // Приборостроение – 2017: материалы 10-й Международной научно-технической конференции, 1-3 ноября 2017 года, Минск, Республика Беларусь / Белорусский национальный технический университет; редкол.: О.К. Гусев [и др.]. – Минск: БНТУ, 2017. – С. 16-18.

11. Пономарева, Н.В. Проблемы компьютерной спектральной обработки сигналов в музыкальной акустике / Н.В. Пономарева // Интеллектуальные системы в производстве. – 2018. – Т. 16. – № 1. – С. 26-32.

12. Кузнецов, Л.А. Акустика музыкальных инструментов: Справочник. / Л.А. Кузнецов. – М.: Легпромбытиздат, 1989. – 368 с.

13. Петелин, Р.Ю. Звуковая студия в РС./ Р.Ю. Петелин, Ю.В. Петелин. СПб.:БХВ-Санкт-Петербург, 1998. – 256 с.

14. Цветков, Э.И. Основы математической метрологии / Э.И.Цветков.-СПб.: Политехника, 2005.-510 с.

15. Rabiner L., Gold B. Theory and Application of digital signal processing. New Jersey, Prentice-hall, 1975, 772 p.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДВУМЕРНОЙ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В БАЗИСАХ ФУРЬЕ С ВАРЬИРУЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

*Пономарев А.В., к.э.н., доцент Ижевского государственного университета имени М.Т. Калашникова,
e-mail: ponva@mail.ru.*

FUNDAMENTALS OF THE THEORY OF TWO-DIMENSIONAL DIGITAL SIGNAL PROCESSING IN THE FOURIER BASES WITH VARYING PARAMETERS

Ponomarev A.V.

The fundamentals of the theory of two-dimensional digital signal processing in Fourier bases with varying parameters are proposed. The developed theory is a generalization of the classical theory of discrete two-dimensional spectral processing of signals specified on the finite reference plane in Fourier bases. Proposed theory allows us to develop new and improve existing methods and algorithms for two-dimensional Fourier signal processing, as well as to eliminate or significantly reduce the impact of negative effects accompanying the use of standard 2-D DFT. Proposed two-dimensional parametric DFT, which significantly expands the mathematical methods of spectral digital signal processing (including images) into spatial and spatial-frequency domains.

Key words: two-dimensional digital signal processing, varying parameters, Fourier bases, two-dimensional parametric DFT, spatial-frequency domains.

Ключевые слова: двумерный дискретный сигнал, конечная опорная плоскость, дискретное преобразование Фурье, двумерное параметрическое дискретное преобразование Фурье, двумерный параметрический базис, параметрическая двумерная экспоненциальная функция.

Введение

В настоящее время методы, алгоритмы и средства цифровой обработки сигналов находят свое приложение во многих отраслях науки и техники. Трудно назвать предметные области, которых не коснулся бы в той или иной мере процесс цифровизации. Информационные технологии цифровой спектральной обработки одномерных и двумерных сигналов играют важнейшую роль в медицине, криминалистике, активной и пассивной гидролокации, сейсмологии, радиотехнике, геодезии, метеорологии, контроле и диагностике как естественных, так и искусственных систем различного назначения.

Математический аппарат информационных технологий цифровой спектральной обработки одномерных сигналов¹ был значительно расширен благодаря работам [1-7] в которых:

- проведено обобщение одномерного дискретного преобразования Фурье (ДФФ) в виде одномерного параметрического дискретного преобразования Фурье (ДФФ-П);
- исследованы аналитические и стохастические свойства ДФФ-П;

Предложены основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами. Разрабатываемая теория является обобщением классической теории дискретной двумерной спектральной обработки сигналов, заданных на конечной опорной плоскости в базисах Фурье. Предлагаемая теория позволяет разрабатывать новые и совершенствовать существующие методы и алгоритмы двумерной Фурье – обработки сигналов, а также исключить или существенно снизить влияние негативных эффектов, сопровождающих применение стандартного 2-D ДПФ. Предложено двумерное параметрическое ДПФ, которое существенно расширяет математический аппарат методов информационных технологий цифровой спектральной обработки сигналов (в том числе изображений) в пространственной и пространственно-частотной областях.

– доказаны свойства базиса ДПФ-П – базиса параметрических дискретных экспоненциальных функций (ДФФ-П).

Прямое ДПФ-П и обратное ДПФ-П (ОДФФ-П) в алгебраической и матричной форме дискретного сигнала $x(n)$, заданного на конечном интервале, определены авторами преобразований в следующем виде:

Алгебраическая форма прямого ДПФ-П:

$$S_N(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n}, \quad W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right), \quad (1)$$

$$k = \overline{0, N-1}; \quad 0 \leq \theta < 1.$$

Матричная форма прямого ДПФ-П:

$$S_{N,\theta} = \frac{1}{N} F_{N,\theta} \cdot X_N, \quad 0 \leq \theta < 1, \quad (2)$$

где $X_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ – представление дискретного сигнала $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, в виде вектора N – мерного линейного пространства; T – знак транспонирования; $S_{N,\theta} = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$ – вектор коэф-

¹ Сигнал – это материальный носитель информации различной о процессах, явлениях, состояниях или физических величинах объектов материального мира, средство перенесения информации в пространстве и времени. **Обработка сигналов** – извлечение содержащейся в сигналах информации.

коэффициентов разложения X_N по системе параметрических дискретных экспоненциальных функций, задаваемой матрицей $F_{N,\theta}$:

$$F_{N,\theta} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^\theta & \dots & W_N^{\theta(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1+\theta)} & \dots & W_N^{(N-1+\theta)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} n \\ \vdots \\ k \end{matrix}$$

Алгебраическая форма ОДПФ-П:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k, \theta) W_N^{-(k+\theta)n}, \quad n = 0, N-1, \quad 0 \leq \theta < 1. \quad (3)$$

Матричная форма ОДПФ-П:

$$X_N = F_{N,\theta}^* \cdot S_{N,\theta}, \quad 0 \leq \theta < 1. \quad (4)$$

где * – знак комплексного сопряжения.

В дальнейших работах вышеназванных авторов [8-15] проведены исследования множества предложенных ДПФ-П (именно множества, поскольку при каждом значении параметра θ ДПФ-П имеет свою ортогональную полную базисную систему ДЭФ-П), доказано существование быстрых алгоритмов реализации ДПФ-П (алгоритмов БПФ-П). Проведенные исследования позволили исключить или существенно снизить влияние негативных эффектов, сопровождающих применение ДПФ (*эффекты утечки, частотола, наложения, амплитудной модуляции*), а также значительно расширить области приложения Фурье – обработки одномерных дискретных сигналов.

В настоящее время наблюдается не только расширение областей приложения цифровых методов обработки сигналов, но и существенное усложнение решаемых задач, в частности, переход от методов спектральной обработки одномерных сигналов (1-D сигналов) к методам спектральной обработки двумерных сигналов (2-D сигналов) на основе двумерного дискретного преобразования Фурье (2-D ДПФ)

Задача данной работы – создание основ теории двумерной цифровой обработки сигналов, заданных на конечной опорной плоскости, в базисах Фурье с варьируемыми параметрами, разработка новых и совершенствованию существующих методов и алгоритмов двумерной Фурье – обработки сигналов.

Двумерная цифровая обработка сигналов на основе 2-D ДПФ

С математической точки зрения дискретный 2-D сигнал $x(n_1, n_2)$ конечной длины – это двумерная последовательность конечной длины, являющаяся множеством действительных (или в общем случае комплексных) чисел, ределенных для упорядоченных пар целых чисел n_1 и n_2 ,

² **Опорная область** – это диапазон значений переменных n_1 и n_2 , для которого двумерная последовательность $x(n_1, n_2)$ отлична от нуля.

при $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$; $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ [16]. Дискретный 2-D сигнал $x(n_1, n_2)$ на прямоугольной пространственной опорной плоскости², при $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$ и $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$, может быть представлен в виде матрицы:

$$X_{N_1 \times N_2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N_2-1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (N_1-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) & \dots & x(0, N_2-1) \\ x(1,0) & x(1,1) & \dots & x(1, N_2-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N_1-1,0) & x(N_1-1,1) & \dots & x(N_1-1, N_2-1) \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} n_2 \\ \vdots \\ n_1 \end{matrix}; \quad (5)$$

Проведенный системный анализ методов цифровой обработки 2-D сигналов и предметных областей их приложений показал, что 2-D ДПФ (рис. 1) играет ведущую роль, благодаря целому ряду присущих ему преимуществ:

- ядра преобразования 2-D ДПФ симметричны и разделимы (сепарабельны);
- 2-D ДПФ может быть реализовано быстрыми алгоритмами;
- оценки, получаемые помощью 2-D ДПФ, структурно устойчивы;
- эффективность двумерных методов, основанных на основе 2-D ДПФ, доказана временем.

При выборе для векторного и спектрального анализа³ дискретных двумерных сигналов унитарного двумерного преобразования Фурье мы используем систему двумерных дискретных экспоненциальных функций (2-D ДЭФ), (система является базисом двумерного дискретного преобразования Фурье):

$$\begin{aligned} def_{N_1, N_2}(k_1, n_1, k_2, n_2) &= \left[\exp\left(-j \frac{2\pi}{N_1}(k_1 n_1)\right) \right] \times \\ &\times \left[\exp\left(-j \frac{2\pi}{N_2}(k_2 n_2)\right) \right] = \left[W_{N_1}^{k_1 n_1} \right] \cdot \left[W_{N_2}^{k_2 n_2} \right] = \\ &= \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1\right) \right] \times \\ &\times \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2\right) \right] = \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1 + \frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1 + \frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2\right). \quad (6) \end{aligned}$$

где k_1, k_2 – пространственные частоты; $k_1, n_1 = \overline{0, (N_1 - 1)}$; $k_2, n_2 = \overline{0, (N_2 - 1)}$.

На рис. 2-5 даны примеры 2-D ДЭФ при различных k_1, k_2 (приведены огибающие 2-D ДЭФ).

³ **Векторный анализ** – методы Фурье – анализа дискретных сигналов, в результате которых обеспечивается получение информации о частотах, амплитудах и фазах составляющих сигналов и/или их изменений во времени. **Спектральный анализ** – методы Фурье – анализа дискретных сигналов, в результате которых обеспечивается получение информации о частотах и амплитудах составляющих сигналов и/или их изменений во времени.

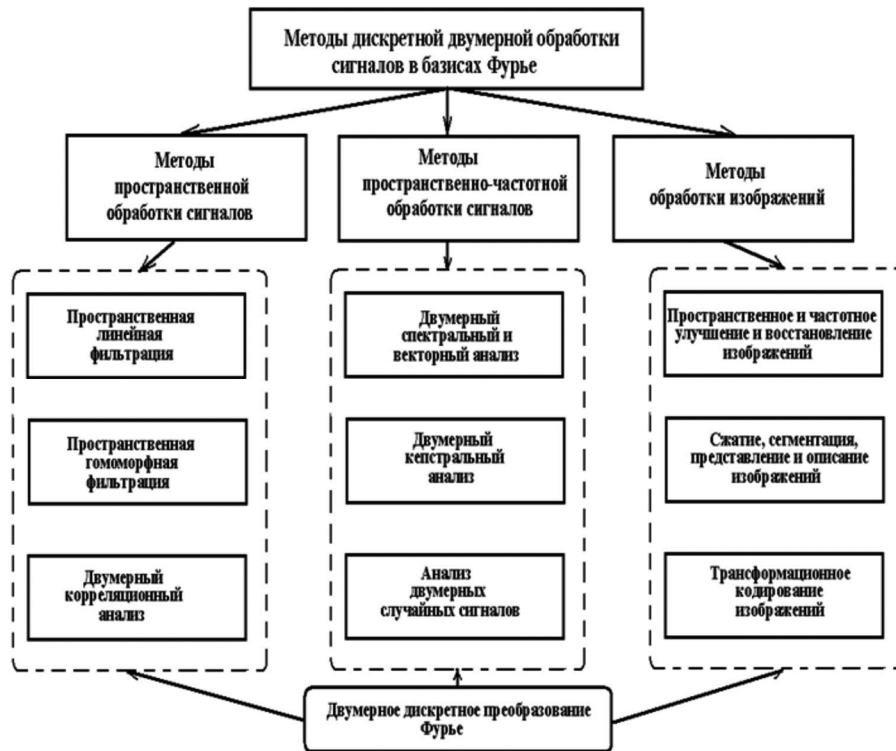


Рис. 1. Предметные области приложения двумерного дискретного преобразования Фурье

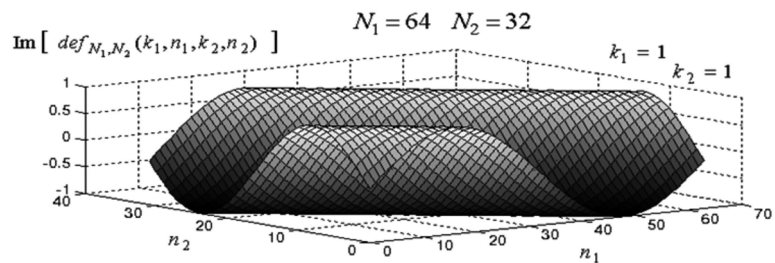
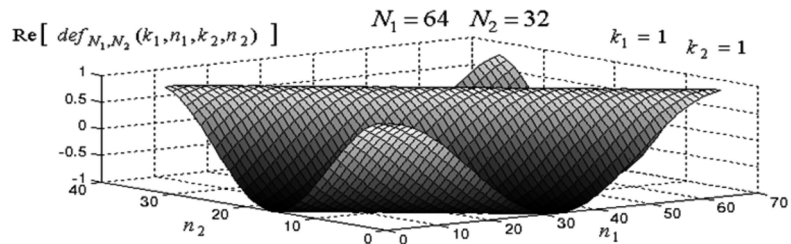


Рис. 2. 2-D ДЭФ при $k_1 = 1, k_2 = 1$

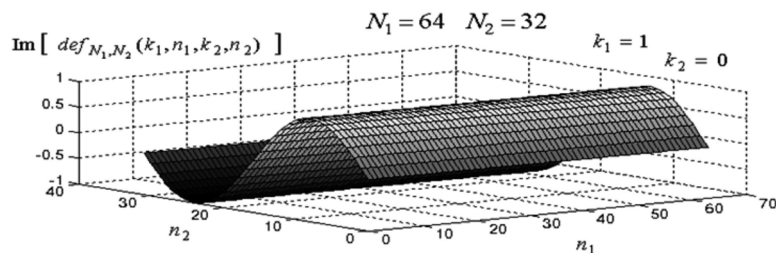
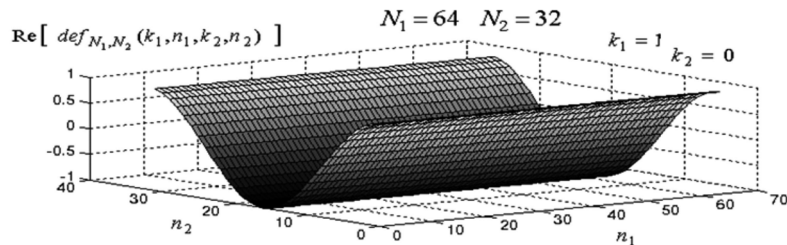


Рис. 3. 2-D ДЭФ при $k_1 = 1, k_2 = 0$

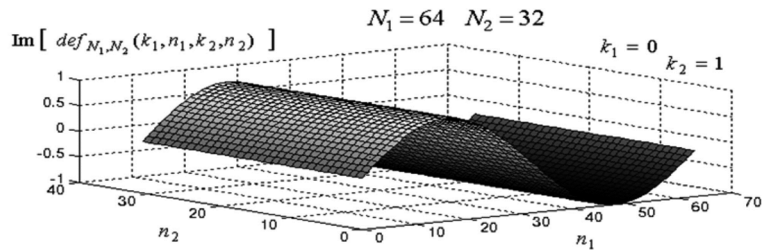
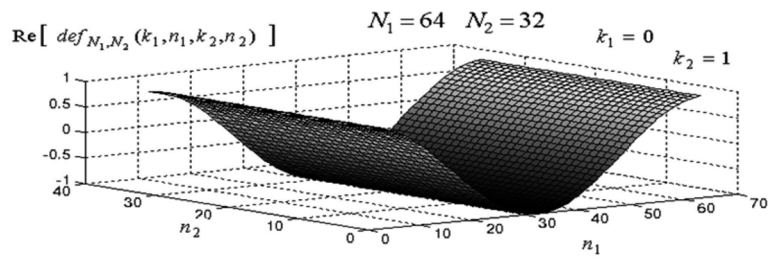


Рис. 4. 2-D ДЭФ при $k_1=0, k_2=1$

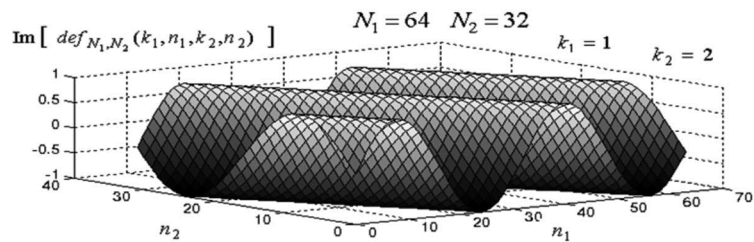
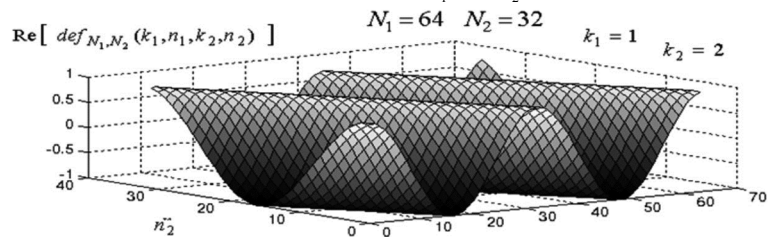


Рис. 5. 2-D ДЭФ при $k_1=1, k_2=2$

Алгебраическая форма прямого 2-D ДПФ:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_1}^{k_1 n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 n_2}; \quad (7)$$

где $k_1 = \overline{0, (N_1-1)}$, $k_2 = \overline{0, (N_2-1)}$ – пространственные частоты; $x(n_1, n_2)$ – двумерный сигнал, $n_1 = \overline{0, N_1-1}$, $n_2 = \overline{0, N_2-1}$, $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2)$ – коэффициенты 2-D ДПФ (двумерный векторный пространственно-частотный спектр сигнала $x(n_1, n_2)$).

Алгебраическая форма прямого 2-D ДПФ, учитывая свойство разделимости ядра 2-D ДПФ, может быть представлена в виде:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2) = \frac{1}{N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{k_1 n_1} \left[\frac{1}{N_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_2}^{k_2 n_2} \right]; \quad (7a)$$

или в виде:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2) = \frac{1}{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_1}^{k_1 n_2} \left[\frac{1}{N_1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_1, n_2) W_{N_2}^{k_2 n_1} \right]. \quad (7b)$$

Формулами (7 а и 7 б) задается поэтапное определение прямого 2-D ДПФ методом двух 1-D ДПФ, выполняемых последовательно: формулой (7 а) – по строкам, а затем по столбцам; формулой (7 б) – по столбцам, а затем по строкам. 1-D ДПФ могут вычисляться методом быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Двумерный векторный пространственно-частотный спектр $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2)$ на прямоугольной частотно-пространственной опорной плоскости, при $0 \leq k_1 \leq N_1 - 1$ и $0 \leq k_2 \leq N_2 - 1$, может быть представлен в виде матрицы:

$$S_{N_1 \times N_2} = \begin{matrix} & & & & & k_2 \\ & & & & & (N_2-1) \\ & & & & & S(0, N_2-1) \\ & & & & & S(1, N_2-1) \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & S(N_1-1, N_2-1) \\ & & & & & \end{matrix} \quad (8)$$

Введем матрицы базисной системы преобразований 2-D ДПФ:

$$F_{N_2 \times N_2}^{(1)} = \begin{matrix} & & & & & k_2 \\ & & & & & (N_2-1) \\ & & & & & W_{N_2}^{0 \cdot (N_2-1)} \\ & & & & & W_{N_2}^{1 \cdot (N_2-1)} \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & W_{N_2}^{(N_2-1) \cdot (N_2-1)} \\ & & & & & \end{matrix} \quad (9)$$

$$F_{N_1 \times N_1}^{(2)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_1 - 1) \\ 0 & W_{N_1}^{0 \cdot 0} & W_{N_1}^{0 \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{0 \cdot (N_2 - 1)} \\ 1 & W_{N_1}^{1 \cdot 0} & W_{N_1}^{1 \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{1 \cdot (N_2 - 1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (N_1 - 1) & W_{N_1}^{(N_1 - 1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(N_1 - 1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(N_1 - 1) \cdot (N_2 - 1)} \end{matrix} \begin{matrix} n_1 \\ \\ \\ \\ k_1 \end{matrix} \cdot (10)$$

Используя соотношения (5), (7-10), а также свойство сепарабельности ядра 2-D ДПФ, введем **матричную форму прямого 2-D ДПФ**:

$$S_{N_1 \times N_2} = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} F_{N_1 \times N_1}^{(2)} \cdot X_{N_1 \times N_2} \cdot F_{N_2 \times N_2}^{(1)}; \quad (11)$$

Аналогично выражениям (7 а) и (7 б) возможны две последовательности выполнения матричных умножений:

$$S_{N_1 \times N_2} = \frac{1}{N_1} F_{N_1 \times N_1}^{(2)} \cdot \frac{1}{N_2} [X_{N_1 \times N_2} \cdot F_{N_2 \times N_2}^{(1)}]; \quad (11 а)$$

$$S_{N_1 \times N_2} = \left[\frac{1}{N_1} F_{N_1 \times N_1}^{(2)} \cdot X_{N_1 \times N_2} \right] \cdot \frac{1}{N_2} F_{N_2 \times N_2}^{(1)}. \quad (11 б)$$

Теоретические основы двумерной цифровой обработки сигналов, в базисах Фурье с варьируемыми параметрами

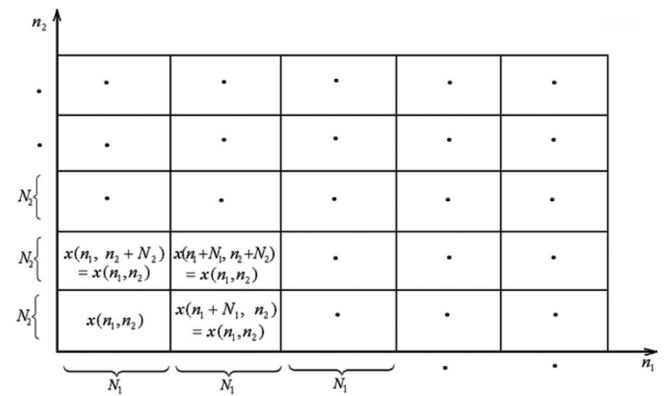
Прямое 2-D ДПФ обладает следующими свойствами периодичности, которые следуют из природы 2-D ДПФ и аналитических свойств его базиса⁴:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2) = S_{N_1, N_2}(k_1 + l \cdot N_1, k_2) = S_{N_1, N_2}(k_1, k_2 + l \cdot N_2) = S_{N_1, N_2}(k_1 + l \cdot N_1, k_2 + l \cdot N_2); \quad l = \overline{0, -\infty, +\infty}; \quad (12)$$

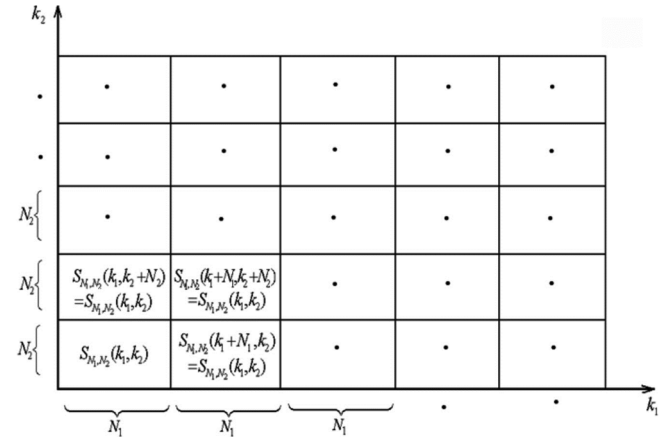
$$x(n_1, n_2) = x(n_1 + l \cdot N_1, n_2) = x(n_1, n_2 + l \cdot N_2) = x(n_1 + l \cdot N_1, n_2 + l \cdot N_2), \quad l = \overline{0, -\infty, +\infty}. \quad (13)$$

На рис. 6, а проиллюстрирована периодичность 2-D сигнала $x(n_1, n_2)$ в первом квадранте опорной пространственной плоскости, а на рис. 6, б – периодичность его двумерного спектра $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2)$ в первом квадранте в пространственно-частотной плоскости.

При проведении 2-D корреляционного анализа и 2-D фильтрации сигналов, 2-D спектральной и векторной обработки сигналов широко используется операция дополнения сигнала $x(n_1, n_2)$ на опорной плоскости нулевыми отсчетами [16-18]. Необходимость проведения этой операции объясняется свойствами периодичности 2-D ДПФ. Введем в рассмотрение матрицу $O(n_1, n_2)$ с нулевыми элементами $o(n_1, n_2) = 0$, при $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$; $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$:



а) периодичность двумерного сигнала $x(n_1, n_2)$;



б) периодичность двумерного спектра $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2)$;

Рис. 6. Периодизация двумерного сигнала и его двумерного спектра

$$O_{N_1 \times N_2} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_2 - 1) & n_2 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (N_1 - 1) & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} n_1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \cdot (14)$$

Формулой (15) определена блочная матрица сигнала $X_{N_1 r_1 \times N_2 r_2}$, дополненного $(r_1 - 1) \cdot (r_2 - 1)$ нулевыми матрицами $O(n_1, n_2)$.

$$X_{N_1 r_1 \times N_2 r_2} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (r_2 - 1) \\ 0 & \begin{bmatrix} X_{N_1 \times N_2} & O_{N_1 \times N_2} & \dots & O_{N_1 \times N_2} \\ O_{N_1 \times N_2} & O_{N_1 \times N_2} & \dots & O_{N_1 \times N_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ O_{N_1 \times N_2} & O_{N_1 \times N_2} & \dots & O_{N_1 \times N_2} \end{bmatrix} \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (r_1 - 1) & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \cdot (15)$$

Вычисление прямого 2-D ДПФ блочной матрицы $X_{N_1 r_1 \times N_2 r_2}$, согласно (11 а), проходит в два этапа.

На первом этапе вычисления прямого 2-D ДПФ (выполнение матричного умножения в квадратных скобках) приводит к усечению $N_2 \cdot (r_2 - 1)$ строк матрицы $F_{N_2 r_2 \times N_2 r_2}^{(1)}$ и превращению ее из прямоугольной матрицы размера

$N_2 r_2 \times N_2 r_2$ в прямоугольную матрицу размера $N_2 \times N_2 r_2$ (16).

$$F_{N_2 r_2 \times N_2}^{(1)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_2 r_2 - 1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_2 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_2 r_2}^{0 \cdot 0} & W_{N_2 r_2}^{0 \cdot 1} & \dots & W_{N_2 r_2}^{0 \cdot (N_2 r_2 - 1)} \\ W_{N_2 r_2}^{1 \cdot 0} & W_{N_2 r_2}^{1 \cdot 1} & \dots & W_{N_2 r_2}^{1 \cdot (N_2 r_2 - 1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_2 r_2}^{(N_2 - 1) \cdot 0} & W_{N_2 r_2}^{(N_2 - 1) \cdot 1} & \dots & W_{N_2 r_2}^{(N_2 - 1) \cdot (N_2 r_2 - 1)} \end{bmatrix} & \begin{matrix} k_2 \\ \dots \\ n_2 \end{matrix} \end{matrix} \quad (16)$$

На втором этапе вычисления прямого 2-D ДПФ нулевые отсчеты матрицы, полученной на первом этапе, приводят к усечению столбцов матрицы $F_{N_1 r_1 \times N_1 r_1}^{(2)}$ преращению ее из прямоугольной матрицы размера $N_1 r_1 \times N_1 r_1$ в прямоугольную матрицу размера $N_1 r_1 \times N_1$ (17).

$$F_{N_1 r_1 \times N_1}^{(2)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_1 - 1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_1 r_1 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_1 r_1}^{0 \cdot 0} & W_{N_1 r_1}^{0 \cdot 1} & \dots & W_{N_1 r_1}^{0 \cdot (N_1 - 1)} \\ W_{N_1 r_1}^{1 \cdot 0} & W_{N_1 r_1}^{1 \cdot 1} & \dots & W_{N_1 r_1}^{1 \cdot (N_1 - 1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_1 r_1}^{(N_1 r_1 - 1) \cdot 0} & W_{N_1 r_1}^{(N_1 r_1 - 1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1 r_1}^{(N_1 r_1 - 1) \cdot (N_1 - 1)} \end{bmatrix} & \begin{matrix} n_1 \\ \dots \\ k_1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (17)$$

Рассмотрим структуру матрицы $F_{N_2 r_2 \times N_2}^{(1)}$ и структуру матрицы $F_{N_1 r_1 \times N_1}^{(2)}$. Обозначим множество номеров столбцов матрицы $F_{N_2 r_2 \times N_2}^{(1)}$ через $A: A = \{0, 1, 2, \dots, (N_2 r_2 - 1)\}$, а множество номеров строк матрицы $F_{N_1 r_1 \times N_1}^{(2)}$, через $C: C = \{0, 1, 2, \dots, (N_1 r_1 - 1)\}$. Применим к множествам A и C **отношение сравнимости по модулю r_2 и r_1** соответственно. Известно, что отношение сравнимости по модулю m является отношением **эквивалентности и обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности**.

Отношение сравнимости по модулю r_2 разбивает множество A на r_2 классов вычетов по модулю r_2 :

$$A_0 = \{0, r_2, \dots, (N_2 - 1)r_2\};$$

$$\dots$$

$$A_{(r_2 - 1)} = \{(r_2 - 1), \dots, (N_2 r_2 - 1)\}; \quad (18)$$

$$A_i \neq \emptyset; \quad A_i \cap A_j = \emptyset; \quad \bigcup_{i=0}^{r_2 - 1} A_i = A.$$

Матрицу $F_{N_2 r_2 \times N_2}^{(1)}$, применив разбиение (18) множества A на r_2 классов вычетов по модулю r_2 , представим в виде r_2 матриц размером $N_2 \times N_2$:

$$F_{N_2 r_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)} = \quad (19)$$

$$= \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_2 - 1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_2 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_2}^{0 \cdot (0 + \theta_2)} & W_{N_2}^{0 \cdot (1 + \theta_2)} & \dots & W_{N_2}^{0 \cdot (N_2 - 1 + \theta_2)} \\ W_{N_2}^{1 \cdot (0 + \theta_2)} & W_{N_2}^{1 \cdot (1 + \theta_2)} & \dots & W_{N_2}^{1 \cdot (N_2 - 1 + \theta_2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot (0 + \theta_2)} & W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot (1 + \theta_2)} & \dots & W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot (N_2 - 1 + \theta_2)} \end{bmatrix} & \begin{matrix} k_2 \\ \dots \\ n_2 \end{matrix} \end{matrix};$$

где $\theta_2 = 0, 1/r_2, \dots, (r_2 - 1)/r_2$.

Отношение сравнимости по модулю r_1 разбивает множество C на r_1 классов вычетов по модулю r_1 :

$$C_0 = \{0, r_1, \dots, (N_1 - 1)r_1\};$$

$$\dots$$

$$C_{(r_1 - 1)} = \{(r_1 - 1), \dots, (N_1 r_1 - 1)\}; \quad (20)$$

$$C_i \neq \emptyset; \quad C_i \cap C_j = \emptyset; \quad \bigcup_{i=0}^{r_1 - 1} C_i = C.$$

Матрицу $F_{N_1 r_1 \times N_1}^{(2)}$, применив разбиение (20) множества C на r_1 классов вычетов по модулю r_1 , представим в виде r_1 матриц размером $N_1 \times N_1$:

где $\theta_2 = 0, 1/r_2, \dots, (r_2 - 1)/r_2$

$$F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} = \begin{matrix} & 0 & 1 & \dots & (N_1 - 1) \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_1}^{(0 + \theta_1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(0 + \theta_1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(0 + \theta_1) \cdot (N_1 - 1)} \\ W_{N_1}^{(1 + \theta_1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(1 + \theta_1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(1 + \theta_1) \cdot (N_1 - 1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{N_1}^{(N_1 - 1 + \theta_1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(N_1 - 1 + \theta_1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(N_1 - 1 + \theta_1) \cdot (N_1 - 1)} \end{bmatrix} & \begin{matrix} n_1 \\ \dots \\ k_1 \end{matrix} \end{matrix} \quad (21)$$

где $\theta_1 = 0, 1/r_1, \dots, (r_1 - 1)/r_1$.

Дискретные двумерные функции:

$$W_{N_1}^{(k_1 + \theta_1) \cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{(k_2 + \theta_2) \cdot n_2} = \left[\exp \left(-j \frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1) \cdot n_1 \right) \right] \times$$

$$\times \left[\exp \left(-j \frac{2\pi}{N_2} (k_2 + \theta_2) \cdot n_2 \right) \right] =$$

$$= \left[\cos \left(\frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1) \cdot n_1 \right) - j \sin \left(\frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1) \cdot n_1 \right) \right] \times$$

$$\times \left[\cos \left(\frac{2\pi}{N_2} (k_2 + \theta_2) \cdot n_2 \right) - j \sin \left(\frac{2\pi}{N_2} (k_2 + \theta_2) \cdot n_2 \right) \right] =$$

$$= \cos \left(\frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1) n_1 + \frac{2\pi}{N_2} (k_2 + \theta_2) n_2 \right) -$$

$$- j \sin \left(\frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1) n_1 + \frac{2\pi}{N_2} (k_2 + \theta_2) n_2 \right), \quad (22)$$

назовем **2-D параметрическими дискретными экспоненциальными функциями (2-D ДЭФ-П) – 2-D def_p(k₁, n₁, θ₁, k₂, n₂, θ₂)**.

На рис. 7-10 приведены примеры 2-D ДЭФ при различных k_1, k_2 и θ_1, θ_2 .

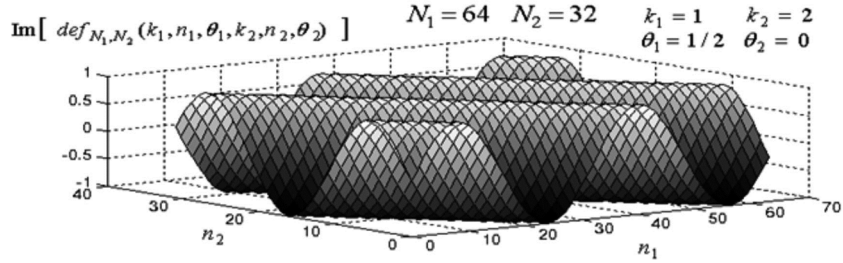
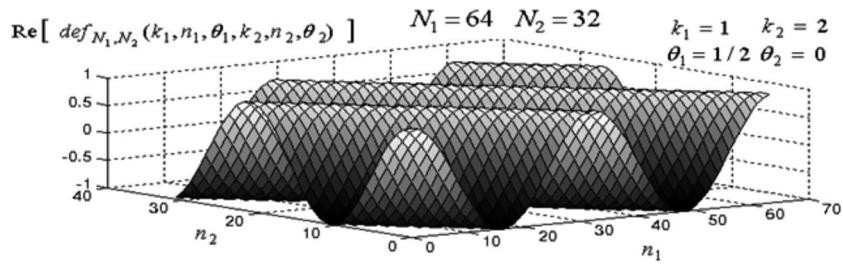


Рис. 7. 2-D ДЭФ при $k_1 = 1, \theta_1 = 1/2, k_2 = 2, \theta_2 = 1/2$

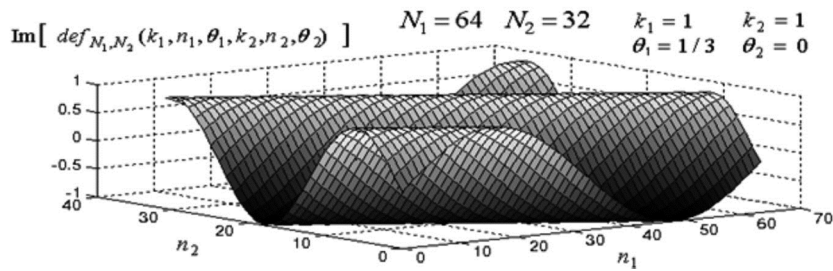
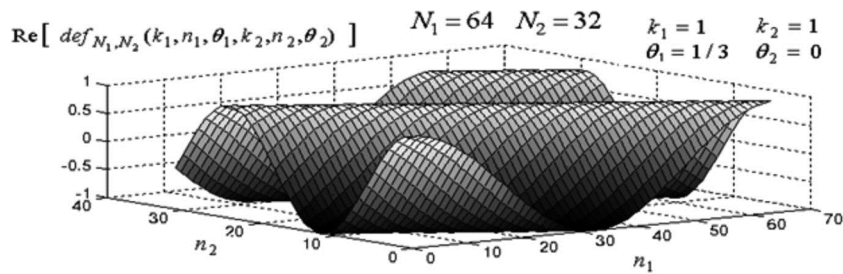


Рис. 8. 2-D ДЭФ при $k_1 = 1, \theta_1 = 1/3, k_2 = 1, \theta_2 = 0$

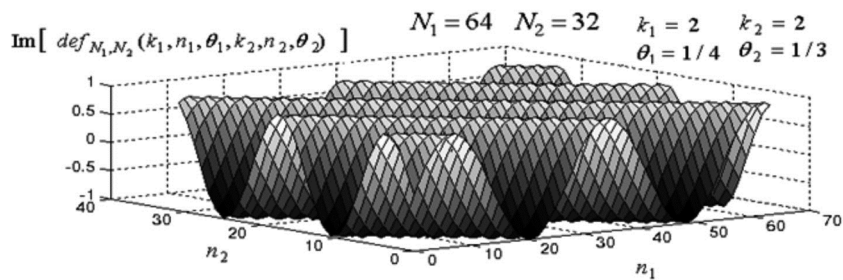
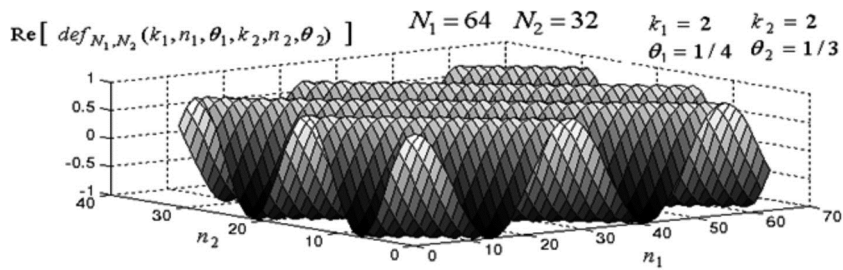


Рис. 9. 2-D ДЭФ при $k_1 = 2, \theta_1 = 1/4, k_2 = 2, \theta_2 = 1/3$

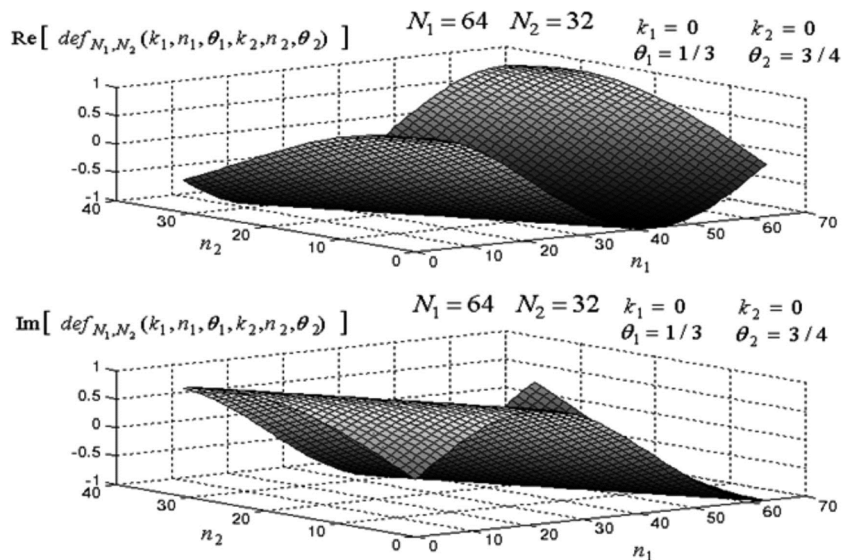


Рис. 10. 2-D ДЭФ-П при $k_1 = 0, \theta_1 = 1/3, k_2 = 0, \theta_2 = 3/4$

Основные свойства базисной системы 2-D параметрических экспоненциальных функций

Базисная система 2-D ДЭФ-П является обобщением базисной системы 2-D ДЭФ и равна ей при нулевых значениях параметров θ_1 и θ_2 .

Базисная система 2-D ДЭФ-П по переменным k_1, k_2 периодична с периодами N_1 и N_2 соответственно:

$$2-D \text{ def}_p(k_1 \pm p_1 N_1, n_1, \theta_1, k_2 \pm p_2 N_2, n_2, \theta_2) = 2-D \text{ def}_p(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2, \theta_2).$$

Базисная система 2-D ДЭФ-П по переменным n_1, n_2 параметрически периодична с периодами N_1 и N_2 соответственно:

$$2-D \text{ def}_p(k_1, n_1 \pm p_1 N_1, \theta_1, k_2, n_2 \pm p_2 N_2, \theta_2) = 2-D \text{ def}_p(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2, \theta_2) \cdot W_{N_1}^{\pm \theta_1 N_1 p_1} \cdot W_{N_2}^{\pm N_2 p_2}.$$

Базисная система 2-D ДЭФ-П является 2-D ортогональной системой.

Базисная система 2-D ДЭФ-П является 2-D полной ортогональной системой.

Разложение двумерного сигнала по системе базисных функций 2-D ДЭФ-П определим как **прямое двумерное параметрическое дискретное преобразование Фурье** (2-D ДПФ-П). Преобразование 2-D ДПФ-П является обобщением преобразования 2-D ДПФ и равно ему при нулевых значениях параметров θ_1 и θ_2 .

Преобразование 2-D ДПФ-П аналогично преобразованию 2-D ДПФ может быть представлено как алгебраической форме, так и в матричной форме.

Алгебраическая форма прямого 2-D ДПФ-П:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \cdot W_{N_1}^{(k_1+\theta_1) \cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{(k_2+\theta_2) \cdot n_2}; \quad (23)$$

где $k_1 = \overline{0, (N_1 - 1)}$, $k_2 = \overline{0, (N_2 - 1)}$ – пространственные частоты; θ_1, θ_2 – параметры преобразования 2-D ДПФ-П: $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 1$; $x(n_1, n_2)$ – двумерный сигнал, $n_1 = \overline{0, N_1 - 1}$,

$n_2 = \overline{0, N_2 - 1}$, $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2)$ – коэффициенты 2-D ДПФ-П (двумерный параметрический векторный пространственно-частотный спектр сигнала $x(n_1, n_2)$).

Алгебраическая форма прямого 2-D ДПФ-П, учитывая свойство разделимости ядра 2-D ДПФ-П, может быть представлена в виде:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{(k_1+\theta_1) \cdot n_1} \left[\frac{1}{N_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_2}^{(k_2+\theta_2) \cdot n_2} \right]; \quad (23 \text{ а})$$

или в виде:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_1}^{(k_2+\theta_2) \cdot n_2} \left[\frac{1}{N_1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_1, n_2) W_{N_2}^{(k_1+\theta_1) \cdot n_1} \right]. \quad (23 \text{ б})$$

Формулами (23 а) и (23 б) задается поэтапное определение прямого 2-D ДПФ-П методом двух 1-D ДПФ-П, выполняемых последовательно: формулой (23 а) – по строкам, а затем по столбцам; формулой (23 б) – по столбцам, а затем по строкам. 1-D ДПФ-П могут вычисляться методами параметрического быстрого преобразования Фурье (БПФ-П).

Используя свойство сепарабельности ядра 2-D ДПФ-П и соотношения (19) и (21), введем **матричную форму прямого 2-D ДПФ-П:**

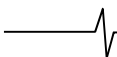
$$S_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2} = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} \cdot X_{N_1 \times N_2} \cdot F_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)}; \quad (24)$$

Аналогично выражениям (23а) и (23б) возможны две последовательности выполнения соответствующих матричных умножений:

$$S_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2} = \frac{1}{N_1} F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} \cdot \frac{1}{N_2} \left[X_{N_1 \times N_2} \cdot F_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)} \right]; \quad (24 \text{ а})$$

$$S_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2} = \left[\frac{1}{N_1} F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} \cdot X_{N_1 \times N_2} \right] \cdot \frac{1}{N_2} F_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)}. \quad (24 \text{ б})$$

Существуют алгебраическая форма и матричная форма **обратного 2-D ДПФ-П (2-D ОДПФ-П)**, которые задаются соответственно следующими соотношениями:



Алгебраическая форма обратного 2-D ОДФ-П:

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} S_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) W_{N_1}^{-(k_1+\theta_1) \cdot n_1} \cdot W_{N_2}^{-(k_2+\theta_2) \cdot n_2}; \quad (25)$$

Матричная форма 2-D ОДФ-П:

$$X_{N_1 \times N_2} = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} F_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{*(2)} \cdot S_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2} \cdot F_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{*(1)}; \quad (26)$$

где * – знак комплексного сопряжения.

Разложение дискретного 2-D сигнала $x(n_1, n_2)$ в базисе 2-D ДЭФ-П согласно соотношению (23) или соотношению (24), при каждом сочетании параметров θ_1 и θ_2 задает свой конкретный базис. Таким образом, исследователю, варьируя параметрами θ_1 и θ_2 , получает возможность вычислять поэтапно спектр 2-D сигнала $x(n_1, n_2)$, дополненного нулевыми отсчетами либо только по переменной n_1 , либо только по переменной n_2 , либо одновременно по переменным n_1 и n_2 .

Заключение

В работе предложены основы теории двумерной цифровой обработки сигналов, заданных на конечной опорной плоскости, в базисах Фурье с варьируемыми параметрами. Разрабатываемая теория является обобщением классической теории дискретной двумерной спектральной обработки сигналов, заданных на конечной опорной плоскости, в базисах Фурье.

Теоретические основы предлагаемой теории позволяют разрабатывать новые и совершенствовать существующие методы и алгоритмы двумерной Фурье – обработки сигналов, а также исключить или существенно снизить влияние негативных эффектов, сопровождающих применение стандартного 2-D ДПФ.

Предложенное двумерное ДПФ-П существенно расширяет математический аппарат методов информационных технологий цифровой спектральной обработки сигналов и изображений в пространственной и пространственно-частотной областях.

Исследования аналитических свойств 2-D ДЭФ-П, являющихся базисом 2-D ДПФ-П, позволяют сделать вывод о перспективности проведения исследований вероятностных свойств 2-D ДПФ-П двумерных сигналов – свойств, которые вытекают из двумерной версии теоремы Винера-Хинчина.

Литература

1. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Виброакустическое диагностирование коробок передач станков цифровыми методами // Станки и инструмент. – 1983. – № 9. – С. 18-21.
2. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Временные окна при оценке энергетических спектров методом параметрического дискретного преобразования Фурье // Автоматизация. – 1983. – № 4. – С. 39-45.
3. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Модификация дискретного преобразования Фурье для решения задач

интерполяции и свертки функций // Радиотехника и электроника. – 1984. – Т. 29. – № 8. – С. 1561-1570.

4. Пономарева О.В. Развитие теории спектрального анализа дискретных сигналов на конечных интервалах в базисе параметрических экспоненциальных функций // Цифровая обработка сигналов. – 2010. – № 2. – С. 7-11.

5. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Теория и применение параметрического дискретного преобразования Фурье // Цифровая обработка сигналов. 2011. № 1. С. 2-6.

6. Пономарева О.В. Неинвариантность скользящего энергетического параметрического Фурье-спектра действительных тональных сигналов // Цифровая обработка сигналов. – 2014. – № 2. – С. 7-14.

7. Пономарева О.В. Основы теории дискретных косвенных измерений параметров сигналов – Ижевск: Издательство ИжГТУ, – 2016. 172 с.

8. Пономарев А.В. Двумерная обработка сигналов в дискретных базисах Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т. 17. № 1. С. 71-77.

9. Пономарева О.В., Пономарев А.В. Интерполяция в пространственной области двумерных дискретных сигналов с помощью быстрых преобразований Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2019. – Т. 17. № 1. С. 88-94.

10. Ponomareva O., Ponomarev A., Ponomarev V. Evolution of Forward and Inverse Discrete Fourier Transform // В сборнике: Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2018). 2018. С. 313-318.

11. Ponomareva O., Ponomarev A., Ponomareva N. Window - presume Parametric Discrete Fourier Transform // В сборнике: Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2018). 2018. С. 364-368.

12. Пономарев В.А., Пономарева О.В., Пономарев А.В. Измерение временных спектров дискретных сигналов на конечных интервалах // Вестник ИжГТУ им. Калашникова М.Т. 2016. – Т. 19. – № 2. – С. 80-83.

13. Пономарева О.В., Алексеев В.А., Пономарев А.В. Быстрый алгоритм измерения спектра действительных сигналов методом аперидического дискретного преобразования Фурье // Вестник ИжГТУ им. Калашникова М.Т. 2014. № 2. С. 106-109.

14. Пономарева О.В. Измерение спектров комплексных сигналов на конечных интервалах методом аперидического дискретного преобразования Фурье // Интеллектуальные системы в производстве. 2014. № 1(23). С.100-107.

15. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Инвариантность текущего энергетического Фурье-спектра комплексных дискретных сигналов на конечных интервалах // Известия высших учебных заведений России. Радиотехника. 2014. № 2. С. 8-16.

16. Rabiner L., Gold B. Theory and Application of digital signal processing. New Jersey, Prentice-hall, 1975, 772 p.

17. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. –1168 (2018).

18. Pratt William K. Digital image processing. 4th edl, A Wiley-Interscience publication 2007, 807 p.

УДК 621.396

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ КЛАССА ЦИФРОВЫХ СТРУКТУРНО-ЗАЩИЩЕННЫХ РАДИОСИГНАЛОВ

Кириллов С.Н., д.т.н., профессор, зав. кафедрой РУС РГПТУ, e-mail: kirillov.lab@mail.ru;

Лисничук А.А., к.т.н., доцент кафедры РУС РГПТУ, e-mail: a.a.lisnichuk@gmail.com.

MULTI-CRITERIA SYNTHESIS FOR CLASS OF DIGITAL STRUCTURALLY PROTECTED RADIO SIGNALS

Kirillov S.N., Lisnichuk A.A.

To increase the noise immunity of prospective radio communication systems, a procedure has been developed for multi-criteria synthesis for class of structurally protected radio signals in order to adapt to narrow-band interference action. The combined quality criterion included private criteria responsible for reducing narrow-band interference effects; noise immunity with additive «white» Gaussian noise, as well as minimizing out-of-band radiation and maximizing signal structural hiding. The application of the last criterion led in radio monitoring systems to a significant increase in the probability of bit error from detectors set of the known signals types under consideration (by up to 25 %).

Key words: radio signal synthesis, signal structural hiding, multi-criteria optimization, increasing noise immunity.

Ключевые слова: синтез радиосигналов, структурная скрытность, многокритериальная оптимизация, повышение помехоустойчивости.

Введение

В интересах реализации концепции многошелонированной помехозащищенности перспективных радиосистем передачи информации (РСПИ) необходимо повышение как помехоустойчивости, так и структурной скрытности передаваемых сигналов. Для адаптации РСПИ к действию совокупности аддитивного «белого» гауссовского шума (АБГШ) и других мешающих факторов (в том числе и узкополосных помех (УП)) целесообразно применять многокритериальный синтез радиосигналов с провалом в спектральной плотности мощности (СПМ) на частотах действия помехи [1]. При этом особое внимание следует уделить дополнительно увеличению структурной скрытности радиоканала. Это, в свою очередь, затруднит распознавание типа радиосигнала и приведет к невозможности несанкционированного перехвата передаваемой информации или постановки эффективной (сигналоподобной) помехи.

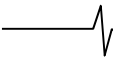
Для исключения влияния конкретного алгоритма распознавания вида модуляции целесообразно рассмотреть показатель качества, обеспечивающий увеличение структурной скрытности в виде максимизации вероятности битовой ошибки от набора детекторов известных типов сигналов в случае подачи на их вход смеси синтезированного сигнала и АБГШ при сравнительно высоком отношении сигнал-шум. Стоит отметить, что в такой модели создаются наиболее жесткие требования для показателя качества структурно-защищенных радиосигналов, так как для системы определения вида модуляции предполагается идеальная синхронизация как по несущей, так и по тактовой частотам, и, кроме того, отсутствие воздействия УП.

Для увеличения помехозащищенности перспективных радиосистем передачи информации разработана процедура многокритериального синтеза класса структурно-защищенных радиосигналов в интересах адаптации к действию узкополосных помех. В состав комбинированного критерия качества входили частные критерии, отвечающие за ослабление действия узкополосных помех и помехоустойчивость при аддитивном «белом» гауссовском шуме, а также обеспечивающие минимизацию внеполосного излучения и максимизацию структурной скрытности формируемого сигнала. Применение последнего критерия привело в системах радиомониторинга к существенному увеличению вероятности битовой ошибки от набора детекторов рассматриваемых известных типов сигналов (на величину до 25 %).

Целью работы является разработка процедуры многокритериального синтеза класса цифровых структурно-защищенных радиосигналов в интересах адаптации РСПИ к действию УП.

Критерий увеличения структурной скрытности радиосигналов

Для достижения увеличения структурной скрытности целесообразно потребовать максимизацию расстояний в пространстве сигналов между классом синтезируемых радиосигналов S_{opt} и точками S_{ζ} , соответствующими известным видам модуляции. При этом при превышении таким расстоянием величины, равной минимальному евклидову расстоянию между элементами канального алфавита для QPSK-сигнала d_{QPSK}^{min} , дальнейшая максимизация его значения не будет приводить к дополнительной структурной скрытности, и, следовательно, целесообразно исключить данное расстояние из рассмотрения на текущей итерации. Кроме того, стоит отметить, что для каждого известного вида модуляции вычисляется матрица взаимных (с синтезируемым радиосигналом) евклидовых расстояний $D_2(S_{\zeta}, S_{opt})$, а для выполнения численной оптимизации, как правило, необходимо ска-



лярное значение целевой функции. При рассмотрении минимального значения из матрицы взаимных евклидовых расстояний в целевой функции возникает минимаксная метрика, которая приводит к появлению множества локальных оптимумов и в целом затрудняет оптимизацию [2]. Предлагается для преодоления данного недостатка вычислять среднее по ансамблю от матрицы взаимных евклидовых расстояний (при помощи оператора $M[\cdot]$). И, наконец, для учета нескольких (количество которых обозначим L) известных видов модуляции в данном критерии необходимо рассматривать взвешенную сумму соответствующих частных критериев (здесь вес определяет важность структурной защиты от определенного сигнала), однако при равнозначности рассматриваемых частных критериев возможно вычисление по ним среднеарифметического значения. Тогда данный критерий можно записать в следующем виде:

$$k_{si}(\mathbf{S}_{opt}) = \quad (1)$$

$$= \frac{1}{L} \sum_{\zeta=1}^L M \left[\left\{ \mathbf{D}_2(\mathbf{S}_{\zeta}, \mathbf{S}_{opt}) \mid d_2(s_{\zeta,i}, s_{opt,j}) < d_{QPSK}^{\min} \right\} \right] \rightarrow \max_{\mathbf{S}_{opt}}$$

$$d_2(s_{\zeta,i}, s_{opt,j}) \in \mathbf{D}_2(\mathbf{S}_{\zeta}, \mathbf{S}_{opt}),$$

$$s_{\zeta,i} \in \mathbf{S}_{\zeta}, s_{opt,j} \in \mathbf{S}_{opt}, i, j = \overline{1, M_N}.$$

где $d_2(s_{\zeta,i}, s_{opt,j})$ – взаимное евклидово расстояние между i -м ($s_{\zeta,i}$) и j -м ($s_{opt,j}$) элементами канальных алфавитов соответственно для известного \mathbf{S}_{ζ} и синтезируемого сигналов \mathbf{S}_{opt} ; M_N – позиционность радиосигналов, как правило, соответствует объему канального алфавита. Необходимо отметить, что при оптимизации сигналы должны подвергаться нормировке по мощности для недопущения реализации тривиального решения путем увеличения энергии синтезируемого сигнала.

Для более точной постановки задачи необходимо ограничить класс анализируемых сигналов. В современных РСПИ целесообразно рассмотреть четырехпозиционные радиосигналы, как реализующие сравнительно высокие показатели качества при компактном объеме канального алфавита. В качестве известных видов модуляции предлагается рассмотреть такие широко распространенные на практике сигналы как фазоманипулированные: QPSK, QPSK с формой элементарного импульса $p_1(t) = \sin(\pi t / T_s)$, (T_s – символный интервал), QPSK ($p_2(t) = \sin^2(\pi t / T_s)$); частотно-манипулированные: FSK-4 с индексом модуляции $h = 0,5$, FSK-4 ($h = 1$); перспективные: FQPSK (Fehler-patented quadrature phase-shift keying).

Процедура многокритериального синтеза структурно-защищенных радиосигналов

Для недопущения неконтролируемого изменения других важных характеристик РСПИ представляет интерес применение многокритериального подхода. Следовательно, целесообразно рассмотрение следующих критериев качества перспективных РСПИ [1, 3-6]:

– максимизация пропускной способности при минимизации действия УП на РСПИ путем формирования про-

валов в СПМ синтезируемого канального алфавита;

– максимизация помехоустойчивости к действию АБГШ путем увеличения евклидова расстояния между элементами синтезируемого канального алфавита;

– минимизация внеполосного излучения с помощью задания штрафа при превышении эталонной СПМ;

– максимизация структурной скрытности синтезируемых радиосигналов.

Одним из удобных методов решения многокритериальных задач является переход к синтезу радиосигналов на основе взвешенной суммы [7] критериев качества:

$$c_1 M_1 \int |G_0(f) - G_S(f, \mathbf{S}_{opt})|^2 df + c_2 M_2 / \rho_S(\mathbf{S}_{opt}) + c_3 M_3 \eta(G_S(f, \mathbf{S}_{opt}), G_M(f)) + c_4 M_4 / k_{si}(\mathbf{S}_{opt}) \rightarrow \min_{\mathbf{S}_{opt}}, \quad (2)$$

где $c_i, M_i > 0$, $\left(\sum_{i=1}^4 c_i = 1 \right)$ – соответственно весовые и

масштабирующие (приводящие в одинаковый динамический диапазон) коэффициенты для каждого входящего критерия качества; $G_0(f)$, $G_S(f, \mathbf{S}_{opt})$ – соответственно «эталонная» (с провалом на частоте действия УП) и текущая нормированные СПМ радиосигналов; $\rho_S(\mathbf{S}_{opt})$ – среднее значение всех возможных попарных евклидовых расстояний между элементами $s_k, s_l \in \mathbf{S}_{opt}$ ($k, l = \overline{1, 4}$, $k \neq l$) канального алфавита \mathbf{S}_{opt} ; $\eta(\cdot)$ – «штрафная» функция, ограничивающая превышение внеполосным излучением сигнала специальной функции $G_M(f)$.

Применение такого подхода позволяет задавать компромисс между характеристиками РСПИ путем определения соответствующих весовых коэффициентов. Кроме того, результаты, полученные таким способом, не содержат «худших» сигналов, т.е. не требуют дополнительного времени на отсеивание неоптимальных решений.

Из результатов предварительных исследований следует, что дополнительное повышение структурной скрытности требуется не для всех элементов класса синтезируемых сигналов. Например, для сигнала, синтезированного в [4], при центральной частоте УП соответствующей несущей частоте и значении весовых коэффициентов $c_1 = 0,5$; $c_3 = 0,3$; вероятности битовой ошибки от набора детекторов рассматриваемых известных типов сигналов BER_{si} (при $E_b / N_0 = 20$ дБ) приведены в табл. 1.

Таблица 1. Показатель BER_{si} для синтезированного сигнала (без применения критерия качества максимизации структурной скрытности) при центральной частоте УП соответствующей несущей частоте

Тип детектора	QPSK	QPSK $p_1(t)$	QPSK $p_2(t)$	FSK-4 $h = 0,5$	FSK-4 $h = 1$	FQPSK
BER_{si}	46 %	43 %	42 %	23 %	29 %	43 %

Из анализа табл. 1 следует, что минимальное значение $BER_{si} = 23\%$ достигается при детекторе FSK-4 $h = 0,5$. Данные значения свидетельствуют о довольно высокой структурной скрытности синтезированного радиосигнала без применения соответствующего критерия (при $BER_{si} > 15\%$ предполагается отсутствие возмож-

ности эффективного детектирования радиосигнала). Однако, такие показатели достигаются не для всех элементов класса синтезируемых радиосигналов: при центральной частоте УП равной $-0,75 fT_s$ и значении весовых коэффициентов $c_1 = 0,5$; $c_3 = 0,3$ показатели качества приведены в табл. 2.

Таблица 2. Показатель BER_{si} для синтезированного сигнала (без применения критерия качества максимизации структурной скрытности) при центральной частоте УП равной $-0,75 fT_s$

Тип детектора	QPSK	QPSK $p_1(t)$	QPSK $p_2(t)$	FSK-4 $h = 0,5$	FSK-4 $h = 1$	FQPSK
BER_{si}	1 %	3 %	2 %	23 %	27 %	48 %

Из анализа табл. 2 следует, что структурная скрытность синтезированного радиосигнала без применения соответствующего критерия не достигает требуемого уровня.

Исходя из этих результатов, а также с учетом выявленной существенной зависимости результатов оптимизации по целевой функции (2) от начальных условий, предлагается производит многокритериальный синтез структурно-защищенных радиосигналов в два этапа: синтез в соответствии с процедурой, приведенной в [4], а затем, при необходимости дополнительная минимизация по целевой функции (2) (при помощи квазиньютоновского алгоритма оптимизации).

Экспериментальные исследования

В интересах оценки реализуемых показателей качества РСПИ на основе многокритериального синтеза структурно-защищенных радиосигналов было проведено имитационное моделирование следующих процессов:

- многокритериального синтеза и формирования структурно-защищенных радиосигналов;
- добавления к полезному сигналу АБГШ;
- детектирования из принятой смеси информационной составляющей радиосигнала при помощи набора детекторов рассматриваемых известных типов сигналов;
- определения реализованных характеристик РСПИ при текущих условиях, накопление статистики.

Для каждого значения показателя качества BER_{si} накапливалось не менее 100 ошибочных бит, кроме того, статистика набиралась по 1000 реализациям смеси полезного сигнала и АБГШ.

Результаты моделирования многокритериального синтеза структурно-защищенных радиосигналов при центральной частоте УП равной $-0,75 fT_s$ приведены в табл. 3.

Таблица 3. Показатель BER_{si} для синтезированного структурно-защищенного сигнала при центральной частоте УП равной $-0,75 fT_s$

Тип детектора	QPSK	QPSK $p_1(t)$	QPSK $p_2(t)$	FSK-4 $h = 0,5$	FSK-4 $h = 1$	FQPSK
BER_{si}	48 %	44 %	31 %	26 %	27 %	46 %

Из анализа табл. 3 следует, что минимальное значение $BER_{si} = 26\%$ достигается при детекторе FSK-4 $h = 0,5$. Необходимо отметить, что применение крите-

рия структурной скрытности радиосигналов позволило существенно увеличить показатель качества минимальной битовой ошибки от набора детекторов рассматриваемых известных типов сигналов на величину 25 % (см. табл. 2).

Однако, из табл. 3 также следует, что для трех видов модуляции достигается наименьшая, примерно равная, вероятность битовой ошибки BER_{si} : QPSK $p_2(t)$, FSK-4 $h = 0,5$, FSK-4 $h = 1$. С одной стороны, данное обстоятельство полезно для структурной скрытности, т.к. для системы определения вида модуляции предоставляется сравнительно равновероятная возможность отнести синтезированный радиосигнал к одному из трех классов. С другой стороны, можно выдвинуть гипотезу о построении более сложного приемника, учитывающего информацию от трех наиболее вероятных детекторов и выдающих итоговое решение о принятом бите по критерию 2 из 3 (т.е. исходя из простого большинства по частным решениям). Данная гипотеза также была проверена при помощи имитационного моделирования. В результате при таком детекторе достигается значение $BER_{si} = 16\%$, что свидетельствует об отсутствии возможности эффективного детектирования синтезированного структурно-защищенного радиосигнала с помощью систем определения известного вида модуляции.

Необходимо отметить, что реализация дополнительной структурной скрытности синтезированных радиосигналов требует некоторого увеличения занимаемой полосы частот: ширина спектральной плотности мощности по уровню -30 дБ увеличивалась на величину до 40 %. Однако, при этом, помимо высокой структурной скрытности, обеспечивается значительная помехоустойчивость путем эффективной адаптации РСПИ к действию УП: в условиях воздействия АБГШ и УП (вплоть до отношения сигнал-помеха -10 дБ) реализовывалась помехоустойчивость на уровне сигнала с QPSK при воздействии только АБГШ.

Заключение

В интересах реализации концепции многоэшелонированной помехозащищенности перспективных радиосистем передачи информации разработана процедура многокритериального синтеза класса структурно-защищенных радиосигналов в интересах адаптации к действию УП. В состав комбинированного критерия качества входили частные критерии, отвечающие за ослабление действия узкополосных помех; помехоустойчивость при АБГШ, а также обеспечивающие минимизацию внеполосного излучения и максимизацию структурной скрытности формируемого сигнала. Применение критерия структурной скрытности радиосигналов позволило существенно увеличить соответствующий показатель качества на 25%, при этом ширина спектральной плотности мощности по уровню -30 дБ увеличивалась на величину до 40%. Однако, помимо высокой структурной скрытности, обеспечивается значительная помехоустойчивость путем эффективной адаптации РСПИ к действию УП: в условиях воздействия АБГШ и УП (вплоть до отношения сигнал-помеха -10 дБ) реализовывалась помехоустойчивость на уровне сигнала с QPSK при воздействии только АБГШ.



Литература

1. Лисничук А.А. Процедура многокритериального синтеза сигналов с прямым расширением спектра для адаптации когнитивных радиосистем передачи информации к сложной помеховой обстановке // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2018. № 66-1. С. 9-15.
2. Гуткин Л.С. Оптимизация радиоэлектронных устройств по совокупности показателей качества. – М.: Сов. радио, 1975. – 368 с.
3. Кириллов С.Н., Лисничук А.А. Многокритериальный синтез 16-позиционных радиосигналов на основе канального алфавита в интересах адаптации радиосистем передачи информации к узкополосным помехам // Радиотехника. 2018. № 5. С. 4-12.
4. Кириллов С.Н., Лисничук А.А. Сравнительный анализ воздействия узкополосных помех на когнитивные радиосистемы передачи информации на основе синтезированных четырехпозиционных радиосигналов // Радиотехника. 2018. № 5. С. 30-35.
5. Лисничук А.А., Кириллов С.Н. Анализ характеристик когнитивных радиосистем передачи информации при адаптации к действию узкополосных помех на основе синтезированных четырехпозиционных радиосигналов // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2018. № 66-1. С. 3-8.
6. Кириллов С.Н., Лисничук А.А. Многокритериальный синтез сигнально-кодовых конструкций на основе зависимых сигналов для адаптации радиосистем передачи информации к действию узкополосных помех // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2017. № 4. С. 3-12.
7. Гуткин Л.С. Проектирование радиосистем и радиоустройств. – М.: Радио и связь, 1986. – 288 с.

УДК 621.391

УСТОЙЧИВЫЕ К РАСПОЗНАВАНИЮ РАДИОСИГНАЛЫ С УПРАВЛЯЕМОЙ СВЯЗЬЮ МЕЖДУ СИНФАЗНОЙ И КВАДРАТУРНОЙ СОСТАВЛЯЮЩИМИ

Покровский П.С., к.т.н., доцент кафедры радиоуправления и связи Рязанского государственного радиотехнического университета им. В.Ф. Уткина, e-mail: paulps@list.ru.

RESISTANT TO RECOGNITION RADIO SIGNALS WITH CONTROLLED COUPLING BETWEEN IN-PHASE AND QUADRATURE COMPONENTS

Pokrovskij P.S.

For radio signals with controlled coupling between in-phase and quadrature components (RSCCQC) synthesized using the combined quality index «occupied bandwidth – level of envelope fluctuation», the decision ambiguity of two different radio signal classification algorithms is analyzed. The selection of classification algorithms is executed by subject to requirements of reliable recognition under conditions a priori unknown Doppler frequency and symbol rate. To evaluate the ambiguity of algorithm decisions (i.e. the resistance to recognition) the entropy is used. It was shown that on the considering signal set there is a maximum of the decision ambiguity of the first radio signal classification algorithm. This point corresponds to a local minimum of the decision ambiguity of the second radio algorithm. And so, to determine the resistant to recognition RSCCQC the combined quality index is chosen as a weighted sum of decision entropies of these two classification algorithms. The optimal by the criterion of maximum of this sum RSCCQC provides approximately equal entropy values of both algorithms which are 0,9 bits. It was shown that these RSCCQC are comparable by basic spectral and energy characteristics with known bandwidth-efficient signals.

Key words: signal recognition, classification algorithm, all-purpose radio signal former, radio signals with controlled coupling between in-phase and quadrature components, bandwidth-efficient digital modulation

Ключевые слова: распознавание сигналов, алгоритм классификации, универсальный формирователь радиосигналов, радиосигналы с управляемой связью между синфазной и квадратурной составляющими, спектрально-эффективные виды модуляции.

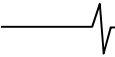
Введение

В интересах защиты современных и перспективных систем передачи информации в настоящее время развиваются методы, основанные на повышении структурной скрытности полезного радиосигнала [1]. Данный подход подразумевает, что в случае перехвата радиосигнала злоумышленник не сможет в реальном масштабе времени определить вид и параметры модуляции, и таким образом подобрать требуемый алгоритм восстановления передаваемого информационного сообщения.

Одним из способов реализации этого метода является построение систем передачи информации с применением радиосигналов с управляемой связью между синфазной и квадратурной составляющими (РУСКС). Данный класс сигналов охватывает множество сигналов с частотными видами модуляции, в частности, сигналы с гауссовской манипуляцией с минимальным сдвигом (GMSK), а также семейство фазоманипулированных сигналов, которое, например, включает сигналы с такими известными модификациями квадратурной фазовой манипуляции со смещением (OQPSK), как OQPSK с решетчатым кодированием (T-OQPSK) и запатентованная К. Феером квадратурная манипуляция (FQPSK). При

Для радиосигналов с управляемой связью между синфазной и квадратурной составляющими (РУСКС), синтезированных по комбинированному показателю качества «занимаемая полоса частот – уровень флуктуаций огибающей», проведен анализ однозначности решений, генерируемых двумя алгоритмами классификации вида модуляции. Выбор алгоритмов классификации производился с учетом требования надежного распознавания сигналов в условиях априорной неопределенности величин доплеровского частотного сдвига и частоты следования символов. При этом в качестве количественной меры неопределенности формируемых решений, т.е. устойчивости к распознаванию, использовано значение энтропии. Показано, что на рассматриваемом множестве сигналов имеется максимум неопределенности решений одного алгоритма классификации, который соответствует локальному минимуму другого, поэтому для определения устойчивых к распознаванию сигналов выбран комбинированный показатель в виде взвешенной суммы значений энтропий решений двух алгоритмов классификации. Оптимальные по критерию максимума этого показателя РУСКС обеспечивают примерно равные значения энтропий обоих рассмотренных алгоритмов, которые составляют 0,9 бита. Показано, что данные РУСКС по своим основным спектральным и энергетическим характеристикам сопоставимы с известными спектрально-эффективными сигналами.

этом перестройка между этими семействами сигналов в рамках РУСКС обеспечивается за счет изменения всего двух управляющих коэффициентов с возможностью формирования большого числа промежуточных, лежащих между классами известных видов частотной и фазовой манипуляции типов сигналов [2]. Так в результате синтеза РУСКС по комбинированному критерию каче-



ства, учитывающему требования на минимизацию занимаемой полосы частот и уровня флуктуации огибающей, получено множество сигналов, обеспечивающих заданное соотношение спектральной и энергетической эффективности и при этом относящихся к различным видам модуляции (фазовой и частотной) [3].

Таким образом, с учетом изложенных выше особенностей синтезированных РУСКС целью данной работы является отыскание сигнала из указанного множества, обеспечивающего наибольшую неоднозначность решений средств радиомониторинга относительно вида модуляции анализируемого сигнала.

Постановка задачи

Как известно [2], составляющие комплексной огибающей РУСКС можно представить в виде:

$$I(t) = I_1(t) - 0,5(1 - A_1)I_2(t) - 0,5(1 - A_2)I_3(t), \quad (1)$$

$$Q(t) = Q_1(t) - 0,5(1 - A_1)Q_2(t) - 0,5(1 - A_2)Q_3(t). \quad (2)$$

Здесь A_1 и A_2 – коэффициенты, задающие соответственно величину межсимвольной и межкомпонентной связи, которые определяют спектральные и энергетические характеристики формируемых сигналов; $I_1(t)$, $Q_1(t)$ и $I_2(t)$, $Q_2(t)$ – синфазные и квадратурные составляющие OQPSK-сигналов, соответственно сформированные на основе элементарных импульсов $p_1(t)$ и $p_2(t)$:

$$p_1(t) = \begin{cases} \sin^2(\pi t / (2T)) & \text{при } t \in [0; 2T], \\ 0 & \text{при } t \notin [0; 2T]; \end{cases}$$

$$p_2(t) = \begin{cases} \sin^2(\pi t / T) & \text{при } t \in [0; 2T], \\ 0 & \text{при } t \notin [0; 2T]; \end{cases}$$

где T – период следования информационных символов (дифитов).

Составляющие $I_3(t)$ и $Q_3(t)$ отвечают за взаимодействие компонентов синфазного и квадратурного каналов формирования и в простейшем случае определяются в виде [2]:

$$I_3(t) = \text{sgn}[I_1(t) - 0,5(1 - A_1)I_2(t)] \cdot |Q_2(t)|,$$

$$Q_3(t) = \text{sgn}[Q_1(t) - 0,5(1 - A_1)Q_2(t)] \cdot |I_2(t)|.$$

Из анализа формул (1) и (2) следует, что РУСКС однозначно определяются значениями коэффициентов A_1 и A_2 , поэтому рассматриваемое далее множество радиосигналов будем задавать множеством пар чисел A_1 и A_2 .

Для получения радиосигналов с заданным соотношением «занимаемая полоса частот – уровень флуктуаций огибающей» в работе [3] синтезированы РУСКС с использованием следующего комбинированного показателя качества:

$$F(A_1, A_2) = (1 - \lambda)\beta(A_1, A_2) + \lambda J(A_1, A_2),$$

где $\lambda \in [0; 1]$ – весовой коэффициент, β – эффективная полоса частот радиосигнала, нормированная к частоте следования информационных символов, J – дисперсия мгновенной мощности комплексной огибающей радиосигнала:

$$J = T_0^{-1} \int_0^{T_0} (I_3^2(t) + Q_3^2(t)) dt - \left(T_0^{-1} \int_0^{T_0} (I_3^2(t) + Q_3^2(t)) dt \right)^2.$$

В результате этого двухкритериального синтеза получены функциональные зависимости $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$. Анализ данных зависимостей показывает, что РУСКС, получаемые при $\lambda = 0$, относятся к семейству OQPSK-сигналов, а при $\lambda = 1$ – к семейству GMSK-сигналов. То есть множество синтезированных сигналов включает сигналы с фазовой и частотной манипуляцией, что позволяет определить такое значение весового коэффициента λ , которому соответствуют РУСКС, обеспечивающие наибольшую неоднозначность решения задачи распознавания вида модуляции. В связи с этим, рассматриваемое далее множество РУСКС ограничено подмножеством сигналов, определяемых зависимостями $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$.

Таким образом, дополнительный выбор РУСКС, обеспечивающих наибольшую неоднозначность распознавания вида модуляции, можно представить, как задачу максимизации посредством выбора весового коэффициента λ меры H неоднозначности принимаемого решения соответствующей подсистемы средств радиомониторинга:

$$\max_{\lambda \in [0; 1]} H(A_1(\lambda), A_2(\lambda)).$$

Как известно [4], количественную оценку меры неопределенности решения принято проводить с использованием энтропии. В данном случае соответствующая величина определяется выражением:

$$H(A_1, A_2) = - \sum_{k=1}^N p(\Omega_k | A_1, A_2) \log_2 p(\Omega_k | A_1, A_2),$$

где $p(\Omega_k | A_1, A_2)$ – вероятность того, что алгоритм классификации отнесет РУСКС, определяемый значениями коэффициентов A_1 и A_2 , к классу Ω_k видов модуляций из N возможных.

Алгоритм классификации

В настоящее время разработаны различные алгоритмы классификации видов модуляции радиосигналов [5]. Однако большинство этих алгоритмов рассчитаны на функционирование при наличии априорных сведений о параметрах анализируемого сигнала, в том числе, о значениях частоты и фазы несущего колебания, занимаемой полосы частот, скорости передачи информации и т.п. Данное условие при реализации систем радиомониторинга, работающих в реальном масштабе времени, трудно реализуемо. Поэтому в подобных системах анализа радиообстановки применяются алгоритмы, способные обеспечить надежную классификацию вида модуляции в условиях априорной неопределенности параметров сигнала. Данное требование можно обеспечить за счет применения признаков, построенных на основе оценок функций плотности вероятности мгновенной амплитуды, частоты и фазы анализируемого радиосигнала [6, 7]. Для описания вероятностных моделей указанных случайных величин используются гистограммы и характеристические функции. В частности, в работе [8] представлен алгоритм классификации вида модуляции радиосигнала, словарь признаков которого содержит данные характеристики. Это позволяет алгоритму из работы [8] производить надежную оценку вида модуляции в

условиях априорной неопределенности перечисленных выше параметров радиосигналов в режиме реального масштаба времени. С учетом вышеперечисленного, данный алгоритм используется далее для оценки устойчивости к распознаванию РУСКС.

Обучающая выборка алгоритма классификации построена с учетом сведений об использовании различных видов цифровой модуляции в существующих системах передачи информации. Так в качестве тестовых выбраны сигналы с двух, четырех и восемью позиционной фазовой манипуляцией (соответственно, BPSK, QPSK и PSK-8), OQPSK-сигналы, сигналы с шестнадцати позиционной квадратурной амплитудной модуляцией (QAM-16), а также сигналы с двоичной частотной манипуляцией (FSK-2), манипуляцией с минимальным сдвигом (MSK) и GMSK. При этом для повышения устойчивости алгоритма классификации к вариациям характеристики предмодуляционного фильтра сигналы с BPSK, QPSK, PSK-8, OQPSK и QAM-16 для обучающей выборки формировались на основе четырех типов элементарного импульса: прямоугольного импульса, импульса $p_i(t)$, а также импульсов с характеристиками типа «корень квадратный из приподнятого косинуса» при коэффициенте ската $\alpha = 0,35$ и $\alpha = 0,70$. С аналогичной целью для формирования GMSK-сигналов использовались гауссовские фильтры с относительной полосой пропускания $BT = 0,25; 0,3; 0,4; 0,5$. Для каждой модификации перечисленных типов сигналов сформировано 1000 реализаций, соответствующих передаче 1000 случайных информационных символов. Для сигналов с FSK-2 и MSK обучающие выборки составляли 4000 реализаций, несущих также 1000 случайных информационных символов.

Кроме того, все сигналы обучающей выборки подвергались воздействию аддитивного «белого» гауссовского шума, при этом отношение средней энергии E_b одного бита к спектральной плотности N_0 мощности шума составляло $E_b / N_0 = 25$ дБ. Данный уровень шумов позволяет уверенно детектировать рассматриваемые типы радиосигналов, т.е. имеется возможность в реальном масштабе времени производить полный структурный анализ радиосигналов. При этом наличие шума обеспечивает реализацию свойства робастности алгоритма классификации вида модуляции. Кроме того, в сигналы обучающей выборки внесена случайная частотная расстройка, величина которой равномерно распределена в интервале от -5% до 5% относительно скорости передачи информационных символов.

Для оценки адекватности функционирования алгоритма классификации вида модуляции сформирована тестовая выборка. При этом количество и условия получения сигналов этой выборки аналогичны используемым для обучающей выборки. Проведенные исследования показали, что средняя вероятность правильной классификации на тестовой выборке составила более 95%.

Дополнительно для анализа устойчивости РУСКС к распознаванию вида модуляции использовался алгоритм классификации, предложенный в работе [9]. Данный алгоритм также отвечает поставленному требованию устойчивости получаемых решений к априорной неопределенности параметров радиосигналов. Используемый состав алфавита классов и условия обучения

данного алгоритма классификации аналогичны описанным в работе [9], что при отношении $E_b / N_0 = 25$ дБ обеспечивает вероятность правильной классификации на уровне 97% для 11 типов анализируемых радиосигналов. Данный алгоритм классификации помимо перечисленных выше 8 видов модуляции, способен распознавать такие виды модуляции, как относительная двух и четырех позиционная фазовая манипуляция (соответственно, DBPSK и DQPSK), а также четырех позиционную частотную манипуляцию (FSK-4).

Компьютерное моделирование

Определение наиболее устойчивого к распознаванию РУСКС осуществлялось посредством компьютерного моделирования, в рамках которого реализации радиосигнала, соответствующего значениям $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$, поступали на вход перечисленным выше двум алгоритмам классификации вида модуляции. При этом значение весового коэффициента λ изменялось в интервале $[0; 1]$ с дискретом 0,02, а статистика набиралась на основе 1000 реализаций, длительность которых составляла 1000 информационных символов. Уровень шума соответствовал значению отношения $E_b / N_0 = 25$ дБ, расстройка по частоте не вносилась.

На основе полученных решений приведенных выше алгоритмов классификации производились оценки энтропии H принятия решения по отношению рассматриваемого РУСКС к сигналам с фазовой или частотной манипуляцией. При этом к фазовой манипуляции отнесены такие виды модуляции, как BPSK, QPSK, OQPSK, PSK-8, DBPSK, DQPSK, QAM-16, а к частотной – FSK-2, MSK, GMSK, FSK-4. Полученные результаты моделирования представлены на рис. 1 в виде зависимостей энтропии H от весового коэффициента λ , кривые 1 и 2 построены соответственно для алгоритмов классификации видов модуляции, описанных в работах [8] и [9].

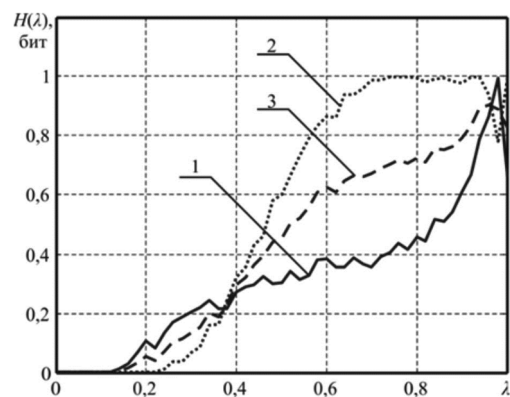


Рис. 1. Зависимости энтропии H при классификации РУСКС от параметра синтеза λ

Анализ рис. 1 показывает, что максимум ($\lambda = 0,98$) неопределенности алгоритма, описанного в работе [8], приходится на локальный минимум энтропии принятия решения алгоритмом, представленным в [9]. В этой связи для определения РУСКС, обладающих высокой устойчивостью к определению вида модуляции сразу двумя рассматриваемыми алгоритмами классификации, рассмотрен показатель качества, представляющий собой взвешенную сумму энтропий принятия решения этих двух алгоритмов, т.е. следующая величина:

$$H_{\Sigma} = 0,5 \cdot H_1 + 0,5 \cdot H_2. \quad (3)$$

Здесь H_1 и H_2 – энтропии принятия решений алгоритмами классификации, приведенными в работах [8] и [9], соответственно.

Зависимость комбинированного показателя качества H_{Σ} от весового коэффициента λ также представлена на рис. 1 в виде кривой 3. Анализ данной зависимости показывает, что оптимальными по введённому критерию являются РУСКС, синтезированные при $\lambda = 0,96$. Данный радиосигнал получается при следующих значениях управляющих коэффициентов – $A_1 = 0,76$ и $A_2 = 0,65$. Соответствующий РУСКС характеризуется примерно одинаковыми величинами энтропии решений обоих рассматриваемых алгоритмов классификации, т.е. $H_1 = H_2 \approx 0,9$ бит. При этом вероятность того, что оба этих алгоритма отнесут данный РУСКС к классу фазовой или частотной манипуляции, близка к уровню 50 % (68/32).

Для подобных устойчивых к распознаванию РУСКС с использованием результатов работы [2] рассчитаны основные спектральные и энергетические характеристики. Полученные числовые значения вместе с соответствующими параметрами радиосигналов с известными спектрально-эффективными видами модуляции [10] сведены в табл. 1. Здесь под полосой частот понимается нормированная к скорости передачи информационных символов полоса частот, в которой сосредоточено 99 % мощности сигнала, а под помехоустойчивостью – значение отношения E_b / N_0 , которому соответствует частота битовых ошибок, равная 10^{-3} .

Таблица 1. Характеристики радиосигналов

Вид сигнала	Помехоустойчивость, дБ	Полоса частот	Пик-фактор
Устойчивый к распознаванию РУСКС	7,3	1,6	1,02
T-OQPSK	6,8	1,4	1,15
GMSK $BT = 0,5$	6,8	2,0	1,00
FQPSK	7,2	1,6	1,02

Анализ данных табл. 1, показывает, что РУСКС, синтезированный по критерию минимума показателя качества (3) при $\lambda = 0,96$, сопоставим по основным характеристикам с известными спектрально-эффективными сигналами. В частности, этот РУСКС при прочих равных параметрах проигрывает по помехоустойчивости порядка 0,1 дБ FQPSK-сигналам. В сравнении с рассмотренным GMSK-сигналом при примерно одинаковом уровне пик-фактора (разница менее 0,02) выбранный РУСКС позволяет на 20 % сократить занимаемую полосу частот при потерях на уровне 0,5 дБ в устойчивости к действию шумов. T-OQPSK-сигналы по величине пик-фактора проигрывают данному РУСКС порядка 11 % при выигрыше на 0,5 дБ по помехоустойчивости (в линейном режиме работы оконечных каскадов передатчика) и на 15 % по полосе частот. При этом РУСКС, синтезированный при $\lambda = 0,96$, обеспечивает достаточно высокую (0,9 бита) неопределенность решения рассмотренных алгоритмов относительно вида модуляции (фазовая или частотная).

Заключение

Для выбора устойчивых к распознаванию радиосиг-

налов рассмотрено семейство РУСКС, синтезированных по комбинированному показателю качества «занимаемая полоса частот – уровень флуктуаций огибающей». Для количественной оценки меры устойчивости сигналов к распознаванию использовалась энтропия принятия решения алгоритмом классификации. При этом рассмотрено два алгоритма классификации, обеспечивающих среднюю вероятность правильного распознавания не менее 95 % в условиях априорной неопределенности параметров обрабатываемого сигнала. Анализ полученных зависимостей энтропии от параметра синтеза РУСКС не позволил однозначно определить наиболее устойчивый радиосигнал, так как максимум неопределенности решений одного алгоритма классификации соответствовал локальному минимуму другого. В этой связи для выбора устойчивого к распознаванию радиосигнала предложено использовать комбинированный показатель качества в виде взвешенной суммы энтропий, соответствующих двум алгоритмам классификации. Проведенные исследования показали, что максимум данного показателя обеспечивается при $\lambda = 0,96$, т.е. при значениях коэффициентов $A_1 = 0,76$ и $A_2 = 0,65$. При этом энтропии решений, генерируемых рассмотренными алгоритмами классификации, примерно равны величине 0,9 бита. Дополнительный анализ показал, что определенные таким образом РУСКС сопоставимы по основным спектральным и энергетическим параметрам с радиосигналами с современными спектрально-эффективными видами модуляции, такими как T-OQPSK, GMSK и FQPSK.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-36538.2018.9 (соглашение № 075-02-2018-681 от 16.11.2018 г.).

Литература

- Жук А.П., Иванов А.С. Повышение структурной скрытности системы передачи информации с кодовым разделением каналов // Научно-технические технологии в космических исследованиях Земли, № 1, 2011. С. 26-28.
- Кириллов С.Н., Покровский П.С. Программно-управляемый формирователь радиосигналов с нелинейными видами модуляции // Нелинейный мир, № 3, 2013. С. 150-157.
- Покровский П.С. Процедура синтеза радиосигналов с управляемой связью между квадратурными составляющими по двум показателям качества // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. № 2 (выпуск 52). 2015. С.49-55.
- Прокис Дж. Цифровая связь. Пер. с англ./ Под ред. Кловского Д.Д. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.
- Макаров К.С. Методы распознавания модуляции // Цифровая обработка сигналов, 2014, №1. С. 29-35.
- O.A. Dobre, A. Abdi, Y. Bar-Ness, W. Su, «Survey of automatic modulation classification techniques: classical approaches and new trends», Com. IET, vol. 1, No. 2, 2007, pp. 137–156.
- Bhawna, M. Kaur, G.C. Lall, «Automatic Modulation Recognition for Digital Communication Signals», IJSCCE, vol. 2, 2012, pp. 110-114.
- Liedtke F., «Adaptive procedure for automatic modulation recognition», Journal of Telecommunications and Information Technology, No. 4, 2004, pp. 91-97.
- Кириллов С.Н., Покровский П.С. Алгоритм классификации вида модуляции неизвестного радиосигнала космических систем передачи информации // Вестник РГПУ, №2, 2013. С. 3-11.
- Simon M.K. Bandwidth-Efficient Digital Modulation with Application to Deep-Space Communications. Jet Propulsion Laboratory. California Institute of Technology. URL: <https://descanso.jpl.nasa.gov/monograph/series3/complete1.pdf>.

РАСПОЗНАВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ В КАЧЕСТВЕ И ПРИЗНАКОВ ВЫБОРОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Паршин В.С., д.т.н., профессор Рязанского радиотехнического университета, e-mail: vsparshin@gmail.com.

RECOGNITION OF RANDOM SIGNALS WHEN USED AS FEATURES OF SAMPLE CHARACTERISTIC FUNCTIONS

Parshin V.S.

Sample characteristic functions are offered to be used as features for random signal recognition which allows us to move from the recognition in case of non-parametric a priori uncertainty to the recognition in the condition of parametric a priori uncertainty. The ratios to determine the moments of sample characteristic function distribution law allowing us to determine asymmetry and kurtosis coefficients are received. The estimation of the convergence of sample characteristic function distribution law to normal distribution is given. The comparison of probabilities for erroneous recognition of four classes of random signals using optimum algorithms and the algorithm using the values of sample characteristic function as features is carried out.

Key words: recognition, a priori uncertainty, features, sample characteristic function, distribution moments, asymmetry and kurtosis coefficients, erroneous recognition probabilities.

Ключевые слова: распознавание, априорная неопределенность, признаки, выборочная характеристическая функция, моменты распределения, коэффициенты асимметрии и эксцесса, вероятности ошибочного распознавания.

Введение

Известным путем решения задачи распознавания в том случае, когда известна модель сигнала (случай заданного классификатора), является формирование функции правдоподобия для каждой из проверяемых гипотез. Решение принимается в пользу той гипотезы, для которой функция правдоподобия максимальна. На практике случай заданного классификатора является скорее исключением, чем правилом. Поэтому при априорной неопределенности для получения решающих правил, обладающими свойствами оптимальности, необходима оценка законов распределения распознаваемых сигналов и их параметров. Поэтому решающее правило обычно представляют в следующем виде – контрольная выборка $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ длины N отсчетов принадлежит классу s_l , $l = \overline{1, K}$, для которого оценка $\hat{L}(x)$ функции правдоподобия максимальна, то есть [1, 2]

$$\hat{L}_l(\xi) = \max_{1 \leq m \leq K} \{\hat{w}_m(\xi)\}, \quad (1)$$

где $\hat{w}(\cdot)$ – оценка в общем случае n -мерного закона распределения, полученная по обучающей выборке.

Существенным затруднением при синтезе алгоритмов распознавания при непараметрической априорной неопределенности является необходимость оценки законов распределения распознаваемых сигналов. Известны различные методы преодоления непараметрической априорной неопределенности. Например, в [1, 3] и других работах обсуждаются достоинства и недостат-

Предложено использовать в качестве признаков для распознавания случайных сигналов выборочные характеристические функции, что позволяет перейти от распознавания при непараметрической априорной неопределенности к распознаванию при параметрической априорной неопределенности. Получены соотношения для определения моментов закона распределения выборочной характеристической функции, позволяющие определить коэффициенты асимметрии и эксцесса. Проведена оценка сходимости закона распределения выборочной характеристической функции к нормальному распределению. Проведено сравнение вероятностей ошибочного распознавания четырех классов случайных сигналов для оптимальных алгоритмов и алгоритма, использующего в качестве признаков значения выборочной характеристической функции.

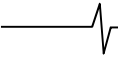
ки операторного метода, метода k – ближайших соседей, метода моментов и других методов аппроксимации выборочных распределений. Наибольшую трудность вызывает аппроксимация многомодальных распределений. Некоторые методы аппроксимации, особенно при малых объемах выборки, в этом случае просто не работают. Преодолеть непараметрическую априорную неопределенность может использование в качестве признаков для распознавания выборочных характеристических функций (ХФ) распознаваемых сигналов, поскольку ХФ, как и закон распределения вероятностей, является исчерпывающей характеристикой случайного процесса. Учитывая, что по определению одномерная ХФ случайной величины x определяется как [4]

$$\theta(j\omega) = M \{\exp(j\omega x)\} \quad \theta(j\omega) = M \{\exp(j\omega x)\}, \quad (2)$$

где M – оператор математического ожидания, примем за оценку $\hat{\theta}(\omega)$ ХФ соотношение

$$m_3 \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} \hat{\theta}(j\omega) \\ \operatorname{Im} \hat{\theta}(j\omega) \end{Bmatrix} = \frac{1}{N^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix} [\pm 3 \operatorname{Re} \theta(j\omega) + \operatorname{Re} \theta(j3\omega)] + \quad (3)$$

где x_n , $n = 1, N$ – выборочные значения случайной ве-



личины x .

Из выражения (3) следует, что в силу центральной предельной теоремы [4] законы распределения реальной $\text{Re}\hat{\theta}(j\omega)$ и мнимой $\text{Im}\hat{\theta}(j\omega)$ частей оценки ХФ при увеличении N будет асимптотически приближаться к нормальному, независимо от закона распределения распознаваемых сигналов. Поэтому для получения решающих правил нет необходимости оценивать вид закона распределения. Достаточно оценить моменты распределения – математическое ожидание и корреляционную матрицу. Для оценки эффективности выборочных ХФ при использовании их в качестве признаков для распознавания необходимо оценить скорость сходимости их распределений к нормальному, а затем сравнить получаемые вероятности ошибочного распознавания с вероятностями, полученными при решении известных задач. В известной автору литературе не удалось найти публикаций, посвященных оценке эффективности распознавания при выборе в качестве признаков выборочных ХФ.

Статистические характеристики оценки характеристической функции

Ограничимся распознаванием случайных процессов, представленными стационарными процессами с некоррелированными компонентами.

Непосредственно из (3) следует, что оценка ХФ является несмещенной [5...7], то есть

$$M\{\hat{\theta}(j\omega)\} = \text{Re}\theta(j\omega) + j\text{Im}\theta(j\omega), \quad (4)$$

где $\theta(j\omega)$ - истинная ХФ.

Дисперсия оценки ХФ в общем виде получена в работе [4], откуда следует, что для стационарных дельта-коррелированных случайных процессов дисперсию оценки ХФ можно представить в виде

$$D\{\hat{\theta}(j\omega)\} = \frac{1}{N} \{1 - |\theta(j\omega)|^2\}. \quad (5)$$

Дисперсии реальной и мнимой частей оценки ХФ определяются как

$$D \begin{Bmatrix} \text{Re}\hat{\theta}(j\omega) \\ \text{Im}\hat{\theta}(j\omega) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2N} \pm \frac{1}{2N} \text{Re}\theta(2j\omega) + \frac{N-1}{2N} |\theta(j\omega)|^2 \pm \pm \frac{N-1}{2N} [\text{Re}^2\theta(j\omega) - \text{Im}^2\theta(j\omega)] - \begin{Bmatrix} \text{Re}^2\theta(j\omega) \\ \text{Im}^2\theta(j\omega) \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Для оценки сходимости закона распределения оценки ХФ к нормальному определим третий M_3 и четвертый M_4 центральные моменты распределения оценки ХФ, а затем вычислим коэффициенты асимметрии β_1 и эксцесса и β_2 по формулам [3]:

$$\beta_1 = M_3 / \sqrt{D^3}, \quad (7)$$

$$\beta_2 = M_4 / D^2 - 3. \quad (8)$$

Третий начальный момент закона распределения реальной и мнимой частей оценки ХФ определится как

$$m_3 \begin{Bmatrix} \text{Re}\hat{\theta}(j\omega) \\ \text{Im}\hat{\theta}(j\omega) \end{Bmatrix} = \frac{1}{N^2} \left\{ \frac{1}{4} [\pm 3\text{Re}\theta(j\omega) + \text{Re}\theta(j3\omega)] + \right.$$

$$\left. + (N-1)(N-2) \text{Re}^3\theta(j\omega) + \frac{3}{2}(N-1) \text{Re}\theta(j\omega) [\pm \text{Re}\theta(j2\omega) + 1] \right\}. \quad (9)$$

Четвертый начальный момент закона распределения случайных величин $\text{Re}\hat{\theta}(j\omega)$ и $\text{Im}\hat{\theta}(j\omega)$ равен

$$m_4 \begin{Bmatrix} \text{Re}\hat{\theta}(j\omega) \\ \text{Im}\hat{\theta}(j\omega) \end{Bmatrix} = \frac{1}{N^3} \left\{ \frac{1}{8} [\text{Re}\theta(4\omega) \pm 4\text{Re}\theta(2\omega) + 3] + \right.$$

$$\left. + (N-1)(N-2)(N-3) \frac{\text{Re}^2\theta(\omega)}{\text{Im}^2\theta(\omega)} + \frac{3(N-1)}{4} [1 \pm \text{Re}(2\omega)]^2 + \right.$$

$$\left. + 4(N-1) \begin{Bmatrix} 3\text{Re}\theta(\omega) & \text{Re}\theta(3\omega) \\ 3\text{Im}\theta(\omega) & \text{Im}\theta(3\omega) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{Re}\theta(\omega) \\ \text{Im}\theta(\omega) \end{Bmatrix} + \right.$$

$$\left. + 3(N-1)(N-2) \begin{Bmatrix} 1 \pm \text{Re}\theta(2\omega) \\ \text{Im}\theta(2\omega) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \text{Re}^2\theta(\omega) \\ \text{Im}^2\theta(\omega) \end{Bmatrix} \right\}. \quad (10)$$

Третий и четвертый центральные моменты закона распределения оценки ХФ определяются через начальные моменты по известным соотношениям [4]

$$M_3 = m_3 - 3Mm_2 + 2M^3, \quad (11)$$

$$M_4 = m_4 - 4Mm_3 + 6m_1^2m_2 - 3M^4, \quad (12)$$

$$\text{где } m_2 \begin{Bmatrix} \text{Re}\hat{\theta}(j\omega) \\ \text{Im}\hat{\theta}(j\omega) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2N} \pm \frac{1}{2N} \text{Re}\theta(2j\omega) + \frac{N-1}{N} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} \text{Re}^2\theta(j\omega) \\ \text{Im}^2\theta(j\omega) \end{Bmatrix} - \text{второй начальный момент случайных}$$

величин $\text{Re}\hat{\theta}(j\omega)$ и $\text{Im}\hat{\theta}(j\omega)$.

Результаты расчетов коэффициентов асимметрии и эксцесса проведены для оценки ХФ дельта-коррелированных стационарных последовательностей с четырьмя законами распределений. Расчеты проведены для последовательности с нормальным законом распределения $N(0,1)$, имеющим ХФ

$$\theta(\omega) = \exp(-\omega^2/2), \quad (13)$$

и для последовательности с экспоненциальным законом распределения

$$w(x) = \exp(-x), \quad (14)$$

имеющим ХФ

$$\theta(j\omega) = 1/(1-j\lambda\omega). \quad (15)$$

Также проведены расчеты коэффициентов асимметрии и эксцесса для случайных последовательностей, имеющие бимодальные распределения.

Расчеты проведены для последовательностей, описываемых смесью нормальных распределений

$$w(x) = \frac{0,5}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{0,5}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2}\right] \quad (16)$$

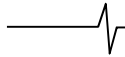
С ХФ

$$\theta(j\omega) = 0,5 \exp(-\omega^2/2) + 0,5 \exp(j\omega m - \omega^2/2)$$

С параметром $m = 5$,

$$\text{и для смеси равномерных распределений} \quad (17)$$

$$w(x) = \begin{cases} 0,5 / (b_1 - a_1), & x \in a_1, b_1, \\ 0,5 / (b_2 - a_2), & x \in a_2, b_2, \\ 0, & x \notin a_1, b_1, x \notin a_2, b_2, \end{cases} \quad (18)$$



с ХФ

$$\theta(j\omega) = \frac{0,5}{j\omega} \left\{ \frac{1}{b_1 - a_1} [\exp(j\omega b_1) - \exp(j\omega a_1)] + \frac{1}{b_2 - a_2} [\exp(j\omega b_2) - \exp(j\omega a_2)] \right\}. \quad (19)$$

Результаты расчетов коэффициентов асимметрии и эксцесса для закона распределения оценки ХФ последовательностей с указанными законами распределений приведены соответственно на рис. 1 и 2. Положено, что число отсчетов сигнала равнялось $N = 20$. Расчеты проведены для значений аргумента ХФ

$$\omega_i = 2\pi i / N, i = \overline{1, N}. \quad (20)$$

Из приведенных рисунков следует, что и коэффициент эксцесса, и коэффициент асимметрии закона распределения оценки ХФ весьма быстро уменьшаются с ростом ее аргумента, приближаясь к нулевому значению, что характерно для нормального распределения. Стоит отметить, что для оценки ХФ последовательностей с бимодальными распределениями (16, 18) коэффициенты асимметрии и эксцесса для всех значений аргумента ХФ не очень сильно отличается от нулевого значения. Поведение коэффициента эксцесса закона распределения оценки ХФ для бимодальных последовательностей с законами распределения (16, 18) очень похожи (пунктирная линия на рис. 2) и примерно равны нулевому значению.

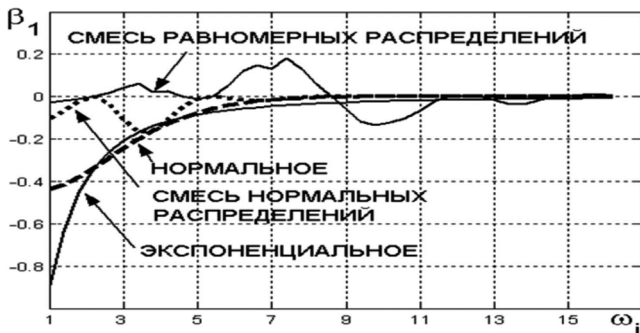


Рис. 1. Поведение коэффициента асимметрии

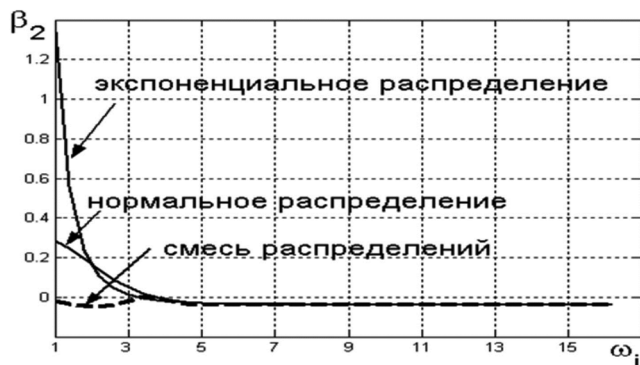


Рис.2. Поведение коэффициента эксцесса

Статистические связи между оценками ХФ при различных значениях аргумента $\omega_i = 2\pi i / N, i = 1, 2, \dots$ можно представить следующим образом, учитывая определение ковариационной функции комплексных случайных величин [4]

$$M \{ \hat{\theta}(j\omega_i), \hat{\theta}(j\omega_m) \} = M \{ \text{Re} \hat{\theta}(j\omega_i), \text{Re} \hat{\theta}(j\omega_m) \} +$$

$$+ M \{ \text{Im} \hat{\theta}(j\omega_i), \text{Im} \hat{\theta}(j\omega_m) \} + jM \{ \text{Im} \hat{\theta}(j\omega_i), \text{Re} \hat{\theta}(j\omega_m) \} - jM \{ \text{Re} \hat{\theta}(j\omega_i), \text{Im} \hat{\theta}(j\omega_m) \}. \quad (21)$$

Функция (21) зависит от статистических связей между оценками реальной и мнимой частями ХФ при различных значениях аргумента ω . Вторые смешанные центральные моменты в выражении (21) равны:

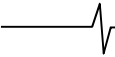
$$M \{ \text{Re} \hat{\theta}(j\omega_i), \text{Re} \hat{\theta}(j\omega_m) \} = \frac{1}{2N} \{ \text{Re} \theta[j(\omega_i - \omega_m)] + \text{Re} \theta[j(\omega_i + \omega_m)] \} - \frac{1}{N} \text{Re} \theta(j\omega_i) \text{Re} \theta(j\omega_m); \quad (22)$$

$$M \{ \text{Im} \hat{\theta}(j\omega_i), \text{Im} \hat{\theta}(j\omega_m) \} = \frac{1}{2N} \{ \text{Re} \theta[j(\omega_i - \omega_m)] - \text{Re} \theta[j(\omega_i + \omega_m)] \} - \frac{1}{N} \text{Im} \theta(j\omega_i) \text{Im} \theta(j\omega_m); \quad (23)$$

$$M \{ \text{Re} \hat{\theta}(j\omega_i), \text{Im} \hat{\theta}(j\omega_m) \} = \frac{1}{2N} \{ \text{Im} \theta[j(\omega_i - \omega_m)] + \text{Im} \theta[j(\omega_i + \omega_m)] \} - \frac{1}{N} \text{Re} \theta(j\omega_i) \text{Im} \theta(j\omega_m). \quad (24)$$

С использованием выражений (6, 22...24) рассчитаны коэффициенты корреляции между значениями оценки ХФ при разных значениях аргумента ω . Результаты расчетов, практически совпадающие с результатами моделирования, показывают, что коэффициент корреляции R между оценками ХФ, вычисленные при значениях аргумента ω_i, ω_m , весьма существенен. Например, при числе отсчетов сигнала $N = 15$ и соседних значениях аргумента ХФ коэффициент корреляции может превышать значения $|R| > 0,6-0,7$ и слабо зависит от вида закона распределения сигнала. Коэффициент корреляции увеличивается при увеличении длительности сигнала и при числе отсчетов $N \approx 30-40$ может достигать значений $|R| > 0,9-0,95$. При увеличении величины $\Delta\omega_p = \omega_i - \omega_m$ коэффициент корреляции между оценками реальной части ХФ на частотах ω_i, ω_m уменьшается, но остается достаточно значительным. Коэффициент корреляции между реальной и мнимой частями ХФ при значениях аргумента ХФ $\omega_i \neq \omega_m$ для симметричных законов распределения случайных величин относительно нулевого среднего равен нулю, что следует из выражения (24). При несимметричных законах распределения реальная и мнимая части оценки ХФ коррелированы, причем коэффициент корреляции может достигать заметных величин в зависимости от вида закона распределения исходных данных.

Поведение коэффициентов асимметрии и эксцесса позволяет в первом приближении достаточно точно (особенно для больших значений аргумента ω) аппроксимировать закон распределения оценки ХФ $b_2 = 3 -$



мерным комплексным нормальным законом распределения. Однако удобнее аппроксимировать закон распределения оценки ХФ $2N-2$ -мерным действительным нормальным распределением, представляя вектор оценки ХФ в виде

$$\hat{\theta}(j\omega) = \{\text{Re}\hat{\theta}(j\omega_2), \text{Re}\hat{\theta}(j\omega_3), \dots, \text{Re}\hat{\theta}(j\omega_N), \text{Im}\hat{\theta}(j\omega_2), \text{Im}\hat{\theta}(j\omega_3), \dots, \text{Im}\hat{\theta}(j\omega_N)\}, \quad (25)$$

с матрицей корреляций

$$K = \begin{bmatrix} K_R & K_{RJ} \\ K_{JR} & K_J \end{bmatrix}, \quad (26)$$

где K_R, K_J, K_{RJ} – соответственно матрицы корреляций реальной и мнимой части оценки ХФ и их взаимная корреляционная матрица.

Среднее значение вектора (25) определяется выражением (4).

Стоит заметить, что также удачной аппроксимация закона распределения выборочных ХФ является β – распределение, особенно если учесть, что значения оценки ХФ заключены в интервале от +1 до -1. Однако такая аппроксимация не позволяет учесть корреляционные связи между оценками ХФ, вычисленных при различных значениях ее аргумента.

Тестовые задачи и алгоритмы распознавания

Задачу сравнения вероятностей ошибочного распознавания при использовании в качестве признаков оценок ХФ сформулируем следующим образом. Пусть имеется контрольная выборка $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N\}$ длиной N отсчетов. Необходимо принять решение, к какому из двух классов $S_l, l=1,2$ она принадлежит. Сравнение вероятностей ошибочного распознавания проведем, используя в качестве признаков отсчеты наблюдаемых сигналов и оценки их ХФ.

В качестве тестовых задач будем использовать распознавание нормально и экспоненциально распределенных последовательностей [8], а также распознавание последовательностей с бимодальными законами распределений.

1. Распознавание нормальных совокупностей с нулевым средним значением и различными дисперсиями. Решающее правило проверки статистических гипотез, реализующее критерий максимального правдоподобия, имеет вид [4]:

$$\ln \Lambda(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^2 > \frac{2D_1 D_2}{D_1 - D_2} \ln \sqrt{\frac{D_1}{D_2}}, \quad (27)$$

где D_1 и D_2 – дисперсии распознаваемых сигналов; $x_i, i = \overline{1, N}$ – отсчеты распознаваемых сигналов. При моделировании принято, что $D_1 = 1, D_2 = 2,5$.

2. Распознавание дельта-коррелированных последовательностей, подчиняющихся экспоненциальному распределению с различными параметрами. Решающее правило для распознавания таких сигналов, также

реализующий критерий максимального правдоподобия, имеет вид [4]:

$$\ln \Lambda(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i > \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad (28)$$

где λ_1 и λ_2 – параметры распределений распознаваемых сигналов. При моделировании принято, что $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,5$.

3. Распознавание дельта-коррелированных последовательностей, описываемых смесью равномерных распределений (18).

Для первого класса сигналов S_1 выбраны последовательности с параметрами распределения $a_{11} = 0, b_{11} = 1, a_{12} = 2, b_{12} = 3$.

Для второго класса сигналов S_2 параметры распределения выбраны следующие: $a_{21} = 0,5, b_{21} = 1,5, a_{22} = 2,5, b_{22} = 3,5$.

Решающее правило для распознавания таких сигналов основано на логических операциях. Если хотя бы один отсчет распознаваемого сигнала ξ длительностью N отсчетов попадает в интервалы (a_{11}, a_{21}) или (a_{12}, a_{22}) , то принимается решение в пользу гипотезы S_1 . Если хотя бы один отсчет сигнала ξ попадает в интервалы (b_{11}, b_{21}) или (b_{12}, b_{22}) , то решение принимается в пользу гипотезы S_2 . Очевидно, что с увеличением длительности реализации вероятности попадания в хотя бы одного отсчета сигнала указанные интервалы увеличивается. Ошибочное решение происходит тогда, когда все отсчеты распознаваемого сигнала попадают в интервалы (a_{21}, b_{11}) или (a_{22}, b_{12}) . С ростом числа N эта вероятность уменьшается.

4. Распознавание последовательностей, описываемых смесью нормальных распределений (19). Решающее правило для распознавания таких сигналов, реализующий критерий максимального правдоподобия, представим в виде:

$$\ln \Lambda(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^N \ln \left\{ \exp \left[-\left(\frac{\xi_i - M_{11}}{2D} \right)^2 \right] + \exp \left[-\left(\frac{\xi_i - M_{12}}{2D} \right)^2 \right] \right\}}{\sum_{i=1}^N \ln \left\{ \exp \left[-\left(\frac{\xi_i - M_{21}}{2D} \right)^2 \right] + \exp \left[-\left(\frac{\xi_i - M_{22}}{2D} \right)^2 \right] \right\}} > 1. \quad (29)$$

В качестве тестовых задач выбраны сигналы с единичной дисперсией. Для первого класса сигналов параметры $M_{11} = 2, M_{12} = -2$. Для второго класса $M_{21} = 3, M_{22} = -3$.

5. При использовании в качестве признаков выборочных ХФ использовано решающее правило [1], также, как и предыдущие, реализующие критерий максимального правдоподобия:

$$\ln \Lambda[y] = \sum_{i=2}^{N-2} \sum_{m=2}^{N-2} [-K_1^{im} (y_i - m_{1i})] (y_m - m_{1m}) +$$

$$+ K_2^{im} (y_i - m_{2i}) K_1^{im} (y_m - m_{2i}) > \ln \frac{|K_2^{-1}|}{|K_1^{-1}|}, \quad (30)$$

где $y_i = \text{Re} \hat{\theta}(j\omega_i)$, $i = \overline{2, N}$; $y_i = \text{Im} \hat{\theta}(j\omega_i)$, $i = \overline{N+1, 2N-2}$; m_{1i} и m_{2i} – средние значения оценок ХФ на i -й частоте; K^{-1} – матрица, обратная корреляционной матрице; K^{im} – элемент обратной корреляционной матрицы.

Результаты моделирования

Результаты моделирования приведены на рис. 3, 4, на которых показаны графики вероятности ошибочного распознавания ε в зависимости от длительности распознаваемых сигналов (числа отсчетов N). На рис. 3 приведены графики, полученные при распознавании нормально и экспоненциально распределенных случайных последовательностей с параметрами, указанными выше.

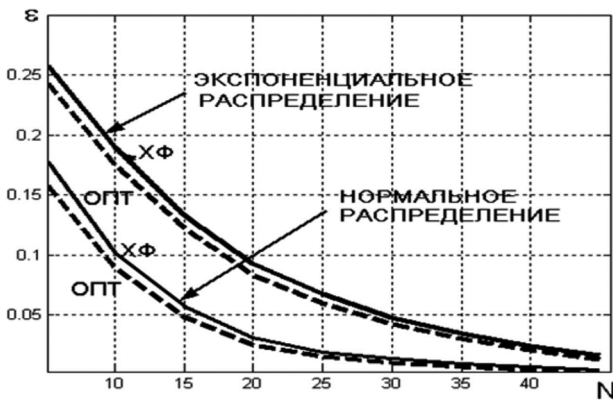


Рис. 3. Зависимость вероятностей ошибочного распознавания ε от длительности реализации

Сплошные линии соответствуют вероятностям ошибочного распознавания, которые обеспечиваются оптимальным решающим правилом. При моделировании в решающие правила (27, 28, 30) подставлялись оценки их параметров, полученные при объеме обучающих выборок в 2000 реализаций. Объем экзаменуемых выборок оставлял также 2000 реализаций. Такой объем выборок позволяет пренебречь разбросом данных, полученных при моделировании, так что нет необходимости в построении доверительных интервалов. Из рис. 3 видно, что при использовании в качестве признаков выборочных ХФ вероятность ошибочного распознавания несколько увеличивается, что можно объяснить неточностью аппроксимации истинного закона распределений ХФ нормальным. Однако при использовании в качестве признаков выборочных ХФ позволяет отказаться от оценки закона распределения распознаваемых сигналов.

Набольший интерес вызывает распознавание последовательностей с бимодальными законами распределений. Аппроксимация таких законов распределения теоретическими вызывает, как известно, наибольшие затруднения. Графики, показанные пунктиром на рис. 4, получены в предположении, что параметры бимодаль-

ных распределений, и как следствие, параметры оптимальных решающих правил (3, 4) известны. То есть пунктирные графики на рис. 4 соответствуют случаю заданного классификатора. Сплошные линии соответствуют распознаванию при выборе в качестве признаков выборочных ХФ. Параметры решающего правила (30) оценивались на этапе обучения. Объемы обучающей и экзаменуемых выборок составлял также 2000 реализаций.

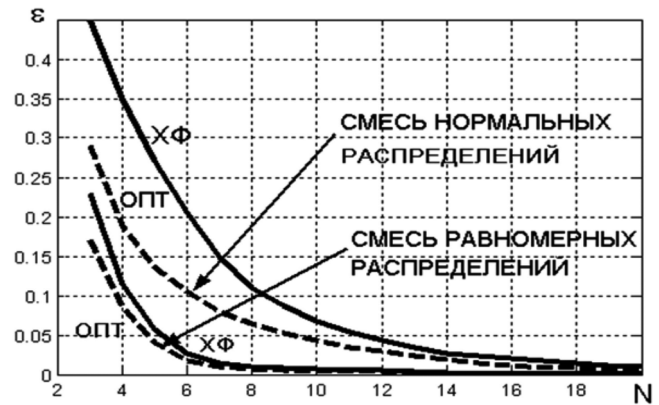
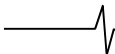


Рис. 4. Зависимость вероятностей ошибочного распознавания ε от длительности реализации для сигналов с бимодальными законами распределений

Из рис. 4 видно, что при увеличении длительности сигнала вероятности ошибочного распознавания при использовании в качестве признаков выборочных ХФ очень быстро стремятся к вероятностям, обеспечиваемым оптимальными алгоритмами. При малых длительностях распознаваемых сигналов заметен определенный проигрыш. Объясняется он, как и для графиков на рис. 3, неточностью аппроксимации закона распределения выборочной ХФ нормальным законом распределения. Из графиков на рис.4 видно, что при распознавании сигналов, описываемых смесью равномерных распределений, разница при использовании оптимального алгоритма и алгоритма (30) очень быстро становится незначительной. Это можно объяснить более быстрой сходимостью закона распределения оценки ХФ к нормальному для смеси равномерных распределений, то есть для сумм вида $\sum_i \exp(j\omega \xi_i)$ для равномерно распределенных случайных величин ξ [9].

Заключение

Использование в качестве признаков выборочных ХФ позволяет существенно упростить процедуру распознавания случайных сигналов, поскольку закон распределения оценки ХФ приближается к нормальному, независимо от вида закона распределения исходных данных. Особенно это заметно с ростом значения аргумента ХФ. Поэтому при непараметрической априорной неопределенности нет необходимости в оценке закона распределения признаков, выбранных для распознавания, что, особенно при многомодальных распределениях, является достаточно сложной задачей. При использовании в качестве признаков выборочной ХФ достаточно произвести оценку математического ожидания, дисперсии и матрицы корреляций по обучающей выбор-



ке. Сравнение вероятностей ошибочного распознавания на основе критерия максимального правдоподобия показало, что использование в качестве признаков выборочных ХФ приводит к некоторому ухудшению эффективности распознавания, что можно объяснить отличием истинного закона распределения оценки ХФ от нормального. Однако проигрыш в вероятностях распознавания быстро уменьшается при увеличении длительности распознаваемых сигналов и становится несущественным. При использовании в качестве признаков выборочных ХФ возрастает число вычислительных операций, поскольку приходится определять оценку ХФ. Однако, при распознавании сигналов, представленных короткими реализациями, это обстоятельство не является существенным. К тому же может, за счет более простой процедуры обучения, уменьшиться общее число вычислительных операций, необходимых для реализации алгоритмов распознавания.

Литература

1. Фомин Я.А., Тарловский Г.Р. Статистическая теория распознавания образов. – М.: Радио и связь, 1986, – 264 с.
2. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. – М.: Сов. радио, 1977, – 432 с.
3. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов. Пер. с англ. под ред. А.А. Дорофеева. – М.: Наука, 1979, – 367 с.
4. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Сов. радио, 1974-1976, кн. 1-3. – кн. 1 – 552 с., кн.2 – 392 с., кн.3 – 288 с.
5. Вешкурцев Ю.М. Прикладной анализ характеристической функции случайных процессов. – М.: Радио и связь, 2003, – 201 с.
6. Паршин В.С. Оценивание характеристических функций параметров импульсных случайных процессов // Изв. высш. учебн. заведений. Радиоэлектроника – 1989. – Т.32. – № 3. – С. 54-55.
7. Паршин В.С. Оценивание спектральной плотности мощности импульсных случайных процессов с помощью выборочных характеристических функций // Цифровая обработка сигналов – 2016. – № 4. – С. 9-13.
8. Паршин В.С., Шумилов П.А. Использование в качестве признаков для распознавания случайных сигналов выборочных характеристических функций. DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2017. т.7. № 3. С. 26-30.
9. Кокс Д., Льюис П. Статистический анализ последовательности событий. М.: Мир, 1969, – 312 с.

УДК 621.391

СИНТЕЗ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА С ПРОИЗВОЛЬНО ЗАДАННОЙ СКОРОСТЬЮ СПАДА ЛЕПЕСТКОВ СПЕКТРА И МИНИМАЛЬНЫМ УРОВНЕМ МАКСИМАЛЬНОГО БОКОВОГО ЛЕПЕСТКА

*Зайцев Г.В., д.т.н., зам. начальника СКБ ПАО «НПО «Алмаз», e-mail: gennady-zaytsev@yandex.ru;
Хзмальян А.Д., д.ф.-м.н., главный специалист направления ПАО «НПО «Алмаз».*

SYNTHESIS OF WINDOW FUNCTIONS FOR HARMONIC ANALYSIS WITH ARBITRARY SIDELobe FALLOFF RATE AND MINIMUM LEVEL OF THE HIGHEST SIDELobe

Zaytsev G.V., Khzmalyan A.D.

Application of window functions is an inherent part of spectral analysis algorithms. Sidelobe falloff rate of the known functions is multiple of 6 decibel per octave. The paper presents a new type of window functions with an arbitrary given falloff rate. Representation of these functions is simple enough for implementation in real-time embedded systems. A synthesis algorithm for the optimal functions that meet the minimax criterion for the sidelobe level is developed. Optimal functions with falloff rates 9, 15, and 21 decibel per octave and highest sidelobe level down to minus 200 dB are synthesized and described and their parameters are tabulated.

Key words: digital signal processing, falloff rate, harmonic analysis, minimax criterion, window function.

Ключевые слова: весовая (оконная) функция, минимаксный критерий, скорость спада лепестков, спектральный анализ, цифровая обработка сигналов.

Введение

Цифровой спектральный анализ сигналов, выполняемый, как правило, с помощью алгоритмов дискретного преобразования Фурье, широко используется в различных областях науки и техники. При этом перед вычислением спектра анализируемый сигнал умножается на действительную положительную функцию, называемую весовой, или оконной. Обзор известных весовых функций можно найти в [1, 2].

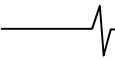
Весовая функция служит для снижения эффекта размывания спектральных линий [1]. Для этого спектр весовой функции должен иметь малую ширину главного лепестка и низкий уровень боковых лепестков. Поскольку эти параметры невозможно сделать малыми одновременно, при выборе весовой функции необходимо искать наиболее подходящий баланс между ними. Решению этой задачи при тех или иных ограничениях посвящены многочисленные работы. Однако асимптотическая скорость спада дальних лепестков спектра у известных весовых функций принимает только дискретные значения, кратные 6 децибелам на октаву [1, 2]. Весовых функций с промежуточными скоростями спада, насколько известно авторам, не описано.

В настоящей работе предложено семейство весовых функций, обеспечивающих произвольно заданную скорость спада лепестков спектра и простую реализацию. Разработан алгоритм синтеза оптимальных весовых функций, который минимизирует уровень максимального бокового лепестка в заданной области частот вне главного лепестка, а параметры полученных функций

Применение весовых функций является неотъемлемой частью алгоритмов цифрового спектрального анализа. Известные весовые функции имеют скорость спада боковых лепестков спектра, кратную 6 децибелам на октаву (дБ/окт.). В настоящей работе предложен способ построения весовых функций с произвольно заданной скоростью спада лепестков. Функции имеют простой вид, обеспечивающий возможность вычисления в реальном масштабе времени. Для предложенных функций разработан метод оптимизации по критерию минимума максимального бокового лепестка на заданном отрезке частотной оси вне главного лепестка. Синтезированы оптимальные весовые функции со скоростями спада лепестков 9, 15 и 21 дБ/окт. и уровнем максимального лепестка до минус 200 дБ, и их параметры табулированы.

табулированы. Работа направлена на приложения, в которых необходимы высокий уровень подавления боковых лепестков при малом расширении главного лепестка и возможность вычисления функции в реальном масштабе времени.

Введем необходимые обозначения. Пусть анализируемый сигнал представлен N временными отсчетами, взятыми с шагом δ . Для упрощения формул удобно вместо размерных величин времени t_{abs} и частоты f_{abs} использовать безразмерные t и f : $t = t_{\text{abs}}/\delta$, $f = f_{\text{abs}}\delta$. Начало временной оси расположим в центре между крайними отсчетами. Тогда моменты выборок равны $t_p = -0,5(N-1) + p$, $p = 0, 1, \dots, N-1$. Спектр такого сигнала периодичен с периодом 1, и его достаточно анализировать на периоде $f \in [-0,5, 0,5]$. Для расчета спектра взвешенного дискретного сигнала необходимы только отсчеты весовой функции в точках t_p , однако при теоретическом анализе и практическом применении весовую функцию $w(t)$ удобно рассматривать как непрерывную, а необходимые дискретные отсчеты – как значения этой непрерывной функции в точках t_p .



Спектр $W(f)$ непрерывной функции $w(t)$, используемой при гармоническом анализе непрерывного сигнала, определяется интегральным преобразованием Фурье:

$$W_c(f) = \int_{-N/2}^{N/2} w(t) \exp(-j2\pi t f) dt, \quad -\infty < f < \infty, \quad (1)$$

а в дискретном случае – формулой дискретного по времени преобразования Фурье [3]

$$W(f) = \sum_{p=0}^{N-1} w(t_p) \exp(-j2\pi t_p f), \quad f \in [-0,5; 0,5]. \quad (2)$$

Спектры (1) и (2) связаны известным соотношением [3]:

$$W(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_c(f+k). \quad (3)$$

Из этой формулы следует, что характеристики спектров (1) и (2) аналогичны.

Так как в настоящей работе рассматриваются весовые функции для цифровой обработки, то при расчете их параметров будет использоваться формула (2) за исключением следующего параметра, изначально определенного для непрерывных функций. Асимптотическая скорость спада боковых лепестков спектра $W(f)$ определяется как величина V снижения максимума модуля лепестков при увеличении частоты вдвое и измеряется в децибелах на октаву (сокращенно дБ/окт.). Строго говоря, этот параметр характеризует непрерывную функцию $w(t)$, однако используется и для дискретных весовых функций, когда число выборок N велико. Для краткости слово «асимптотическая» в дальнейшем опускается.

Базисные функции

Для обеспечения простоты вычисления представим рассматриваемые весовые функции в виде линейной комбинации небольшого числа m базисных функций $\phi(p_k, t)$:

$$w(\mathbf{b}, t) = \sum_{k=0}^m b_k \phi(p_k, t), \quad -0,5N \leq t \leq 0,5N, \quad (4)$$

где b_0, b_1, \dots, b_m – коэффициенты, образующие вектор \mathbf{b} , являющийся аргументом весовой функции, а p_k – параметр базисной функции.

Наиболее часто в качестве базисных функций используются тригонометрические функции ряда Фурье, т.е. косинусоидальные функции, у которых на интервале наблюдения укладывается целое число периодов. При этом высокие характеристики весовых функций можно получить при малом порядке m [1], что обеспечивает простоту вычисления. Уже для функций порядков 1–3 можно получить уровень боковых лепестков, достаточно низкий для большинства приложений. Многие классические весовые функции имеют указанное представление [1, 2, 4, 5], и именно такие функции наиболее востребованы на практике. Однако при этом возможные скорости спада лепестков ограничены величинами, кратными 6 дБ/окт.

Базисные функции, предлагаемые в настоящей работе, имеют следующий вид:

$$\phi(p, t) = \cos^p(\pi t / N), \quad -0,5N \leq t \leq 0,5N, \quad (5)$$

где $p \geq 0$ – неотрицательное действительное число. В области определения весовой функции $|t| \leq 0,5N$ укла-

дывается половина периода косинуса (5). Для целых p функции вида (5) являются одним из классических примеров весовых функций [1], однако для нецелых p такие функции не анализировались.

Рассмотрим свойства спектра (1) функции (5). Так как функция (5) действительна и симметрична, то ее спектр можно записать в виде

$$\Phi_c(p, f) = \int_{-N/2}^{N/2} \cos^p(\pi t / N) \cos(2\pi t f) dt, \quad -\infty < f < \infty. \quad (6)$$

Эта функция симметрична относительно нуля частот, поэтому достаточно проанализировать ее на интервале $0 \leq f < \infty$.

Интеграл (6) согласно [6], № 332.9с, (также [7], № 3.631.9 и № 8.384.1) при $p > -1$ равен

$$\Phi_c(p, f) = \frac{N \Gamma(p+1)}{2^p \Gamma[0,5(p+2Nf+2)] \Gamma[0,5(p-2Nf+2)]}, \quad (7)$$

где символ $\Gamma(\dots)$ означает гамма-функцию. Преобразуя вторую гамма-функцию в знаменателе (7) с помощью известного соотношения $[\Gamma(0,5-x)]^{-1} = \Gamma(0,5+x) \times \cos(\pi x) / \pi$ [7], № 8.334.2, при $x = 0,5(2Nf-p-1)$, получаем выражение для спектра базисной функции (5):

$$\Phi_c(p, f) = \frac{N \Gamma(p+1)}{2^p \pi} \times \frac{\Gamma[0,5(2Nf-p)]}{\Gamma[0,5(2Nf+p+2)]} \cos[0,5\pi(2Nf-p-1)]. \quad (8)$$

Формулу (8) можно трактовать как произведение осциллирующего множителя (косинуса), описывающего лепестки спектра, на их огибающую. Оценим асимптотическое поведение спектра (8) при $f \rightarrow \infty$. В силу соотношения $\lim_{z \rightarrow \infty} [\Gamma(z+a) / \Gamma(z)] = z^a$ [7], № 8.328.2, полагая $z = 0,5(2Nf+p+2)$ и $a = -(p+1)$, получаем асимптотическое равенство

$$\Phi_c(p, f) \sim (2N)^{-p} \pi^{-1} \Gamma(p+1) \times \cos[0,5\pi(2Nf-p-1)] f^{-(p+1)}, \quad (9)$$

Таким образом, при $f \rightarrow \infty$ спектр (6) имеет асимптотическую оценку

$$\Phi_c(p, f) = O(f^{-(p+1)}). \quad (10)$$

Из (10) следует, что боковые лепестки спектра базисной функции (5) спадают со скоростью $V = 6(p+1)$ дБ/окт. Выбор степени p в соответствии с соотношением $p = V/6 - 1$ позволяет получить произвольно заданное действительное значение скорости спада $V \geq 6$ дБ/окт.

Выражение (8) определяет также нули спектра базисной функции. Они находятся в тех нулях функции косинуса, для которых аргумент $0,5(2Nf-p)$ гамма-функции положителен, т.е. при $0,5\pi(2Nf-p-1) = \pi/2 + k\pi$, $k = 0, 1, \dots$. Следовательно, координаты нулей равны:

$$f_z = (0,5p+k+1) / N, \quad k = 0, 1, \dots \quad (11)$$

При заданном p первый ноль имеет место при $f_z = 0,5(p+1) / N$, а далее нули следуют периодически с периодом $1/N$.

Весовая функция (4) содержит несколько базисных функций вида (5). Для эффективных весовых функций лепестки одной базисной функции компенсируются ле-

пестками другой. Очевидно, для хорошей компенсации целесообразно обеспечить совпадение нулей спектров базисных функций в области боковых лепестков. Из (11) следует, что это достигается, если разности степеней p_0, p_1, \dots, p_m базисных функций, используемых в (4), равны целым четным числам:

$$p_i - p_j = 2k, \quad i > j, k - \text{целое.} \quad (12)$$

При этом весовая функция (4) приобретает вид

$$w(\mathbf{b}, t) = \cos^\mu(\pi t / N) \sum_{k=0}^m b_k \cos^{2k}(\pi t / N), \quad (13)$$

$$-0,5N \leq t \leq 0,5N.$$

Далее будем считать, что общий косинусный множитель в этой формуле вынесен за знак суммы, т.е. $b_0 \neq 0$. Тогда скорость спада боковых лепестков спектра этой функции составляет $V = 6(\mu + 1)$ дБ/окт.

Формулу (13) можно трактовать как представление весовой функции в виде произведения гладкой функции в форме начального отрезка обобщенного ряда Фурье и множителя перед суммой, определяющего порядок нуля функции на краях ее области определения. Именно порядок нуля функции (степень μ этого множителя) определяет скорость убывания лепестков спектра, а не порядок наивысшей непрерывной производной, как это обычно трактуется в литературе. Для целых степеней μ оба способа оценки совпадают.

Заметим, что вид (13) весовых функций определен, исходя из свойств спектра непрерывной весовой функции. Спектр дискретной функции может быть получен из спектра непрерывной с помощью наложения отрезков последнего по формуле (3). Из формул (3) и (8) следует, что для целочисленных μ нули дискретного спектра базисных функций совпадают с соответствующими нулями непрерывного спектра (11). В случае нецелого параметра μ положения нулей несколько изменяются. Численные оценки показывают, что эти изменения, в основном, происходят в области последних двух лепестков у границ однозначного интервала частот. В области первых, наибольших лепестков смещение нулей незначительно для рассматриваемых задач. Поэтому для дискретного случая положение нулей также можно приближенно оценивать по формуле (11), соотношение (12) по-прежнему обеспечивает наилучшее согласование положения нулей, а ухудшение характеристик получаемых функций практически не наблюдается.

Вычисление функции вида (13) требует достаточно малого объема вычислений. Это обусловлено малым числом членов m в сумме (13) и одинаковым аргументом косинуса для всех слагаемых. Поэтому вычисление весовой функции вида (13) может быть реализовано в реальном масштабе времени на современных процессорах обработки сигналов.

Функции с целыми степенями

Рассмотрим частные случаи формулы (13).

1. Степень множителя перед суммой в (13) – целое четное число: $\mu = 2\eta$, где η – целое:

$$w(\mathbf{b}, t) = \sum_{k=0}^m b_k \cos^{2(k+\eta)}(\pi t / N), \quad -0,5N \leq t \leq 0,5N. \quad (14)$$

Функцию $\cos^{2r}(\pi t / N)$ при целом r можно преобразовать в линейную комбинацию тригонометрических функций кратных аргументов $\cos(2\pi i t / N)$, $i = 0, 1, \dots, r$ по известной формуле:

$$\begin{aligned} \cos^{2r}(\pi t / N) &= \\ &= 2^{-2r} \left\{ C_{2r}^r + \sum_{i=0}^{r-1} 2 C_{2r}^i \cos[2(r-i)\pi t / N] \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

(см. [7], № 1.320.5), где C_u^v – биномиальные коэффициенты.

Подставляя (15) в (14), преобразуем весовую функцию (12) к традиционному виду

$$w(t) = \sum_{k=0}^M a_k \cos[2\pi k t / N], \quad (16)$$

где $M = m + \eta$, а коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_M являются линейными комбинациями коэффициентов b_0, b_1, \dots, b_m .

Функция (16) представляет собой начальный отрезок ряда Фурье и многие классические весовые функции имеют указанный вид [1, 2]. В работах авторов [8-12] для функций вида (14), (16) решена задача синтеза весовых функций с минимальным уровнем максимального бокового лепестка в заданной области частот вне главного лепестка.

2. Степень множителя перед суммой в (13) – нечетное целое число: $\mu = 2\eta + 1$, η – целое:

$$w(\mathbf{b}, t) = \sum_{k=0}^m b_k \cos^{2(k+\eta)+1}(\pi t / N), \quad -0,5N \leq t \leq 0,5N. \quad (17)$$

Функцию $\cos^{2r+1}(\pi t / N)$ в (17) можно преобразовать в линейную комбинацию гармонических функций $\cos[(2i+1)\pi t / N]$, $i = 0, 1, \dots, r$, с помощью известной формулы [7], № 1.320.7:

$$\begin{aligned} \cos^{2r+1}(\pi t / N) &= \\ &= 2^{-2r} \sum_{i=0}^r 2 C_{2r+1}^i \cos[(2(r-i)+1)\pi t / N] \}. \end{aligned} \quad (18)$$

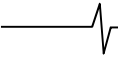
С помощью этого соотношения (17) может быть преобразовано к виду

$$w(t) = \sum_{k=0}^M a_k \cos[(2k+1)\pi t / N]. \quad (19)$$

где $M = m + \eta$, а коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_M являются линейными комбинациями коэффициентов b_0, b_1, \dots, b_m .

Вычисление весовых функций с помощью представлений (14) и (17) проще по сравнению с представлениями (16) и (19), соответственно, поскольку, во-первых, количество слагаемых в (14) и (17) меньше, чем в (16) и (19), особенно при большой скорости спада лепестков (большом η). Во-вторых, формулы (14) и (17) требуют вычисления только одной тригонометрической функции, а в (16) и (19) необходимо вычислять M (или $M + 1$) таких функций.

Функции (19) представляют собой начальный отрезок обобщенного ряда Фурье по системе ортогональных гармонических функций $\cos[(2k+1)\pi t / N]$, частоты которых располагаются посередине между частотами стандартного ряда (16). Задача синтеза весовых функций с минимальным уровнем максимального бокового лепестка для функций вида (17), (19) решена в работах авторов [10, 12].



Весовые функции могут применяться двумя способами: путем умножения сигнала на весовую функцию во временной области или путем свертки их спектров в частотной области. Для обоих случаев целого μ при применении во временной области представления (14) и (17) предпочтительнее по объему вычислений. Для частотной области более эффективны представления (16) и (19), так как в этом случае использование весовой функции сводится к нерекурсивной цифровой фильтрации с малым числом $2M$ ненулевых отсчетов фильтра [8, 12]. Это свойство является существенным преимуществом рассмотренных в данном разделе функций с целочисленными показателями.

Минимаксная задача

Перепишем формулу (2) для вычисления спектра, включив в функцию в качестве аргумента вектор коэффициентов и используя симметрию весовой функции

$$W(\mathbf{b}, f) = \sum_{p=0}^{N-1} w(\mathbf{b}, t_p) \cos(2\pi t_p f), \quad f \in [-0,5; 0,5]. \quad (20)$$

Подставляя сюда из (11) выражение для весовой функции, получаем

$$W(\mathbf{b}, f) = \sum_{k=0}^m b_k \Phi(\mu + 2k, f), \quad f \in [-0,5; 0,5], \quad (21)$$

где $\Phi(\mu + 2k, f)$ – дискретный спектр базисной функции $\phi(p_k = \mu + 2k, t)$:

$$\Phi(\mu + 2k, f) = \sum_{p=0}^{N-1} \varphi(p_k = \mu + 2k, t_p) \cos(2\pi t_p f).$$

Пусть W_{\max} – максимальное значение модуля спектра (21). Определим функцию качества $\varphi(\mathbf{b})$ как максимальное значение нормированного модуля спектра $W_{\max}(\mathbf{b}, f) / W_{\max}$ вне области $[-\beta, \beta]$, где β – задаваемая максимально допустимая полуширина главного лепестка по уровню максимального бокового лепестка:

$$\varphi(\mathbf{b}) = \max_{\beta \leq |f| \leq 0,5} |W(\mathbf{b}, f) / W_{\max}|. \quad (22)$$

Построение оптимальной весовой функции заключается в отыскании вектора коэффициентов \mathbf{b} , минимизирующего функцию $\varphi(\mathbf{b})$, т. е. в решении задачи

$$\varphi(\mathbf{b}) \rightarrow \min_{\mathbf{b}}. \quad (23)$$

Поставленная задача относится к задачам чебышевского приближения [13]. Известны отдельные функции, являющиеся её решениями: функции Хэмминга [1], Наталла [4], Альбрехта [5]. В статьях [8-12] разработан регулярный метод синтеза, позволяющий получить для функций вида (14), (16), (17), (19) континуальное семейство оптимальных функций с заданной скоростью спада боковых лепестков вида $V = 6k$, $k = 1, 2, \dots$, и приведены сводки оптимальных функций. В настоящем разделе этот метод обобщается на случай функций вида (13).

Рассмотрим свойства оптимальной функции, являющейся решением задачи (22)-(23). Во-первых, максимум спектра (20) достигается при $f = 0$. Действительно, в выражении (20) для спектра суммируются неотрицательные числа $w(\mathbf{b}, t_p)$ с весом $\cos(2\pi t_p f)$. Очевидно, максимум достигается, если все веса равны единице, что реализуется только при $f = 0$.

Во-вторых, умножение всех коэффициентов b_0, b_1, \dots, b_m на фиксированный множитель не изменяет функцию качества (22). Для обеспечения единственности решения задачи зафиксируем масштаб функции путем фиксации максимального значения спектра $W_{\max} = W(\mathbf{b}, 0) = 1$. Из (21) следует, что это эквивалентно условию

$$\sum_{k=0}^m d_k b_k = 1, \quad (24)$$

где $d_k = \Phi(\mu + 2k, 0)$ – постоянные положительные коэффициенты.

Тогда функция качества (22), нелинейная относительно коэффициентов b_0, b_1, \dots, b_m , может быть переписана в линейном виде с линейным условием (24):

$$\varphi(\mathbf{b}) = \max_{\substack{\beta \leq |f| \leq 0,5 \\ \sum_{k=0}^m d_k b_k = 1}} |W(\mathbf{b}, f)|. \quad (25)$$

При выполнении условия (24) один из коэффициентов, например, последний, может быть выражен в виде линейной комбинации других:

$$b_m = (1 - \sum_{k=0}^{m-1} d_k b_k) / d_m. \quad (26)$$

а первые m являются независимыми.

Подставляя (26) в (21), получим выражение, описывающее спектр весовой функции через независимые коэффициенты:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{b}, f) \Big|_{\text{при условии (24)}} &= \\ &= W_0(\mathbf{b}_s, f) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k u_k(f) + u_m(f), \end{aligned} \quad (27)$$

где $\mathbf{b}_s = (b_0, b_1, \dots, b_{m-1})$ – усеченный вектор, состоящий из независимых коэффициентов, а функции $u_k(f)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} u_m(f) &= \Phi(\mu + 2m, f) / d_m = \\ &= \Phi(\mu + 2m, f) / \Phi(\mu + 2m, 0), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} u_k(f) &= \Phi(\mu + 2k, f) - (d_k / d_m) \Phi(\mu + 2m, f), \\ k &= 0, 1, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (29)$$

Теперь задача минимизации (22)-(23) может быть переписана с уменьшением на единицу размерности вектора коэффициентов:

$$\varphi(\mathbf{b}_s) = \max_{\beta \leq |f| \leq 0,5} |W_0(\mathbf{b}_s, f)|, \quad \varphi(\mathbf{b}_s) \rightarrow \min_{\mathbf{b}_s}, \quad (30)$$

где функция $W_0(\mathbf{b}_s, f)$ определяется формулой (27). В такой формулировке задача приведена к стандартному виду, и можно воспользоваться общей теорией линейных чебышевских приближений [13], где, в частности, показано, что решение задачи существует и единственно.

Используемый в данной работе подход к решению этой задачи состоит в непосредственной минимизации функции $\varphi(\mathbf{b}_s)$ (30) с помощью численных методов. Для выбора эффективного алгоритма поиска экстремума необходимо исследовать характер поведения оптимизируемой функции.

Покажем, что функция качества $\varphi(\mathbf{b}_s)$, определяемая формулами (27), (30), является выпуклой функцией в пространстве коэффициентов, т. е. для любых векторов из m коэффициентов $\mathbf{b}^{(1)} = (b_0^{(1)}, b_1^{(1)}, \dots, b_{m-1}^{(1)})$ и

$\mathbf{b}^{(2)} = (b_0^{(2)}, b_1^{(2)}, \dots, b_{m-1}^{(2)})$ справедливо соотношение

$$\phi[\lambda \mathbf{b}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{b}^{(2)}] \leq \lambda \phi(\mathbf{b}^{(1)}) + (1-\lambda)\phi(\mathbf{b}^{(2)}), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Для доказательства положим $b_m^{(1)} = b_m^{(2)} \equiv 1$, при этом правая часть (27) запишется в более компактном виде

$\sum_{k=0}^m b_k^{(i)} u_k(f)$, $i=1,2$. В силу линейности этой функции

по коэффициентам b_k , $k=0, 1, \dots, m$ и учитывая, что модуль суммы не превосходит суммы модулей слагаемых, имеем

$$\phi[\lambda \mathbf{b}^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{b}^{(2)}] =$$

$$= \max_{\beta \leq |f| \leq 0,5} \left| \lambda \sum_{k=0}^m b_k^{(1)} u_k(f) + (1-\lambda) \sum_{k=0}^m b_k^{(2)} u_k(f) \right| \leq$$

$$\leq \max_{\beta \leq |f| \leq 0,5} \left\{ \lambda \left| \sum_{k=0}^m b_k^{(1)} u_k(f) \right| + (1-\lambda) \left| \sum_{k=0}^m b_k^{(2)} u_k(f) \right| \right\} \leq$$

$$\leq \lambda \max_{\beta \leq |f| \leq 0,5} \left| \sum_{k=0}^m b_k^{(1)} u_k(f) \right| + (1-\lambda) \max_{\beta \leq |f| \leq 0,5} \left| \sum_{k=0}^m b_k^{(2)} u_k(f) \right| =$$

$$= \lambda \phi(\mathbf{b}^{(1)}) + (1-\lambda)\phi(\mathbf{b}^{(2)}),$$

что и требовалось доказать.

Из выпуклости следует, что любой сходящийся алгоритм поиска приведет к глобальному минимуму. Однако оптимизируемая функция имеет довольно сложное поведение. Анализ функции показывает, что, с одной стороны, она имеет регулярные области, в которых превалирует один из лепестков. В таких областях функция качества (30) определяется величиной этого лепестка и является дифференцируемой. С другой стороны, там, где происходит перескок преваляирования с одного лепестка на другой, эти области соприкасаются по линиям (областям), в которых функция имеет излом и является недифференцируемой. В результате рельеф функции качества имеет вид системы оврагов, на пологом дне которых, где и следует искать минимум, она недифференцируема, причём размерность овражной области может достигать $m-1$. Это делает неэффективным непосредственное применение традиционных численных методов минимизации, основанных на вычислении градиента, для поиска экстремума функции (30).

Алгоритмы, используемые авторами, описаны в работах [8, 12]. Основой первого из них являются элементы случайного поиска, второго – итерационное нахождение минимумов в пространстве, натянутом на $m-1$ векторов, направленных вдоль dna овражной области.

Неотъемлемой частью обоих алгоритмов является проверка полученного решения на оптимальность, гарантирующая приближение к глобальному минимуму с заданной точностью. Эта проверка производится с использованием общей теории линейных чебышевских приближений [13], согласно которой точка $\tilde{\mathbf{b}}_s$ является точкой глобального минимума функции $\phi(\mathbf{b}_s)$ (30) тогда и только тогда, когда существует $l \leq m+1$ точек f_1, f_2, \dots, f_l на отрезке $[\beta, 0,5]$, и ненулевые числа c_1, c_2, \dots, c_l , для которых выполняются соотношения:

$$\sum_{k=1}^l c_k u_j(f_k) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (31)$$

$$W(\tilde{\mathbf{b}}_s, f_k) \equiv \phi(\tilde{\mathbf{b}}_s) \cdot \text{sign } c_k, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (32)$$

Из условия (32) следует, что в указанных точках

функция $W(\tilde{\mathbf{b}}_s, f)$ имеет максимальные и равные по модулю экстремумы. Заметим также, что случай $l < m+1$ является довольно редким: для всех синтезированных функций, описанных ниже, $l = m+1$.

Из условий (31), (32) следует нижняя граница для величины минимума $\phi(\tilde{\mathbf{b}}_s)$ при $l = m+1$ [13]:

$$\phi(\tilde{\mathbf{b}}_s) \geq \left| \sum_{k=1}^l c_k u_m(f_k) \right| / \sum_{k=1}^l |c_k| \quad (33)$$

где c_k , $k=1, 2, \dots, l$, – решение системы линейных уравнений (31) для $l = m+1$ различных произвольных точек f_1, f_2, \dots, f_l .

Используя формулу (33), можно предложить следующую методику оценки близости полученного решения к оптимальному. После нахождения вектора коэффициентов $\hat{\mathbf{b}}_s$ вычисляются экстремумы функции $W_0(\hat{\mathbf{b}}_s, f)$ по $f \in [\beta; 0,5]$ и выбираются $M \geq m+1$ экстремумов с максимальным уровнем. Далее проводится оценка $\phi(\tilde{\mathbf{b}}_s)$ по формуле (33) для каждого сочетания из M по $m+1$ этих экстремумов. Выбирая наибольшую из этих оценок ρ , имеем

$$\rho \leq \phi(\tilde{\mathbf{b}}_s) \leq \phi(\hat{\mathbf{b}}_s).$$

Если рассчитанные таким образом верхняя и нижняя границы в этой формуле отличаются не более, чем на заданную величину, то задача считается решенной, в противном случае повторяется поиск из точки $\hat{\mathbf{b}}_s$.

Приведенная методика гарантирует, что получаемый уровень максимального бокового лепестка отличается от его величины для точного решения не более, чем на заданную величину.

Весовые функции со скоростью спада лепестков 6k+3 дБ на октаву

В данном разделе приводятся результаты синтеза весовых функций со скоростями спада боковых лепестков $V = 6k + 3$ дБ/окт., $k=1, 2, \dots$, занимающих по этому параметру срединное положение среди известных функций. Для достижения такой скорости спада параметр μ в формуле (13) должен быть равен $\mu = k - 0,5$.

Расположение нулей функции (8) описывается формулой (11). Отсюда следует, что для функции порядка m минимальный аргумент, при котором все слагаемые функции (21) обращаются в ноль, равен $f_{z0} = (0,5\mu + m + 1) / N$. Главный лепесток не выходит за пределы области $[0, f_{z0}]$. При минимизации всех боковых лепестков синтезируемой функции параметр β полуширины главного лепестка не должен превосходить величину f_{z0} : $\beta \leq (0,5\mu + m + 1) / N$. Наоборот, при заданном β минимально необходимый порядок функции равен $m \geq N\beta - 0,5\mu - 1$. Расчеты показывают также, что увеличение порядка функции сверх минимально необходимо приводит к весьма слабому улучшению характеристик функции. Поэтому для сокращения приводимые ниже таблицы содержат параметры функций только для минимального порядка $m = \lceil N\beta - 0,5\mu - 1 \rceil$, где $\lceil x \rceil = q$ – наименьшее целое, такое, что $q \geq x$. Функции, удовлетворяющие этому условию, будем называть регулярными, в противном случае – нерегулярными. Нерегулярные функции вынужденно возникают в случае, когда мини-

мально необходимый порядок по приведенной формуле меньше или равен нулю. При этом минимизация лепестков для функции (21) не имеет смысла, и порядок необходимо увеличить до единицы.

Следующее соображение, позволяющее сократить объем таблиц, относится к параметру N . Характеристики весовых функций слабо зависят от этого параметра. Типичная зависимость уровня P максимального лепестка от N приведена в табл. 1 для функций с параметрами $\mu = 0,5$, $m = 3$, $\beta = 4,5/N$. Приведены величины максимального лепестка для оптимальных весовых функций (первая строка) и для функций при коэффициентах, равных оптимальным для $N = 1024$ (вторая строка).

Для различных N разница в уровне максимального лепестка выражается в долях, максимум в единицах, децибел и тем меньше, чем больше сравниваемые значения N . Для $N = 1024$ разница с асимптотическим случаем составляет менее сотой доли децибела. В связи с этим ниже приводятся характеристики оптимальных функций только для одного значения $N = 1024$, часто используемого в приложениях. При таком значении N как коэффициенты, так и характеристики весовых функций практически совпадают с асимптотическими. При

значениях N порядка нескольких десятков эту зависимость следует учитывать.

Заметим также, что ширина главного лепестка обратно пропорциональна N . Поэтому параметры этой ширины, включая β , в литературе принято выражать в относительном масштабе, умножая их на N , т.е. выражая их в бинах [1]. Такая нормировка используется ниже.

Характеристики регулярных оптимальных весовых функций для скоростей спада лепестков $V = 9, 15$ и 21 дБ/окт. ($\mu = 0,5, 1,5, 2,5$) приведены, соответственно, в табл. 2, 3 и 4 при $N = 1024$, минимально необходимом m и шаге $0,25$ бин по параметру β .

Табулированы следующие стандартные параметры весовых функций [1]: уровень P максимального бокового лепестка по отношению к главному лепестку; потери Π_w в отношении сигнал/шум за счет использования весовой функции; потери Π_r за счет рельефа; эквивалентная шумовая полоса L_n , ширины главного лепестка L_3 и L_6 по уровням минус 3 и минус 6 дБ соответственно. Потери за счет рельефа определяются как максимальный относительный спад огибающей амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) гребенки полосовых фильтров, рас-

Таблица 1. Зависимость подавления от величины N

Уровень максимального лепестка, дБ	Число выборок N					
	16	64	256	1024	4096	16384
Оптимальный	-105,8	-104,86	-104,63	-104,61	-104,60	-104,60
При коэффициентах для $N = 1024$	-100,7	-103,33	-104,45	-104,61	-104,56	-104,56

Таблица 2. Параметры весовых функций со скоростью спада лепестков 9 дБ/окт. ($\mu = 0,5$)

m	βN	P , дБ	b_0, b_1, \dots, b_m	Π_w , дБ	Π_r , дБ	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
1	1,25	-22,9	1,0; 0,381	0,604	2,437	1,149	1,106	1,524
	1,5	-30,6	0,930; 1,0	0,910	2,114	1,233	1,186	1,642
	1,75	-35,4	0,469; 1,0	1,206	1,858	1,320	1,265	1,758
	2,0	-41,6	0,2756; 1,0	1,443	1,674	1,394	1,332	1,857
	2,181	-49,1	0,1469; 1,0	1,681	1,503	1,473	1,406	1,961
2	2,25	-50,8	0,12977; 1,0; 0,03739	1,748	1,459	1,496	1,427	1,992
	2,5	-57,0	0,08627; 1,0; 0,20676	1,969	1,323	1,574	1,499	2,095
	2,75	-64,3	0,05558; 1,0; 0,44600	2,177	1,206	1,651	1,570	2,198
	3,0	-69,4	0,04229; 1,0; 0,73886	2,329	1,128	1,709	1,624	2,275
	3,206	-77,3	0,021777; 0,766679; 1,0	2,514	1,037	1,784	1,694	2,374
3	3,25	-78,6	0,018770; 0,707031; 1,0; 0,007415	2,544	1,023	1,797	1,705	2,391
	3,5	-84,4	0,009898; 0,476428; 1,0; 0,070093	2,695	0,957	1,860	1,764	2,475
	3,75	-91,0	0,0052556; 0,3330947; 1,0; 0,1630217	2,840	0,897	1,923	1,823	2,558
	4,0	-97,9	0,0028517; 0,2364079; 1,0; 0,2934571	2,978	0,843	1,985	1,881	2,641
	4,217	-104,6	0,0016603; 0,1769931; 1,0; 0,4845976	3,104	0,796	2,044	1,935	2,719
4	4,25	-105,4	0,0015589; 0,1704697; 1,0; 0,5162597; 0,0011438	3,121	0,790	2,052	1,943	2,729
	4,5	-112,6	0,0009108; 0,1269798; 1,0; 0,7923694; 0,0236290	3,249	0,746	2,113	2,000	2,810
	4,75	-118,1	0,00056845; 0,09378422; 0,90952713; 1,0; 0,07578975	3,354	0,712	2,164	2,048	2,879
	5,0	-126,2	0,00022947; 0,04891686; 0,63124405; 1,0; 0,14719062	3,478	0,673	2,227	2,106	2,962
	5,223	-131,9	0,000126550; 0,031563064; 0,489585642; 1,0; 0,236932204	3,571	0,645	2,275	2,151	3,026
5	5,25	-132,5	0,000118468; 0,030093618; 0,476244892; 1,0; 0,249070968; 0,000189297	3,581	0,642	2,281	2,156	3,033
	5,5	-139,3	0,000061567; 0,018783936; 0,366029035; 1,0; 0,380622968; 0,005621739	3,682	0,614	2,334	2,206	3,104
	5,75	-146,0	0,000033257; 0,012109485; 0,287175048; 1,0; 0,544738228; 0,022027783	3,777	0,588	2,386	2,254	3,173
	6,0	-152,6	0,000018848; 0,008104107; 0,230452629; 1,0; 0,748648301; 0,059603937	3,867	0,564	2,436	2,301	3,239
	6,229	-159,8	0,000010413; 0,005333636; 0,183424368; 0,995382998; 1,0; 0,133613434	3,958	0,541	2,488	2,349	3,308
6	6,25	-160,5	0,0000096198; 0,0050076968; 0,1753102151; 0,9707095166; 1,0; 0,1392892683; 0,0000357630	3,966	0,540	2,492	2,354	3,314
	6,5	-166,5	0,0000047859; 0,0028620029; 0,1162032099; 0,7651796964; 1,0; 0,2120911718; 0,0016572519	4,044	0,521	2,537	2,396	3,374
	6,75	-174,0	0,0000021111; 0,0014918272; 0,0725976108; 0,5893546728; 1,0; 0,3123908186; 0,0073469918	4,132	0,500	2,589	2,444	3,443
	7,0	-179,7	0,0000011761; 0,0009362985; 0,0517286698; 0,4866945833; 1,0; 0,4192662919; 0,0196477373	4,202	0,485	2,631	2,483	3,498
	7,231	-186,8	0,00000058673; 0,00054102940; 0,03498459497; 0,39273107507; 1,0; 0,56391732921; 0,04571392665	4,280	0,468	2,679	2,528	3,562

Таблица 3. Параметры весовых функций со скоростью спада лепестков 15 дБ/окт. ($\mu = 1,5$)

m	βN	P , дБ	b_0, b_1, \dots, b_m	Π_w , дБ	Π_s , дБ	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1,75	-31,2	1,0; 0,1985	1,504	1,602	1,414	1,359	1,885
	2,0	-39,2	1,0; 0,6005	1,710	1,469	1,482	1,420	1,976
	2,25	-45,2	0,8740; 1,0	1,897	1,357	1,548	1,478	2,062
	2,5	-51,1	0,5226; 1,0	2,064	1,262	1,608	1,533	2,142
	2,689	-59,3	0,2921; 1,0	2,243	1,166	1,676	1,596	2,232
2	2,75	-60,9	0,26400; 1,0; 0,02252	2,286	1,144	1,693	1,611	2,253
	3,0	-67,4	0,18079; 1,0; 0,13844	2,450	1,065	1,758	1,671	2,339
	3,25	-74,7	0,12359; 1,0; 0,30012	2,608	0,993	1,823	1,731	2,426
	3,5	-80,6	0,09137; 1,0; 0,50433	2,738	0,937	1,878	1,782	2,499
	3,710	-88,1	0,06523; 1,0; 0,86709	2,886	0,877	1,943	1,843	2,586
3	3,75	-89,3	0,062049; 1,0; 0,931660; 0,004546	2,908	0,868	1,953	1,852	2,599
	4,0	-96,0	0,034173; 0,722338; 1,0; 0,050031	3,036	0,820	2,012	1,906	2,676
	4,25	-102,1	0,0194069; 0,5141116; 1,0; 0,1201647	3,155	0,778	2,068	1,958	2,750
	4,5	-110,0	0,0102535; 0,3617319; 1,0; 0,2205037	3,280	0,735	2,128	2,014	2,831
	4,719	-115,9	0,0064679; 0,2775630; 1,0; 0,3592086	3,384	0,701	2,180	2,062	2,899
4	4,75	-116,8	0,0060815; 0,2683918; 1,0; 0,3799162; 0,0005666	3,398	0,697	2,187	2,069	2,908
	5,0	-123,9	0,0036982; 0,2041097; 1,0; 0,5782528; 0,0130441	3,507	0,664	2,242	2,121	2,982
	5,25	-130,2	0,0024542; 0,1633348; 1,0; 0,8072959; 0,0468682	3,602	0,636	2,292	2,167	3,048
	5,5	-137,6	0,00136131; 0,11148230; 0,87685401; 1,0; 0,11396434	3,708	0,606	2,348	2,219	3,123
	5,726	-144,2	0,00070714; 0,06943642; 0,67053450; 1,0; 0,18467600	3,795	0,583	2,396	2,264	3,186
5	5,75	-144,7	0,00067039; 0,06665030; 0,65429552; 1,0; 0,19342119; 0,00009565	3,804	0,580	2,401	2,269	3,193
	6,0	-151,1	0,000369359; 0,043090411; 0,509682368; 1,0; 0,295258468; 0,003373217	3,891	0,558	2,450	2,314	3,257
	6,25	-158,6	0,000192096; 0,027051216; 0,394971921; 1,0; 0,427477753; 0,013714674	3,982	0,535	2,501	2,362	3,326
	6,5	-164,5	0,000118229; 0,019019680; 0,323769422; 1,0; 0,578780802; 0,036781546	4,059	0,517	2,546	2,404	3,385
	6,730	-171,9	0,000065990; 0,012637435; 0,259826529; 1,0; 0,775331366; 0,083133776	4,142	0,498	2,595	2,450	3,450
6	6,75	-172,5	0,000063185; 0,012244516; 0,255314967; 1,0; 0,793844608; 0,088680365; 0,000016214	4,149	0,496	2,599	2,454	3,456
	7,0	-178,6	0,000039684; 0,008757815; 0,211078544; 0,986739864; 1,0; 0,17162877; 0,001058479	4,222	0,480	2,643	2,495	3,514
	7,25	-185,9	0,000018491; 0,004757490; 0,135609318; 0,769995763; 1,0; 0,251021743; 0,004781225	4,300	0,464	2,692	2,540	3,578
	7,5	-192,3	0,0000098233; 0,0028754967; 0,0943052868; 0,6289615217; 1,0; 0,3392530732; 0,0129492140	4,367	0,450	2,734	2,579	3,634
	7,732	-198,9	0,0000052042; 0,0017290941; 0,0651789329; 0,5116874572; 1,0; 0,4559077315; 0,0305836635	4,438	0,435	2,779	2,621	3,694

Таблица 4. Параметры весовых функций со скоростью спада лепестков 21 дБ/окт. ($\mu = 2,5$)

m	βN	P , дБ	b_0, b_1, \dots, b_m	Π_w , дБ	Π_s , дБ	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
1	2,25	-38,9	1,0; 0,129	2,180	1,184	1,652	1,580	2,202
	2,5	-47,1	1,0; 0,4131	2,322	1,116	1,707	1,629	2,274
	2,75	-54,3	1,0; 0,7638	2,447	1,059	1,757	1,674	2,339
	3,0	-59,9	0,7890; 1,0	2,571	1,004	1,807	1,719	2,406
	3,195	-68,9	0,4585; 1,0	2,706	0,946	1,865	1,772	2,482
2	3,25	-70,3	0,41724; 1,0; 0,01524	2,737	0,933	1,878	1,784	2,499
	3,5	-77,2	0,29047; 1,0; 0,10171	2,863	0,883	1,933	1,835	2,572
	3,75	-84,2	0,20164; 1,0; 0,22484	2,991	0,835	1,991	1,888	2,649
	4,0	-91,1	0,14964; 1,0; 0,37755	3,099	0,796	2,041	1,935	2,715
	4,212	-98,4	0,11091; 1,0; 0,63363	3,217	0,755	2,097	1,987	2,790
3	4,25	-99,5	0,106172; 1,0; 0,677746; 0,002329	3,234	0,749	2,106	1,995	2,801
	4,5	-106,9	0,079273; 0,989272; 1,0; 0,037995	3,346	0,713	2,160	2,045	2,874
	4,75	-112,6	0,0465941; 0,7122272; 1,0; 0,0936077	3,444	0,682	2,210	2,091	2,939
	5,0	-121,3	0,0243226; 0,4979014; 1,0; 0,1750235	3,557	0,648	2,268	2,146	3,017
	5,221	-126,8	0,0161011; 0,3894673; 1,0; 0,2809904	3,643	0,623	2,314	2,188	3,077
4	5,25	-127,6	0,0152528; 0,3776819; 1,0; 0,2963852; 0,0003157	3,654	0,620	2,320	2,193	3,085
	5,5	-135,0	0,0094144; 0,2904419; 1,0; 0,4470264; 0,0078626	3,749	0,595	2,371	2,241	3,152
	5,75	-141,3	0,0063045; 0,2314653; 1,0; 0,6310516; 0,0295458	3,835	0,572	2,418	2,285	3,216
	6,0	-148,6	0,0041313; 0,1840136; 1,0; 0,8733422; 0,0796950	3,925	0,549	2,469	2,332	3,283
	6,227	-155,9	0,0023759; 0,1278336; 0,8637379; 1,0; 0,1498870	4,008	0,529	2,517	2,377	3,346
5	6,25	-156,5	0,00226378; 0,12329412; 0,84529975; 1,0; 0,15627266; 0,00005252	4,015	0,527	2,521	2,381	3,351
	6,5	-162,3	0,00130674; 0,08159924; 0,66402519; 1,0; 0,23892530; 0,00218652	4,091	0,509	2,565	2,422	3,411
	6,75	-170,6	0,000662649; 0,050440945; 0,510747633; 1,0; 0,348868915; 0,009174912	4,177	0,490	2,616	2,470	3,479
	7,0	-175,9	0,000430814; 0,036652904; 0,425026470; 1,0; 0,466591751; 0,024360367	4,243	0,476	2,656	2,507	3,532
	7,231	-183,5	0,000244615; 0,024568362; 0,342171383; 1,0; 0,625362180; 0,055601146	4,319	0,459	2,703	2,551	3,594

m	βN	P , дБ	b_0, b_1, \dots, b_m	$\Pi_{\text{ш}}$, дБ	Π_3 , дБ	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
6	7,25	-184,1	0,000233712; 0,023806276; 0,336532164; 1,0; 0,638833622; 0,058934423; 0,000007808	4,325	0,458	2,707	2,555	3,599
	7,5	-190,4	0,000149322; 0,017253052; 0,281497735; 1,0; 0,818775369; 0,116895531; 0,000580991	4,393	0,444	2,750	2,595	3,656
	7,75	-197,6	0,000088313; 0,011814356; 0,225845077; 0,963743614; 1,0; 0,207121634; 0,003242525	4,462	0,431	2,794	2,636	3,714
	8,0	-204,2	0,0000463875; 0,0070303443; 0,1547530236; 0,7801349075; 1,0; 0,2831261676; 0,0090568468	4,527	0,418	2,836	2,675	3,770
	8,233	-210,9	0,0000250610; 0,0042970716; 0,1082992203; 0,6388975089; 1,0; 0,3784596213; 0,0213433595	4,591	0,406	2,878	2,715	3,826

ставленных через интервал $1/N$, АЧХ каждого из которых определяется функцией $|W(f)|$. Эквивалентная шумовая полоса – это ширина АЧХ идеального прямоугольного фильтра, который пропускает такую же мощность шума, что и фильтр с АЧХ $|W(f)|$ при равных максимальных амплитудах АЧХ этих фильтров. Все полосы приведены в бинах.

Особый интерес представляют последние строки таблиц для каждого m , так как они дают ответ на вопрос о наименьшем значении уровня бокового лепестка, достижимом для весовой функции заданного порядка с заданной скоростью спада лепестков.

В таблицах приведены значения уровня максимального лепестка для точного решения минимаксной задачи, округленные до 0,1 дБ, а разрядность коэффициентов выбрана таким образом, чтобы обеспечить значения, отличающиеся от точных не более, чем на 0,05 дБ.

Характеристики оптимальных весовых функций

Проанализируем характеристики оптимальных весовых функций, полученных в данной и в предыдущих работах авторов [8-12]. Рис. 1 иллюстрирует зависимость уровня максимального бокового лепестка для регулярных функций от параметра β при скоростях спада боковых лепестков $V = 3k$ дБ/окт., $k = 2, 3, \dots, 8$. Кривые для разных k лежат одна над другой. Самая нижняя кривая имеет индекс $k = 2$. При переходе с одной кривой на следующую, более высокую, индекс увеличивается на единицу. Функции из таблиц данной работы показаны сплошными линиями, из предыдущих работ – пунктирными линиями (скорости спада кратны 6 дБ/окт.).

Увеличение скорости спада лепестков приводит к увеличению уровня максимального бокового лепестка. Для фиксированной скорости спада каждая кривая хорошо аппроксимируется прямой линией, небольшие отклонения от которой имеют случайный вид. При увеличении скорости спада лепестков увеличивается наклон аппроксимирующих прямых с -27,3 дБ/бин для $V = 6$ дБ/окт. до -29,2 дБ/бин для $V = 24$ дБ/окт. Это приводит к сближению кривых между собой при увеличении β . Для грубой оценки значения параметра синтеза β , требуемого для получения желаемого уровня бокового лепестка можно использовать линейное соотношение $P = (-28 \beta + 20)$ дБ.

Сближение кривых при увеличении β наблюдается и для других параметров функций. На рис. 2 показана зависимость ширины главного лепестка L_3 по уровню минус 3 дБ для тех же самых функций. При нумерации

кривых снизу вверх индекс k монотонно возрастает, начиная с $k = 2$. Ориентировочное значение для серединной кривой может быть оценено по формуле $L_3 \approx -0,01\beta^2 + 0,3\beta + 0,86$.

P , дБ

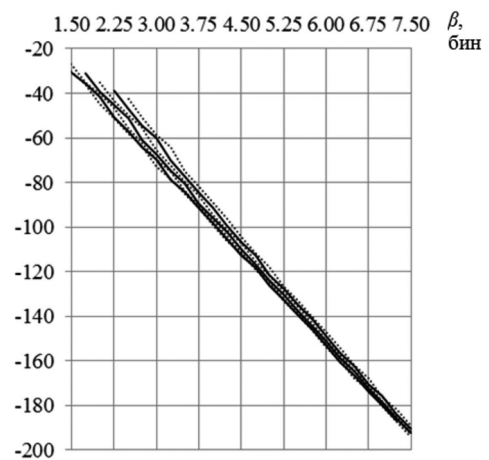


Рис. 1. Зависимость уровня максимального бокового лепестка от параметра β для оптимальных функций со скоростью спада лепестков $3k$, $k = 2, 3, \dots, 8$

L_3 , бин

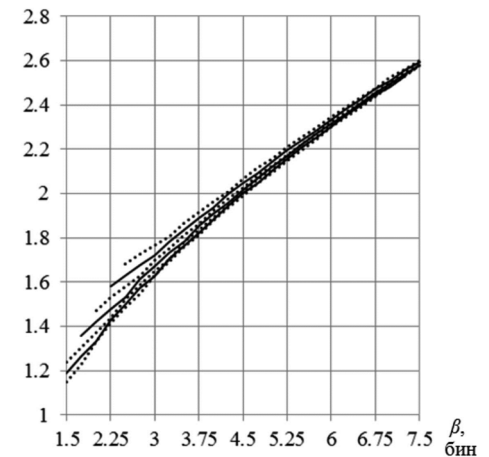


Рис. 2. Зависимость ширины главного лепестка по уровню -3 дБ от параметра β для оптимальных функций со скоростью спада лепестков $3k$, $k = 2, 3, \dots, 8$

В табл. 2, 3 и 4 приведены три вида полос: шумовая полоса L_n и ширины главного лепестка L_3 и L_6 по уровням минус 3 и минус 6 дБ соответственно. Рис. 3 иллюстрирует соотношения между этими полосами. На рисунке приведены указанные параметры всех оптимальных регулярных функций, параметры которых табулиро-

ваны в этой и предыдущих работах авторов [8-12]. Общее количество функций составляет 240.

Каждая функция отображается одной точкой для каждой из зависимостей. Параметры оптимальных функций с высокой точностью ложатся на прямолинейные тренды, проведенные на рисунке тонкими линиями и имеющими уравнения:

$$L_n = 1,0757 L_3 - 0,0415, \quad L_6 = 1,4301 L_3 - 0,0539. \quad (34)$$

С использованием этих уравнений можно довольно точно оценить шумовую полосу и полосу главного лепестка по уровню минус 6 дБ, зная полосу по уровню минус 3 дБ. Кроме того, потери весовой функции также являются зависимым параметром и рассчитываются по формуле $\Pi_w = 10 \log L_n$.

В работе [1] замечено, что для весовых функций, которые по совокупности параметров можно отнести к «хорошим», относительная разность δ между шумовой полосой и полосой по уровню минус 3 дБ

$$\delta = L_n / L_3 - 1 \quad (35)$$

не превышает 4-5,5 % и предложено использовать этот параметр в качестве критерия качества весовой функции. Однако в [1] рассматриваются функции с уровнем максимального лепестка больше минус 92 дБ, а из приведенных выше данных следует, что для рассмотренных выше оптимальных функций величина δ растет при уменьшении уровня максимального лепестка. Поэтому, если использовать (35) в качестве критерия качества, то в диапазоне от минус 92 до минус 200 дБ верхнюю границу допуска необходимо увеличить до 6 %.

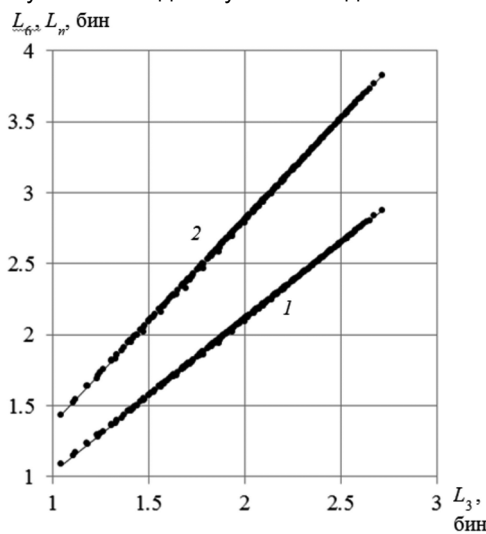


Рис. 3. Зависимость шумовой полосы L_n (кривая 1) и полосы L_6 (2) от полосы L_3

Следует заметить, что параметры многих классических функций [1] также соответствуют уравнениям (34) с большой точностью. Поэтому более общий критерий может состоять в сравнении реальной шумовой полосы L_n и шумовой полосы $L_{n(32)}$, вычисленной по формуле (34):

$$\delta_1 = L_n / L_{n(34)} - 1. \quad (36)$$

Для рассматриваемого множества синтезированных функций максимальная величина параметра (36) составляет 0,7 %, а среднее значения модуля – 0,1 %. Возможно также использование в качестве критерия качества второго соотношения из (34).

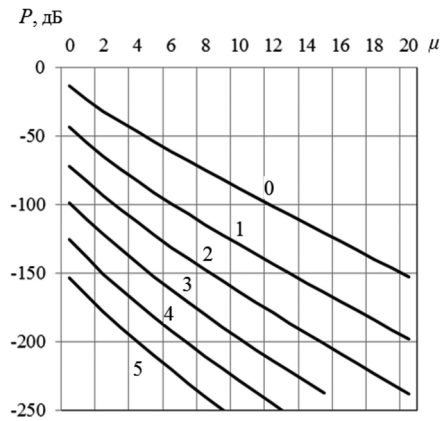


Рис. 4. Зависимость минимального уровня максимального лепестка от параметра μ при $m = 0$ (кривая 0), 1 (1), 2 (2), 3 (3), 4 (4) и 5 (5)

Особый интерес представляют функции с минимально достижимым уровнем $P_{\min}(\mu, m)$ максимального лепестка при заданных порядке m и скорости спада лепестков $V = 6(\mu + 1)$. Для синтеза таких функций степень μ задается выражением $\mu = V / 6 - 1$, а параметр синтеза β – равным положению первого нуля (9) функции (11): $\beta = 0,5\mu + m + 1$. Реально получаемое значение β несколько меньше, поскольку значение $P_{\min}(\mu, m)$ достигается в главном лепестке несколько левее первого нуля. На рис. 4 показаны зависимости $P_{\min}(\mu, m)$ от параметра μ для фиксированных порядков в диапазоне $m = 0-5$, указанных цифрами над кривыми. Кривая для $m = 0$ описывает фактически характеристики отдельных базисных функций. Из рисунка следует, что при увеличении параметра μ не только возрастает скорость спада лепестков, но и быстро снижается уровень максимального лепестка. Приведенные зависимости хорошо аппроксимируются полиномом второго порядка, например, при $m = 3$ кривая тренда имеет вид $P = 0,14 \mu^2 - 11,55 \mu - 87,7$ дБ.

Ограниченный объем статьи не позволяет привести характеристики многочисленных функций, представленных на рис. 4. При малых целочисленных значениях μ параметры функций можно найти в работах авторов [8-12]. В табл. 5 приведены функции рассматриваемого рисунка порядков $m = 3, 4$ и 5 для целочисленных μ в диапазоне 3-12.

Сравнение характеристик полученных функций со скоростью спада лепестков 6 дБ/окт. с известными проведено в [11], где показано, что полученные функции превосходят по характеристикам все известные, кроме функций Дольфа-Чебышева. Превосходство последних достигается за счет того, что они имеют максимально возможный порядок (примерно $N/2$), что, однако, создает трудности при реализации в реальном масштабе времени. Для других случаев аналогов для сравнения, описанных в литературе, насколько известно авторам, нет.

Заключение

Предложенный в данной работе класс весовых функций обеспечивает:

- произвольно заданную скорость спада лепестков $V \geq 6$ дБ/окт.;
- минимальный уровень максимального бокового лепестка при заданных параметрах;

Таблица 5. Параметры оптимальных весовых функций с целым параметром μ

m	μ	βN	P , дБ	b_0, b_1, \dots, b_m	Π_w , дБ	Π_s , дБ	$L_n N$	$L_3 N$	$L_6 N$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	3,0	5,472	-132,1	0,023184; 0,449251; 1,0; 0,252040	3,765	0,590	2,379	2,249	3,164
	4,0	5,973	-142,3	0,042115; 0,571914; 1,0; 0,208569	3,996	0,531	2,509	2,371	3,337
	5,0	6,475	-152,3	0,068667; 0,701887; 1,0; 0,176468	4,209	0,482	2,636	2,489	3,504
	6,0	6,976	-161,7	0,102390; 0,832747; 1,0; 0,153085	4,408	0,440	2,759	2,605	3,669
	7,0	7,477	-171,1	0,144844; 0,968905; 1,0; 0,134520	4,593	0,405	2,879	2,718	3,828
	8,0	7,978	-180,2	0,177205; 1,0; 0,901260; 0,107715	4,765	0,374	2,996	2,827	3,983
	9,0	8,479	-189,2	0,206119; 1,0; 0,796949; 0,085428	4,927	0,348	3,109	2,934	4,134
	10,0	8,979	-197,6	0,236050; 1,0; 0,713752; 0,069564	5,079	0,324	3,220	3,037	4,281
4	11,0	9,479	-205,7	0,265861; 1,0; 0,647041; 0,057904	5,223	0,304	3,329	3,139	4,425
	12,0	9,980	-213,7	0,296332; 1,0; 0,590812; 0,048806	5,358	0,285	3,434	3,238	4,565
	3,0	6,478	-161,4	0,00392566; 0,16624346; 0,96473914; 1,0; 0,13679347	4,110	0,505	2,576	2,433	3,425
	4,0	6,979	-171,7	0,00792192; 0,22568676; 1,0; 0,84656109; 0,09794942	4,301	0,463	2,692	2,542	3,580
	5,0	7,480	-181,9	0,01354043; 0,28265114; 1,0; 0,70950974; 0,07053459	4,481	0,426	2,806	2,649	3,731
	6,0	7,980	-191,7	0,02102882; 0,34155742; 1,0; 0,60870211; 0,05285773	4,652	0,394	2,919	2,754	3,880
	7,0	8,481	-201,3	0,03084060; 0,40367450; 1,0; 0,53041812; 0,04072587	4,812	0,367	3,028	2,857	4,026
	8,0	8,981	-210,4	0,04301561; 0,46717818; 1,0; 0,47021799; 0,03246188	4,964	0,342	3,136	2,958	4,169
5	9,0	9,482	-219,3	0,05760781; 0,53204086; 1,0; 0,42158027; 0,02639260	5,108	0,320	3,242	3,057	4,310
	10,0	9,982	-228,2	0,07506308; 0,59941112; 1,0; 0,38071715; 0,02171947	5,245	0,301	3,346	3,154	4,447
	11,0	10,482	-237,0	0,09556191; 0,66903724; 1,0; 0,34603962; 0,01806972	5,374	0,284	3,447	3,249	4,581
	12,0	10,983	-245,5	0,11795595; 0,73668105; 1,0; 0,31812915; 0,01537017	5,498	0,268	3,546	3,343	4,714
	3,0	7,481	-189,0	0,000420620; 0,032781377; 0,386542457; 1,0; 0,567767924; 0,046407407	4,404	0,442	2,757	2,601	3,665
	4,0	7,982	-199,7	0,001048611; 0,053942809; 0,478670287; 1,0; 0,477690562; 0,033511465	4,569	0,410	2,863	2,701	3,807
	5,0	8,482	-210,1	0,002213227; 0,082022106; 0,574892654; 1,0; 0,410490979; 0,025115088	4,726	0,382	2,969	2,800	3,946
	6,0	8,983	-220,3	0,004150383; 0,117798407; 0,675425148; 1,0; 0,357900847; 0,019282931	4,875	0,357	3,072	2,897	4,084
5	7,0	9,483	-230,5	0,007120504; 0,161674142; 0,779186801; 1,0; 0,316098853; 0,015138404	5,017	0,334	3,175	2,993	4,220
	8,0	9,984	-240,0	0,011442664; 0,213838777; 0,884186284; 1,0; 0,283329063; 0,012248416	5,153	0,314	3,276	3,088	4,354
	9,0	10,484	-249,5	0,017476842; 0,275287328; 0,992104604; 1,0; 0,256142481; 0,010066935	5,282	0,296	3,375	3,181	4,486
	10,0	10,985	-258,8	0,023196479; 0,314114378; 1,0; 0,906982487; 0,211538400; 0,007601035	5,406	0,280	3,472	3,272	4,615
	11,0	11,485	-267,8	0,029586852; 0,350832980; 1,9; 0,824672224; 0,176647937; 0,005848637	5,524	0,265	3,568	3,362	4,743
	12,0	11,985	-276,8	0,036991772; 0,388611342; 1,0; 0,754422268; 0,149105840; 0,004565411	5,638	0,252	3,662	3,451	4,868

– простоту вычисления весовых функций, достаточную для приложений реального времени.

Разработанный алгоритм синтеза реализует вычисление оптимальной функции данного класса с минимальным уровнем максимального бокового лепестка, задаваемой следующими тремя параметрами: целочисленный порядок функции m , определяющий объем вычислений при реализации, параметр $\mu \geq 0$, задающий скорость спада лепестков $V = 6(\mu + 1)$ дБ/окт., и ширина главного лепестка по уровню максимального бокового. Два последних параметра являются произвольными положительными действительными числами, что определяет широту предложенного класса функций.

Литература

1. Хэррис Ф.Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье. // ТИИЭР, 1978, Том 66, №1, с. 60-96.
2. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Оконные функции для гармонического анализа сигналов. М.: Техносфера, 2016.
3. Опенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006.
4. Nuttall A.H. Some Windows with Very Good Sidelobe Behavior. // IEEE Trans., v. ASSP 29, 1981. № 1, с. 84-91.

5. Hans-Helge Albrecht. A Family of Cosine-Sum Windows for High-Resolution Measurements. // Proc. Conf. ICASSP-01, Salt Lake City, 2001. N.Y.: IEEE, 2001. V. 5. P. 3081.
6. Gröbner W. and Hofreiter N. Integraltafel, Teil II, Bestimmte Integrale. Wien and Innsbruck: Springer-Verlag, 1958.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
8. Зайцев Г.В. Класс весовых функций малого порядка для спектрального анализа, оптимальных по минимаксному критерию. // Радиотехника, 2011, № 3, с. 21-32.
9. Зайцев Г.В. Класс весовых функций для спектрального анализа с высокой скоростью спада лепестков и минимальным уровнем максимального бокового лепестка. // Радиотехника, 2012, № 1, с. 55-65.
10. Хзмалян А.Д. Новые представления весовых функций с высокой скоростью спада лепестков спектра и минимальным уровнем максимального бокового лепестка. // Вестник ВКО, 2018, № 4(20), с. 90-100.
11. Zaytsev G.V., Khzmalyan A.D. A Family of Optimal Cosine-Sum Windows for Real-Time Spectral Analysis. // Proc. V Int. Conf. on Engineering and Telecommunication, 2018, pp. 103-107.
12. Зайцев Г.В., Хзмалян А.Д. Класс оптимальных весовых функций для спектрального анализа со скоростью спада лепестков спектра, кратной 12 децибел на октаву. // Радиотехника и электроника, в печати.
13. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. М.: Наука, 1978.

УДК 621.396.96:519.61

АЛГОРИТМ АДАПТИВНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ЛИНЕЙНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ЕГО ЧИСЛЕННО УСТОЙЧИВАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

*Ратынский М.В., д.т.н., начальник сектора АО «ВНИИРТ», e-mail: m3v5r7@inbox.ru;
Кирякмасов А.К., ведущий инженер АО «ВНИИРТ», e-mail: bp19z@yandex.ru.*

LINEARLY CONSTRAINED ADAPTIVE SPACE FILTERING ALGORITHM AND ITS NUMERICALLY STABLE SOLUTION

Ratynsky M.V., Kiryakmasov A.K.

It is established that linearly constrained adaptive space filtering algorithm for complex numbers may be realized in numerically stable form that does not require direct matrices inverting. Numerically stable algorithm requires lesser computer word length against the methods based on Gauss algorithm of linear equations system solving, the required word length may be different as one and a half to twice.

Key words: adaptive space filtering, linear constraints, orthogonalization, numerical stability.

Ключевые слова: адаптивная пространственная фильтрация, линейные ограничения, ортогонализация, численная устойчивость.

Введение

Каноническое решение задачи адаптивной пространственной фильтрации (АПФ) дает для N -элементного комплексного адаптивного весового вектора следующее выражение (без учета нормировки) [1]:

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{Y}\mathbf{Y}^H, \quad (1)$$

где \mathbf{R} – выборочная оценка корреляционной матрицы (КМ) сигналов с выходов элементов антенной решетки; \mathbf{S} – управляющий вектор, определяемый направлением прихода ожидаемого полезного сигнала и геометрией решетки; \mathbf{Y} – прямоугольная матрица размера $N \times K$ (обучающий пакет), столбцами которой являются N -мерные комплексные векторы \mathbf{Y}_k , $k = 1, \dots, K$, комплексных огибающих сигналов с выходов элементов решетки в K последовательных моментов времени, отстоящих один от другого на интервал дискретизации по Котельникову; $(\cdot)^H$ – знак эрмитовой сопряженности (транспонирования и комплексной сопряженности). Практически вместо явного формирования КМ \mathbf{R} (которая всегда является плохо обусловленной) и ее прямого обращения оказывается удобнее использовать эквивалентное ему решение с более высокой численной устойчивостью – ортогонализацию строк пакета \mathbf{Y} с последующей фильтрацией вектора \mathbf{S} фильтром-биортогонализатором [1].

В некоторых случаях, например, для защиты главного лепестка диаграммы направленности решетки при неточно известном направлении прихода ожидаемого полезного сигнала или для обеспечения нужной формы частотной характеристики фильтра при обработке широкополосных сигналов, используется алгоритм с дополнительными линейными ограничениями (ЛО) [2-5], требующий обращения еще одной матрицы более

Показано, что алгоритм адаптивной пространственной фильтрации с линейными ограничениями над полем комплексных чисел может быть реализован в численно устойчивой форме, не требующей прямого обращения матриц. Численно устойчивый алгоритм требует меньшей разрядности вычислителя по сравнению с методами, основанными на решении системы линейных уравнений методом Гаусса, причем требуемая разрядность может различаться в полтора – два раза.

сложной структуры. Этот алгоритм также может быть реализован в численно устойчивой форме, хотя на первый взгляд это и не представляется очевидным.

В соответствии со сказанным, в настоящей работе рассматриваются три вопроса:

- вывод формулы для комплексного весового вектора в задаче АПФ с ЛО;
- реализация полученного решения в численно устойчивой форме;
- оценка численной устойчивости и вычислительной сложности предлагаемого решения в сопоставлении с прямым обращением соответствующих матриц.

Оптимальное решение задачи АПФ с ЛО

Задача нахождения оптимального весового вектора при наличии L ЛО может быть сформулирована в виде задачи минимизации выходной мощности антенной решетки при наличии ЛО:

$$\min_{\mathbf{W}} \mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W} \quad \text{при условии} \quad \mathbf{W}^H \mathbf{C} = \mathbf{F},$$

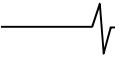
где \mathbf{C} – матрица ЛО размера $N \times L$, \mathbf{F} – L -элементный вектор-строка коэффициентов ЛО.

В соответствии с методом неопределенных множителей Лагранжа введем вспомогательную функцию $H(\mathbf{W})$, равную

$$H(\mathbf{W}) = \mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W} + (\mathbf{W}^H \mathbf{C} - \mathbf{F}) \boldsymbol{\Lambda},$$

где $\boldsymbol{\Lambda}$ – вектор-столбец неопределенных множителей размера L .

Условием экстремума (минимума) является равенство нулю градиента функции $H(\mathbf{W})$, равного (в соответствии с



правилами вычисления градиента функции комплексных векторно-матричных аргументов по Брендвуду [6])

$$\nabla_{\mathbf{W}} H(\mathbf{W}) = \mathbf{R}\mathbf{W} + \mathbf{C}\mathbf{\Lambda} = 0,$$

откуда следует

$$\mathbf{W}_{opt} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}.$$

Из условия $\mathbf{W}_{opt}^H \mathbf{C} = \mathbf{F}$ непосредственно получается, с учетом эрмитовости матриц \mathbf{R} и $\mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}$, что $\mathbf{\Lambda} = -(\mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{F}^H$, и окончательно

$$\mathbf{W}_{opt} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{F}^H. \quad (2)$$

Полученный результат, являющийся комплексным аналогом формулы (16) работы Фроста [2], требует обращения двух матриц – \mathbf{R} и $\mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}$.

Прямая реализация решения (2)

Возможны различные варианты прямой реализации решения (2). Как минимум два из них основаны на решении системы линейных уравнений методом последовательного исключения (методом Гаусса) [7].

Первый вариант – прямое обращение матрицы \mathbf{R} решением системы

$$\mathbf{R}\mathbf{X}_N = \mathbf{I}_N,$$

где \mathbf{X}_N – матрица размера $N \times N$, \mathbf{I}_N – единичная матрица размера N , т.е. фактически решением N систем с одной и той же матрицей \mathbf{R} , но с разными правыми частями, в роли которых выступают столбцы матрицы \mathbf{I}_N , а решениями являются столбцы матрицы \mathbf{X}_N . Очевидно, что получаемая таким образом матрица \mathbf{X}_N обратна по отношению к матрице \mathbf{R} : $\mathbf{X}_N = \mathbf{R}^{-1}$. Этот вариант требует предварительного прямого формирования матрицы \mathbf{R} в соответствии со вторым из равенств (1), а последующие шаги могут быть представлены следующей схемой:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}^{-1} \rightarrow \mathbf{C}_1 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_2 = \\ &= \mathbf{C}^H \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2^{-1} \rightarrow \mathbf{F}_1 = \mathbf{C}_2^{-1} \mathbf{F}^H \rightarrow \mathbf{W}_{optG1} = \mathbf{C}_1 \mathbf{F}_1. \end{aligned} \quad (3)$$

Второй вариант использует то обстоятельство, что в решении (2) нам фактически нигде не нужна обратная матрица, как таковая, а нужно ее произведение на вектор или на матрицу. Поэтому, например, матрицу $\mathbf{C}_1 = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}$ можно получить не как результат обращения матрицы \mathbf{R} и последующего умножения матрицы \mathbf{R}^{-1} на матрицу \mathbf{C} , а непосредственно из решения системы $\mathbf{R}\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}$. Схема этого варианта, аналогичная (3), имеет вид (матрица \mathbf{C}_1 и вектор \mathbf{F}_1 имеют тот же смысл, что и в схеме (3)):

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}\mathbf{C}_1 = \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}_2 = \\ &= \mathbf{C}^H \mathbf{C}_1 \rightarrow \mathbf{C}_2 \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}^H \rightarrow \mathbf{W}_{optG2} = \mathbf{C}_1 \mathbf{F}_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Численно устойчивая реализация решения (2)

Известно, что если матрица \mathbf{R} представима в виде, определяемым вторым из равенств (1), то обратная к ней может быть определена как [1]

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{\Phi}^H \mathbf{\Phi}, \quad (5)$$

где $\mathbf{\Phi}$ – нижне-треугольная матрица размера $N \times N$, ортонормирующая строки пакета \mathbf{Y} , так что

$$\mathbf{\Phi}\mathbf{Y} = \mathbf{Z}, \mathbf{Z}\mathbf{Z}^H = \mathbf{I}_N.$$

Простейший способ получения матрицы фильтра-ортонормализатора $\mathbf{\Phi}$ заключается в ортонормировании

строк пакета \mathbf{Y} при помощи процедуры ортогонализации Грама-Шмидта.

Подставляя (5) в сомножитель в скобках равенства (2), представим его в виде:

$$\mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C} = \mathbf{C}^H \mathbf{\Phi}^H \mathbf{\Phi} \mathbf{C} = (\mathbf{\Phi} \mathbf{C})^H \mathbf{\Phi} \mathbf{C} = \mathbf{Y}_1^H \mathbf{Y}_1,$$

где введено обозначение

$$\mathbf{Y}_1 = \mathbf{\Phi} \mathbf{C}. \quad (6)$$

Матрица \mathbf{Y}_1 имеет размер $N \times L$. Ортонормирование ее столбцов при помощи фильтра-ортонормализатора $\mathbf{\Phi}_1$ (матрица $\mathbf{\Phi}_1$ – верхне-треугольная размера $L \times L$), так что

$$\mathbf{Y}_1 \mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_1^H \mathbf{Z}_1 = \mathbf{I}_L,$$

позволяет представить искомую обратную матрицу в виде:

$$(\mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C})^{-1} = (\mathbf{Y}_1^H \mathbf{Y}_1)^{-1} = \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Phi}_1^H. \quad (7)$$

Используя выражения (2) и (5)...(7), получаем окончательную рабочую формулу:

$$\mathbf{W}_{optORT} = \mathbf{\Phi}^H \mathbf{\Phi} \mathbf{C} \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Phi}_1^H \mathbf{F}^H. \quad (8)$$

Последовательность вычислений по этой формуле, по аналогии с (3) и (4), может быть представлена следующей схемой, начиная с нахождения фильтра-ортонормализатора $\mathbf{\Phi}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi} &\rightarrow \mathbf{Y}_1 = \mathbf{\Phi} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{\Phi}_1 \rightarrow \mathbf{F}_1 = \\ &= \mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Phi}_1^H \mathbf{F}^H \rightarrow \mathbf{F}_2 = \mathbf{C} \mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{W}_{optORT} = \mathbf{\Phi}^H \mathbf{\Phi} \mathbf{F}_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что фактически при вычислениях по (8) или (9) используются факторизованные представления фильтров-ортонормализаторов $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Phi}_1$, непосредственно получаемые в процессе ортогонализации [1].

Оценка численной устойчивости

Оценка численной устойчивости алгоритма (8), реализуемого по схеме (9), в сопоставлении с исходным алгоритмом (2), реализуемым по одной из схем (3) или (4), выполнена методом цифрового моделирования в виде оценки требуемой разрядности вычислителя для каждого из этих алгоритмов. Моделирование выполнено на языке VBA в среде Excel, при числе элементов решетки $N = 24 \dots 96$ (для одномерных и двумерных решеток), числе обучающих выборок $K = (1,5 \dots 5)N$, числе источников стохастических сигналов $M = 1 \dots 6$, интенсивности сигналов $P = 18 \dots 54$ дБ относительно собственных шумов в элементе решетки и числе ЛО $L = 1 \dots 6$. Ограничение разрядности вычислителя моделировалось, как и в предшествующей работе [8], усечением мантисс во всех промежуточных результатах вычислений (для каждой из квадратур в случае комплексных чисел) до требуемого числа разрядов после каждой арифметической операции используемого для решения задачи алгоритма с перебором числа разрядов J от большего к меньшему в заведомо достаточно широких пределах.

На рис. 1-3 представлены характерные примеры результатов моделирования в виде зависимости отношения помеха/шум Q на выходе адаптивного пространственного фильтра от числа разрядов вычислителя J для $N = 24$ (линейная решетка), $K = 3N = 72$, $M = 3$, $P = 54$ дБ, $L = 3$: рис. 1 – расчет по (3), рис. 2 – расчет по (4), рис. 3 – расчет по (9) (каждая точка графиков получена как среднее из 25 реализаций по случайности).



Рис.1. Алгоритм (2) в реализации (3)

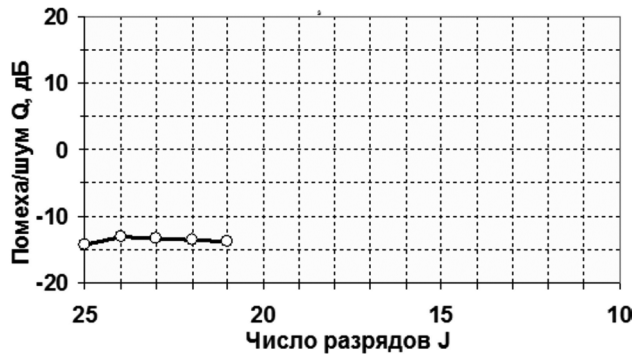


Рис.2. Алгоритм (2) в реализации (4)

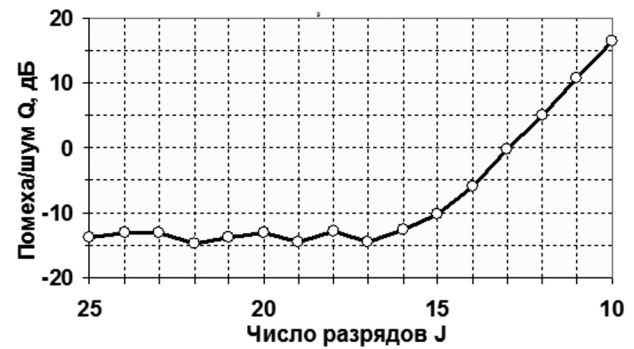


Рис.3. Алгоритм (8) в реализации (9)

Характерным для третьего варианта является малое и практически постоянное значение Q при достаточно большой разрядности (горизонтальный участок кривой на рис.3), и постепенное возрастание Q по мере уменьшения разрядности, когда число разрядов становится недостаточным (наклонный участок кривой). В качестве оценки требуемой разрядности вычислителя $J_{тр}$ в этом случае принималась абсцисса точки излома линейно-ломаной линии, аппроксимирующей зависимость Q от J ($J_{тр} = 15,5$ для рис. 3).

Для первых двух вариантов характер зависимости Q от J оказывается качественно иным: при некотором числе разрядов либо происходит аварийный останов по делению на ноль, и продолжение вычислений оказывается невозможным (рис. 2), либо из-за аномально больших ошибок вычислений плавный ход зависимости Q от J нарушается (рис. 1). В первом из этих случаев $J_{тр}$ принималось равным минимальному значению разрядности, при котором еще не происходил сбой, а во втором – значению разрядности, на котором заканчивался горизонтальный участок кривой. В приведенном примере в обоих случаях $J_{тр} = 21$, и эта закономерность явля-

ется общей – два первых варианта требуют практически одинаковой разрядности.

В общем случае величина требуемой разрядности оказывается практически не зависящей от конфигурации решетки (линейная или плоская), числа выборок K , числа линейных ограничений L и числа источников M (хотя от реализации к реализации величина $J_{тр}$ может изменяться в пределах двух – трех разрядов), но зависящей от интенсивности источников P , увеличиваясь на единицу при возрастании P на 6 дБ, и от числа элементов решетки N , увеличиваясь на единицу при удвоении N . Однако в любом случае третий вариант требует меньшей разрядности вычислителя по сравнению с двумя первыми, причем требуемая разрядность может различаться в полтора – два раза, что в общем согласуется с известными характеристиками точности матричных вычислений [9, 10].

Оценка вычислительной сложности

Оценка вычислительной сложности рассмотренных вариантов решения выполнена прямым расчетом числа операций, необходимых для их реализации. При этом под одной операцией мы понимаем операцию комплексного умножения-сложения, т.е. совокупность операции перемножения пары комплексных чисел и операции сложения пары комплексных чисел. Оценка числа операций выполнена в первом приближении – в пренебрежении в соответствующих формулах членами высших порядков малости (например, членами порядка N по сравнению с N^2 , и N^2 по сравнению с N^3).

В табл.1 приведено число комплексных умножений-сложений (КУС) для базовых операций, входящих в сопоставляемые расчетные соотношения, в табл. 2 даны окончательные результаты оценки их вычислительной сложности.

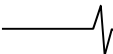
Таблица 1. Число комплексных умножений-сложений (КУС) для базовых операций

Базовая операция	Число КУС
Перемножение матриц размеров $N \times K$ и $K \times L$	KNL
Решение системы линейных уравнений с матрицей размера $N \times N$ и L правыми частями	$LN^2/2$
Ортогонализация строк матрицы размера $N \times K$	KN^2
Фильтрация N -элементного столбца факторизованным фильтром-ортогонализатором размера $N \times N$	$N^2/2$

Таблица 2. Число комплексных умножений-сложений (КУС) для сопоставляемых вариантов расчета

Варианты расчета	Число КУС
Вариант 1: алгоритм (2) в реализации (3)	$N^2(K + N)/2$
Вариант 2: алгоритм (2) в реализации (4)	$KN^2/2$
Вариант 3: алгоритм (8) в реализации (9)	KN^2

Мы видим, что второй вариант наиболее экономичен по числу операций, третий вариант уступает ему вдвое, а первый при $K > N$ занимает промежуточное положение (третий вариант уступает первому в $2/(1 + N/K)$ раз).



Заключение

Решение задачи адаптивной пространственной фильтрации при наличии линейных ограничений приводит к выражению (2) для оптимального весового вектора, которое требует обращения двух матриц – \mathbf{R} и $\mathbf{C}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{C}$. Использование приема ортогонализации (ортонормирования) строк исходного обучающего пакета \mathbf{Y} , входящего во второе из равенств (1), и столбцов матрицы \mathbf{Y}_1 по (6) при помощи соответственно фильтров-ортонормализаторов Φ и Φ_1 , позволяет свести реализацию решения (2) к виду (8), обладающему более высокой численной устойчивостью. Последняя характеризуется тем, что алгоритм (8) требует меньшей разрядности вычислителя, чем алгоритм (2), причем требуемая разрядность может различаться в полтора – два раза. Платой за это является увеличение объема вычислений – в худшем случае вдвое.

Литература

1. Ратынский М.В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках. М.: Радио и связь, 2003.
2. Frost O.L. An algorithm for linearly constrained adaptive array processing // Proc. IEEE. 1972. V.60. No.8. P.926 – 935.
3. Applebaum S.P., Chapman D.J. Adaptive arrays with main beam constraints // IEEE Trans. Antennas and propag. 1976. Vol. 24. No. 5. Pp. 650-662.
4. Takao K., Fujita M., Nishi T. An adaptive antenna array under directional constraint // IEEE Trans. Antennas and propag. 1976. Vol. 24. No. 5. Pp. 662-669.
5. Chapman D.J. Partial adaptivity for the large array // IEEE Trans. Antennas and propag. 1976. Vol. 24. No. 5. Pp. 685-696.
6. Brandwood D.H. A complex gradient operator and its application in adaptive array theory // IEE Proc. Pts.F and H. Vol. 130. No.1. Pp.11-16.
7. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980.
8. Ратынский М.В., Кирьямасов А.К. Оценка разрядности вычислительного устройства, требуемой для решения задач обработки стохастических сигналов // Цифровая обработка сигналов. 2016. № 4. С.40-42.
9. Van Trees H.L. Detection, estimation and modulation theory. Part IV. Optimum array processing. New York: Wiley, 2002.
10. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.

УДК 621.396: 519.21

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ МОДЕМА ПРИ ПРИЁМЕ СИГНАЛА С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПО ЗАКОНУ ТИХОНОВА

Вешкурцев Ю.М., д.т.н., профессор, президент Института радиозлектроники, сервиса и диагностики, чл.-корр. Академии Инженерных Наук им. А.М. Прохорова, e-mail: yum1940@mail.ru.

NOISE IMMUNITY OF THE MODEM WHEN RECEIVING A SIGNAL WITH THE DISTRIBUTION OF INSTANTANEOUS VALUES ACCORDING TO TIKHONOV'S LAW

Veshkurtsev Yu.M.

The search for alternative methods of transmission and processing of information using digital technologies continues. A modem for data transmission by modulation of the characteristic function of the signal with moderate randomness, instantaneous values of which are distributed according to the Tikhonov law, is proposed. Noise immunity of a new generation modem when working in a channel with noise is qualitatively and quantitatively estimated. It is theoretically established that the noise immunity of the modem is at least two orders of magnitude higher than this characteristic of the known device.

Key words: modem, characteristic function, randomness, noise immunity, signal-to-noise ratio, Tikhonov's law.

Ключевые слова: модем, характеристическая функция, хаотичность, помехоустойчивость, отношение сигнал/шум, закон Тихонова.

Введение

Поиск методов надёжной передачи, хранения и обработки информации ведётся постоянно. Уже предложены к рассмотрению информационные технологии на основе динамического хаоса [1] и другие. В частности, очень близко к направлению динамического хаоса находится статистическая радиотехника с большим арсеналом случайных процессов и случайных величин, распределенных по законам теории вероятности и математической статистики. Сигналы систем с хаотической динамикой (хаотические сигналы) эквивалентны случайным процессам. Поэтому информационные технологии в равной мере можно применить к случайным процессам и к сигналам с умеренной хаотичностью, например, к квазидетерминированным сигналам. Известно [2] теоретическое описание работы модема в канале с шумами и модулированными сигналами, мгновенные значения которых распределены по закону Тихонова. При этом модулируются не параметры сигнала (амплитуда, фаза, частота), а характеристическая функция. В данной статье продолжено исследование с целью построения модема с использованием нового алгоритма модуляции характеристической функции сигнала с умеренной хаотичностью. Терминология и математические зависимости из работы [2] сохранены и дополнены.

Структура модема

Рассмотрим квазидетерминированный сигнал с математической моделью вида

$$u_1(t) = a \sin(\omega_0 t + \eta), \quad (1)$$

где ω_0 – постоянная круговая частота сигнала; a – случайная величина (амплитуда сигнала); η – случайная

Проводится поиск альтернативных методов передачи, обработки информации с использованием цифровых технологий. Предложен модем для передачи данных путем модуляции характеристической функции сигнала с умеренной хаотичностью, мгновенные значения которого распределены по закону Тихонова. Качественно и количественно оценивается помехоустойчивость модема нового поколения при работе в канале с шумами. Теоретически установлено, что помехоустойчивость модема, как минимум, на два порядка превышает эту характеристику известного устройства.

величина (начальный угол сдвига фаз сигнала). Мгновенные значения сигнала (1) распределены по закону Тихонова в пределах $-\pi \dots +\pi$. Это удобно для построения модема, поскольку нет резких перепадов амплитуды сигнала, закон распределения которой определен в работе [2]. В дальнейшем потребуется характеристическая функция (ХФ) сигнала (1), которая равна

$$\Theta(V_m) = I_{V_m}(D) / I_0(D), \quad (2)$$

где V_m – параметр ХФ; $I_{V_m}(\cdot)$ – функция Бесселя V_m -го порядка первого рода; D – параметр закона распределения Тихонова. Для передачи цифровой информации эта функция модулируется телеграфным сигналом $s(t)$ в виде последовательности логических «0» и «1». В результате этого модель сигнала (1) принимает форму

$$u_2(t) = [a + e_0 \times s(t)] \sin(\omega_0 t + \eta), \quad (3)$$

где e_0 – математическое ожидание сигнала. ХФ сигнала (3) будет другой, она имеет следующий вид [2]

$$\Theta(V_m) = \frac{I_{V_m}(D)}{I_0(D)} \exp(jV_m e_0) = A(V_m) + jB(V_m), \quad (4)$$

где $A(V_m)$, $B(V_m)$ – действительная и мнимая части ХФ соответственно. В отличие от (3) ХФ (2) является вещественной, мнимая часть её равна нулю. Обе ХФ зависят от параметра D закона распределения Тихонова и параметра ХФ, который принимает целочисленные значения на всей числовой оси от $-\infty$ до ∞ . Примем значение $V_m = 1$.

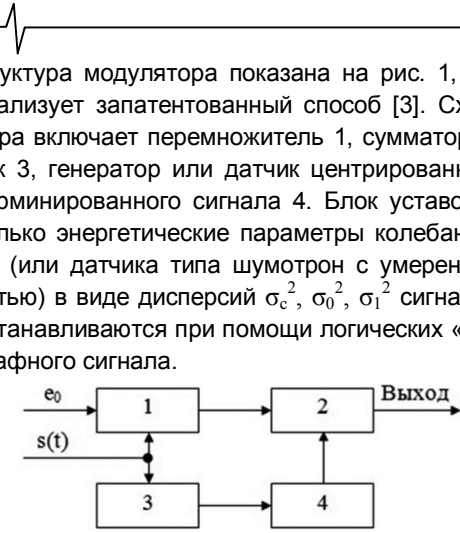


Рис. 1. Структурная схема модулятора

Математическое ожидание e_0 вводится с помощью телеграфного сигнала $s(t)$ по другому каналу, содержащему множитель 1 и сумматор 2, на который поступает центрированный квазидетерминированный сигнал (ЦКС) от датчика (или генератора). В результате этих преобразований на выходе модулятора получим нецентрированный квазидетерминированный сигнал (НКС). Сигналы ЦКС и НКС являются продуктами цифровой технологии. В результате этого характеристическая функция сигнала (3) будет модулирована, причем дисперсия сигнала (3) постоянна и равна $\sigma_c^2 = \sigma_0^2 = \sigma_1^2$. Значение σ_c^2 – дисперсии сигнала известно [4, с. 348]

$$\sigma_c^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} I_n(D)}{n^2 I_0(D)}. \quad (5)$$

Установим в модуляторе следующий алгоритм модуляции сигнала: при значении $s(t) = 0$ параметр $D = 2$, дисперсия $\sigma_c^2 = \sigma_0^2 = 0,7645$, $e_0 = 0$; при значении $s(t) = 1$ параметр $D = 2$, дисперсия $\sigma_c^2 = \sigma_1^2 = 0,7645$, $e_0 = 0,8$. Применительно к ХФ сигнала (3) при значении $V_m = 1$ получим: если $s(t) = 0$, то имеем функции вида $A(1, t) = I_1(2) / I_0(2)$, $B(1, t) = 0$;

когда $s(t) = 1$, то имеем функции вида

$$\begin{aligned} A(1, t) &= I_1(2) / I_0(2) \cos(e_0), \\ B(1, t) &= I_1(2) / I_0(2) \sin(e_0), \end{aligned} \quad (7)$$

причем функция $A(1, t)$ и функция $B(1, t)$ изменяются во времени в противофазе. Кстати, область времени появляется за счет телеграфного сигнала.

Для преобразования квазидетерминированного сигнала (3), ХФ которого модулирована телеграфным сигналом, нами на уровне изобретения разработано устройство [5], структура которого показана на рис. 2.

Дадим краткое пояснение. Демодулятор содержит АЦП 1, множитель 2, функциональные преобразователи синус 3 и косинус 4, накапливающие усредняющие сумматоры 5, 6, пороговые устройства 7, 8, шину управления «Синхронизация». В выходной цепи устройства 8 стоит инвертор. Другие обозначения показаны на рис. 2. Поясним, что демодулятор измеряет оценку дей-

ствительной части и оценку мнимой части ХФ сигнала (3), которые соответственно равны

$$\hat{A}(V_m, t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos[V_m u_2(k\Delta t)], \quad (8)$$

$$\hat{B}(V_m, t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin[V_m u_2(k\Delta t)], \quad (9)$$

где N – объем выборки дискретных мгновенных значений сигнала $u_2(k\Delta t)$; Δt – интервал дискретизации сигнала. При поступлении команды «Синхронизация» значения этих оценок сравниваются в пороговых устройствах с порогами Π_{1c} , $\Pi_{2к}$, а решения принимаются в соответствии с выполнением следующих неравенств:

- 1) если $\hat{B}(V_m, t) < \Pi_{1c}$, то считают, что принят логический «0»;
- 2) если $\hat{B}(V_m, t) \geq \Pi_{1c}$, то считают, что принята логическая «1»;
- 3) если $\hat{A}(V_m, t) \geq \Pi_{2к}$, то считают, что принята логическая «1»;
- 4) если $\hat{A}(V_m, t) < \Pi_{2к}$, то считают, что принят логический «0».

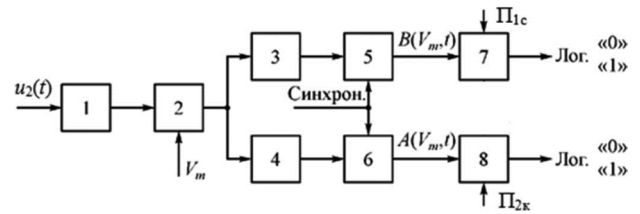


Рис. 2. Структурная схема демодулятора

При невыполнении записанных выше неравенств возникают ошибки в решении относительно принятого символа телеграфного сигнала. Для удобства описания последовательное соединение блоков 3, 5, 7 назовем синусным каналом демодулятора, а блоков 4, 6, 8 – косинусным каналом демодулятора. Таким образом, демодулятор имеет два независимых канала.

Пороги в блоках 7,8 устанавливаются в соответствии с рекомендациями

$$\begin{aligned} \Pi_{1c} &= K_1 \Pi_1, \quad \Pi_{2к} = K_2 \Pi_2, \\ \Pi_1 &= I_1(2) / I_0(2) \sin(e_0), \quad \Pi_2 = I_1(2) / I_0(2), \end{aligned} \quad (10)$$

где K_1 , K_2 – вариативные коэффициенты. С их помощью можно настраивать демодулятор подобно музыкальному инструменту. Можно повышать его помехоустойчивость для слабых сигналов, понижая при этом помехоустойчивость для сильных сигналов, или наоборот. Этому способствует свойство ХФ [6].

Помехоустойчивость модема

Перейдем к анализу помехоустойчивости демодулятора при действии на его входе аддитивной смеси квазидетерминированного сигнала (3) и «белого» шума

$$z(t) = u_2(t) + n(t), \quad (11)$$

где $u_2(t)$ – сигнал; $n(t)$ – «белый» шум с ХФ вида $\Theta(V_m) = \exp(-V_m^2 \sigma_u^2 / 2)$.

С помощью выражений (10) рассчитаем пороги в демо-

дуляторе. В итоге, при значении $V_m = 1$ и $D = 2$, $e_0 = 0,8$ получим

$$\Pi_1 = \frac{I_1(D)}{I_0(D)} \sin(e_0) = 0,5, \quad \Pi_2 = \frac{I_1(D)}{I_0(D)} = 0,7.$$

При значении $V_m = 1$, $s(t) = 0$ определим для аддитивной смеси (11) действительную часть ХФ

$$A_z(1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(z)W(z)dz = \frac{I_1(D)}{I_0(D)} \exp\left(-\frac{\sigma_c^2}{2h^2}\right), \quad (12)$$

где $h = \sigma_c / \sigma_w$ – отношение сигнал/шум. Когда $s(t) = 0$, аналогично (12) вычислим при значении $V_m = 1$ для аддитивной смеси (11) мнимую часть ХФ

$$B_z(1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(z)W(z)dz = 0, \quad (13)$$

Результаты (12), (13) нуждаются в количественном анализе. В табл. 1, 2 представлены результаты вычислений при $\Pi_1 = 0,5$, $\Pi_2 = 0,7$, $K_1 = 0,5$, $K_2 = 0,715$.

Анализ данных табл. 1 показывает, что в косинусном канале демодулятора логический «0» определяется без ошибок в диапазоне отношений по мощности сигнал/шум от 10 до 100 раз или от 10 дБ до 20 дБ. В табл. 2 представлены идеальные результаты, т.к. логический «0» в синусном канале демодулятора определяется без ошибок, т.е. с предельной помехоустойчивостью, при любом отношении по мощности сигнал/шум. Это позволяет говорить о том, что простые команды управления типа включить-выключить, открыть-закрыть и другие будут приняты с достоверностью, равной единице, в любых условиях работы модема.

Пусть на входе демодулятора аддитивная смесь (11) содержит нецентрированный квазидетерминированный сигнал, это соответствует условию $s(t) = 1$. Аналогично

(12) при значении $V_m = 1$ определим

$$A_z(1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(z)W(z - e_0)dz = \frac{I_1(D)}{I_0(D)} \exp\left(-\frac{\sigma_c^2}{2h^2}\right) \cos(e_0). \quad (14)$$

или аналогично (13) при значении $V_m = 1$ вычислим

$$B_z(1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(z)W(z - e_0)dz = \frac{I_1(D)}{I_0(D)} \exp\left(-\frac{\sigma_c^2}{2h^2}\right) \sin(e_0). \quad (15)$$

Результаты (14), (15) нуждаются в количественном анализе. В табл.3, 4 приведены данные вычислений при $\Pi_1 = 0,5$, $\Pi_2 = 0,7$, $K_1 = 0,5$, $K_2 = 0,715$.

При выбранных значениях порогов по данным табл. 3 и табл. 4 различие логической «1» от нуля в синусном канале демодулятора происходит без ошибок в диапазоне отношений по мощности сигнал/шум от 1 до 100 раз, т.е. в диапазоне, равном 20 дБ. При этом в косинусном канале демодулятора предельная помехоустойчивость сохраняется при отношении по мощности сигнал/шум от 0,001 до 1, т.е. при отношении по мощности сигнал/шум 30 дБ. При отношении по мощности сигнал/шум больше единицы в косинусном канале демодулятора появляются ошибки, а при значениях $h^2 > 10$ ошибки доминируют.

Перейдем от качественного анализа данных к количественной оценке помехоустойчивости модема. В табл.1-4 приняты следующие обозначения: P_0 – вероятность ошибок при приёме логического «0»; P_1 – вероятность ошибок при приёме логической «1»;

Таблица 1

Порог Π_{2k}	0,7 · 0,715 = 0,5					
Оценка $A_z(1, t)$	0	0	0,015	0,48	0,67	0,7
Отношение h^2	0,001	0,01	0,1	1,0	10	100
Вероятность ошибок P_1	1	1	1	1	$2 \cdot 10^{-45}$	$2 \cdot 10^{-45}$

Таблица 2

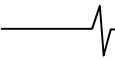
Порог Π_{1c}	0,5 · 0,5 = 0,25					
Оценка $B_z(1, t)$	0	0	0	0	0	0
Отношение h^2	0,001	0,01	0,1	1,0	10	100
Вероятность ошибок P_0	$8 \cdot 10^{-32}$	$8 \cdot 10^{-32}$	$8 \cdot 10^{-32}$	$8 \cdot 10^{-32}$	$8 \cdot 10^{-32}$	$8 \cdot 10^{-32}$

Таблица 3

Порог Π_{1c}	0,5 · 0,5 = 0,25					
Оценка $B_z(1, t)$	0	0	0	0,34	0,48	0,5
Отношение h^2	0,001	0,01	0,1	1,0	10	100
Вероятность ошибок P_1	1	1	1	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$3,7 \cdot 10^{-27}$	$8 \cdot 10^{-32}$

Таблица 4

Порог Π_{2k}	0,7 · 0,715 = 0,5					
Оценка $A_z(1, t)$	0	0	0,01	0,33	0,47	0,49
Отношение h^2	0,001	0,01	0,1	1,0	10	100
Вероятность ошибок P_0	0	0	0	0	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$



$P = 1/2(P_0 + P_1)$ – суммарная вероятность ошибок устройства.

Количественная оценка помехоустойчивости модема

В выражениях (8, 9) вместо оператора математического ожидания применён идеальный сумматор. И, как результат этого, получаем оценки действительной и мнимой частей ХФ. Обе оценки – это случайные величины, имеющие свои свойства и законы распределения. Напомним, что оценки действительной и мнимой частей ХФ являются эффективными, состоятельными и не смещёнными. Это показано в более ранних работах автора, например [7], в которых эффективность оценок характеризуется с помощью их дисперсий. В книге [7, с. 95-96] приведена зависимость дисперсии оценок (8,9) от безразмерного времени $S = T \cdot \Delta F_s$, где T – длительность реализации сигнала; ΔF_s – ширина энергетического спектра сигнала. При значении $S = 100$ дисперсия оценки действительной части ХФ. $\sigma_A^2 = 10^{-4}$, дисперсия оценки мнимой части ХФ. $\sigma_B^2 = 10^{-3}$. Значение $S = 100$ получим тогда, когда примем $T = N \cdot \Delta t = 10^3 \cdot 0,1 \text{ мс} = 0,1 \text{ с}$ и $\Delta F_s = 1000 \text{ Гц}$. Здесь обозначения заимствованы из выражений (8, 9).

Закон распределения оценок действительной и мнимой частей ХФ зависит от плотности вероятности аддитивной смеси сигнала и шума. Пусть в первом приближении он будет нормальным, поскольку точно решить математически эту задачу сложно, а может быть даже и не возможно. По словам профессора С.Я. Виленкина, который долгие годы решал подобные задачи, «... точное решение возможно только в отдельных случаях [8, с.106] ». Например, там же автор вывел точный закон распределения оценки корреляционной функции гауссова сигнала, а затем после некоторых допущений предлагал считать его приближенно нормальным. Последуем этому примеру.

Далее поступаем аналогично процедуре дискретизации непрерывной величины по уровню, причем один уровень равен порогу, а второй уровень не ограничен порогом, т.е. он вариативен без отрицательных последствий для вероятности ошибок. При этом считаем, что центр закона распределения совпадает со значением оценки ХФ, записанной в табл. 1-4, т.к. оценки являются не смещёнными. Между значением оценки и порогом есть коридор, он разный при изменении h^2 . Если значение оценки ХФ выходит за границу коридора, то появляется ошибка при приёме логического элемента. Например, коридор равен 0,17 в табл. 1 при значении $h^2 = 10$. Значение коридора делим на «сигму», т.е. на σ_A оценки действительной или на σ_B оценки мнимой части ХФ в зависимости от рассматриваемого канала демодулятора. Среднее квадратичное значение оценки в косинусном канале равно $\sigma_A = 0,01$, поэтому получа-

ем количество «17 сигм», разделяющих эти два значения. Затем применяем правило, аналогичное правилу «трех сигма», и рассчитываем значение интеграла ошибок при « L сигмах». В нашем примере $L = 17$. Вероятность ошибки, интересующая нас, будет равна разности между единицей и значением интеграла ошибок. К сожалению, в справочниках по специальным функциям [9] значения интеграла ошибок ограничены размером $L \leq 10$. Поэтому в табл. 1-4 значения вероятности ошибок местами завышены, например, в табл.1 при $h^2 \geq 10$. На самом деле ошибки будут ещё меньше.

Суммарная вероятность ошибок синусного (кривая 1, 2, 3) и косинусного (кривая 4, 5, 6) каналов демодулятора при разных значениях параметра D показана на рис. 3. Для сравнения там же из работы [4, с. 478] приведена вероятность ошибок (кривая 7) идеальной фазовой модуляции (ФМ), рассчитанная в канале с шумами. Главные фрагменты этой помехоустойчивости занесены в табл. 5.

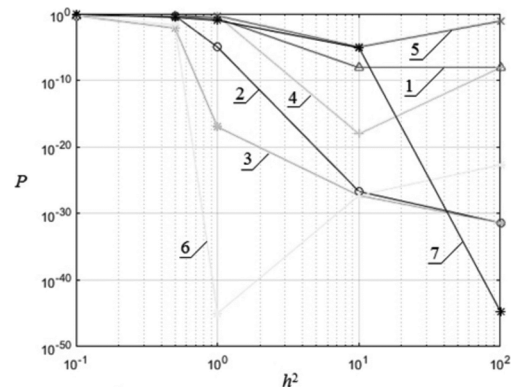


Рис. 3. Суммарная вероятность ошибок синусного и косинусного каналов

Анализ кривых на рис.3 подтверждает, что помехоустойчивость синусного и косинусного каналов демодулятора разная и зависит от D – параметра закона Тихонова. По данным табл.5 желательно значение параметра брать большим, причем оптимальное значение его можно получить только в результате проведения дополнительных исследований. Сравнение помехоустойчивости нового модема с помехоустойчивостью известного устройства, в котором применена идеальная ФМ, показывает превосходство его характеристик, как минимум, на десять порядков, если анализировать слабые сигналы, когда $h^2 \leq 10$. При сильных сигналах, когда $h^2 > 10$, помехоустойчивость идеальной ФМ выше. Косинусный и синусный каналы модема настроены с помощью вариативных коэффициентов по разному. В косинусном канале модема самая высокая помехоустойчивость при значении $D = 5$ получается при отношении $h^2 = 1$ (кривая 6), а с увеличением значения h^2 она понижается. Этот канал модема пригоден для работы с предельной помехоустойчивостью со слабыми сигналами. В синусном канале модема сделано наоборот (кривая 3). Сопоставление полученных данных с результатами других работ [10] выявляет их превосходство, как минимум, на два порядка.

Таблица 5

Синусный канал	D = 1	Кривая 1	0,5	0,5	$2 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-9}$	$8 \cdot 10^{-9}$
	D = 2	Кривая 2	0,5	0,5	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-27}$	$4 \cdot 10^{-32}$
	D = 5	Кривая 3	0,5	$7 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-17}$	$5 \cdot 10^{-28}$	$4 \cdot 10^{-32}$
Косинусный канал	D = 1	Кривая 4	0,5	0,5	0,5	$9 \cdot 10^{-19}$	$8 \cdot 10^{-9}$
	D = 2	Кривая 5	0,5	0,5	0,5	$1 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-2}$
	D = 5	Кривая 6	0,5	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-45}$	$5 \cdot 10^{-28}$	$2 \cdot 10^{-23}$
Идеальная ФМ	Кривая 7		0,9	$3 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-45}$
Отношение h^2			0,1	0,5	1	10	100

Заключение

Предложен и исследован альтернативный метод передачи информации с использованием цифровой технологии и умеренной хаотичности. На уровне изобретения построен модем нового поколения для приема модулированных сигналов с распределением по закону Тихонова, количественно и качественно оценена его помехоустойчивость при работе в канале с «белым» шумом. Показано, что помехоустойчивость модема, как минимум, на два порядка лучше этой характеристики известного устройства с многопозиционной частотной манипуляцией, а также устройства с идеальной фазовой модуляцией.

Литература

1. Гуляев Ю.В. Информационные технологии на основе динамического хаоса для передачи, обработки, хранения и защиты информации / Ю.В. Гуляев, Р.В. Беляев, Г.Н. Воронцов, Н.Н. Зологин, В.И. Калинин, Э.Е. Кальянов, В.В. Кислов, В.Я. Кислов, В.В. Колесов, Е.А. Мясин, Е.П. Чигин // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии, 2018. Т. 10. – № 2. – С. 279 – 312.
2. Вешкурцев Ю. М. Построение теории модуляции с использованием нового статистического закона для формирования квазидетерминированного сигнала // Наука и Мир, 2019. – № 5 (69). Т. 2. – С. 17 – 26.
3. Вешкурцев Ю.М. Способ модуляции сигнала: пат. 2626554, Рос. Федерация. № 2016114366/5 / Вешкур-

цев Ю.М., Вешкурцев Н.Д., Алгазин Е.И.; заявл. 13.04.2016; опубл. 28.07.2017, Бюл. № 22. 5 с.

4. Тихонов, В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Сов. радио, 1966. – 678 с.

5. Вешкурцев Ю.М. Способ демодуляции сигнала: пат. 2626332, Рос. Федерация. № 2016131149/27 / Вешкурцев Ю.М., Вешкурцев Н.Д., Алгазин Е.И.; заявл. 27.07.2016; опубл. 26.07.2017, Бюл. № 21. 5 с.

6. Вешкурцев Ю.М. Фильтрация в пространстве вероятностей аддитивной смеси нецентрированного квазидетерминированного сигнала и шума / Ю.М. Вешкурцев, Н.Д. Вешкурцев, Д.А. Титов // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика, 2018. – № 3. – С. 18 – 23.

7. Вешкурцев Ю.М. Прикладной анализ характеристической функции случайных процессов. – М.: Радио и связь, 2003. – 204 с.

8. Виленкин С.Я. Статистическая обработка результатов исследования случайных функций. – М.: Энергия, 1979. – 320 с.

9. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. Пер. с англ. Под ред. В.А. Диткина и Л.Н. Карамзиной. – М.: глав. ред. физ. – мат. литер., 1979. – 832 с.

10. Пузырёв П.И., Завьялов С.А., Ерохин В.В., Шейн В.Ю. Низкоскоростной модем для передачи данных малого объема в средневолновом диапазоне частот для территории Арктики // Омский научный вестник, 2018. – № 4 (160). – С. 145 – 151.

ОЦЕНКА ВЫСОТЫ ЦЕЛИ В РАДИОЛОКАТОРАХ МЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА ВОЛН

Пахотин В.А., д.ф.-м.н., профессор Института физико-технических наук и информационных технологий Балтийского федерального университета им. И. Канта (БФУ им. И. Канта), e-mail: VPakhotin@kantiana.ru;

Симонов Р.В., аспирант Института физико-технических наук и информационных технологий (БФУ им. И. Канта);

Власова К.В., к.ф.-м.н., доцент Балтийской государственной академии ПФ, e-mail: p_ksenia@mail.ru;

Бессонов В.А., к.ф.-м.н., доцент Института физико-математических наук и информационных технологий (БФУ им. И. Канта), e-mail: VBessonov@kantiana.ru.

ASSESSMENT OF HEIGHT OF THE PURPOSE IN RADARS OF METER WAVE BAND

Pakhotin V. A., Simonov R. V., Vlasova K. V., Bessonov V. A.

The problem of assessment of height of the purpose in radars of meter wave band connected with an interference of a straight line and reflected from the Earth's surface by waves is considered. In the field of small corners of the place of the directional pattern for a straight line and the reflected wave merge together and significantly distort estimates of corners of the place of the purpose (purpose height). The possibility of the solution of a problem of assessment of corners of the place (purpose height) is analyzed by three methods: by the method of the angular spectral analysis, by method based on the credibility equations, by method of maximum likelihood with the high resolution developed in BFU of I. Kant. Results of model researches of potential opportunities of estimates of corners of the place (purpose height) are presented by three methods. It is shown that the method of maximum likelihood with high resolution has no systematic interferential errors of estimates of corners of the place, both in the field of small correlation, and in the field of big correlation of a straight line and reflected waves. This method together with accounting of a tropospheric refraction solves a purpose height assessment problem at ranges to distance of direct visibility at the relation signal/noise ≈ 30 dB.

Key words: radar-tracking systems, method of maximum likelihood, angular spectral analysis, assessment of corners of the place, purpose height.

Ключевые слова: радиолокационные системы, метод максимального правдоподобия, угловой спектральный анализ, оценка углов места.

Введение

Современные радиолокационные системы (РЛС) являются сложными радиотехническими устройствами, предназначенными для оценки координат воздушных целей. Однако, если азимут и дальность до цели оцениваются в них вполне удовлетворительно, то угол места цели и связанная с ним высота цели, оцениваются неудовлетворительно. Это обусловлено техническим ограничением, связанным с размером вертикальной составляющей антенной системы. Для радиоволн с длиной волны около метра и более сложно создать узкие по ширине диаграммы направленности в вертикальной (угломестной) плоскости. В результате при малых углах места диаграммы направленности для прямой волны и волны, отраженной от поверхности земли, частично перекрываются. В этих условиях, используемый в современных РЛС метод углового спектрального анализа приводит к существенным систематическим погрешностям, которые при пересчете в погрешности высоты цели могут достигать 50 % и более. При этом реальная дальность РЛС, при которой можно оценивать высоту воздушной цели оказывается ограниченной областью малой корреляции прямой и отраженной волн, когда критерий разре-

Рассмотрена проблема оценки высоты цели в радиолокаторах метрового диапазона волн, связанная с интерференцией прямой и отраженной от поверхности земли волнами. В области малых углов места диаграммы направленности для прямой и отраженной волны сливаются вместе и существенно искажают оценки углов места цели (высоты цели). Анализируется возможность решения задачи оценки углов места (высоты цели) тремя методами: методом углового спектрального анализа, методом, основанным на уравнениях правдоподобия, методом максимального правдоподобия с высоким разрешением, разработанным в БФУ им. И. Канта. Представлены результаты модельных исследований потенциальных возможностей оценок углов места (высоты цели) тремя методами. Показано, что метод максимального правдоподобия с высоким разрешением не имеет систематических интерференционных погрешностей оценок углов места, как в области малой корреляции, так и в области большой корреляции прямой и отраженной волн. Данный метод совместно с учетом тропосферной рефракции решает проблему оценки высоты цели при дальностях до расстояния прямой видимости при отношении сигнал/шум ≈ 30 дБ.

шения Рэлея выполняется. Например, при высоте цели 10 км эта дальность равна всего 100 км при расстоянии прямой видимости 350 км.

Второй причиной не удовлетворительных оценок углов места (высоты цели) является взаимное подавление диаграмм направленности для прямой и отраженной волны. При этом отношение сигнал/шум, при стремлении угла места к нулю, стремится к нулевому значению. Расстояние прямой видимости в современных локаторах

оказывается недостижимым. Обнаружение сигнала, отраженного от цели, и оценка его параметров возможна на дальностях, отличающихся от расстояния прямой видимости на 100 и более км.

Целью настоящей работы является исследование потенциальных возможностей оценки углов места воздушных целей (высоты цели) тремя методами: методом углового спектрального анализа [1] методом, основанном на уравнениях правдоподобия [2, 3], методом максимального правдоподобия, основанным на анализе поверхности функционала правдоподобия [4, 5]. В работе предполагается учесть явление тропосферной рефракции для увеличения предельной дальности РЛС при оценке параметров сигнала [7].

Основы теории

Рассмотрим основные положения теории, определяющей оценку углов места (высоты) воздушных целей. Для определенности примем в качестве антенной системы многоканальную антенную систему существующей РЛС «Резонанс» [8, 9] с небольшими конструктивными изменениями, увеличивающими эффективность оценки параметров сигнала. Она представляет собой совокупность 64-х вертикальных линеек элементарных вибраторов, равномерно распределенных по периметру квадрата со стороной 34,5 м. Каждая линейка содержит 10 элементарных вибраторов (ее длина 25 м). Положение элементарных вибраторов в пространстве определяется радиус-вектором $\bar{R}_{n,m,k}$, индексы которого определяют номер вибратора вдоль осей x, y, z . Запишем принятую реализацию на отдельном вибраторе в виде

$$\hat{Y}_{n,m,k} = \hat{U}_1 \exp(-i(\bar{k} \bar{R}_{n,m,k})) + \hat{U}_2 \exp(i(\bar{k} \bar{R}_{n,m,k})) + \hat{U}_{ш n,m,k}, \tag{1}$$

где \hat{U}_1, \hat{U}_2 – комплексные вертикальные составляющие напряженности поля для прямой и отраженной волны, $\hat{U}_2 = \hat{U}_1 \hat{F}$, \hat{F} – комплексный коэффициент отражения Френеля для вертикальной составляющей поля, \bar{k} – волновой вектор прямой волны, $\hat{U}_{ш n,m,k}$ – нормальный шум в точке пространства с дисперсией σ^2 , средним значением квадратурных составляющих, равным нулю, и интервалом корреляции τ_k .

На основании выражения (1) запишем функционал правдоподобия в виде [7].

$$\Delta \left(\hat{U}_1, \hat{U}_2, \bar{k} \right) = \sum_{n,m,k} \left| \hat{Y}_{n,m,k} - \hat{U}_1 \exp \left(-i \left(\bar{k} \bar{R}_{n,m,k} \right) \right) - \hat{U}_2 \exp \left(i \left(\bar{k} \bar{R}_{n,m,k} \right) \right) \right|^2. \tag{2}$$

Штрихами отмечены неизвестные оцениваемые параметры сигнала. Дифференцируя (2) по \hat{U}_1 и \hat{U}_2 и, приравнявая дифференциалы нулю, можно получить уравнения правдоподобия. Решая эти уравнения, получим функциональные зависимости, определяющие раздельные диаграммы направленности для прямой и отраженной волн.

$$\hat{U}_1(\bar{k}) = \frac{1}{NMK} \sum_{n,m,k} \left(\hat{Y}_{n,m,k} \right) \frac{f1(\bar{k})}{1 - \left| \hat{R}(\bar{k}) \right|^2};$$

$$\hat{U}_2(\bar{k}) = \frac{1}{NMK} \sum_{n,m,k} \left(\hat{Y}_{n,m,k} \right) \frac{f2(\bar{k})}{1 - \left| \hat{R}(\bar{k}) \right|^2};$$

$$f1(\bar{k}) = \exp \left(i \left(\bar{k} \bar{R}_{n,m,k} \right) \right) - \hat{R}(\bar{k}) \exp \left(-i \left(\bar{k} \bar{R}_{n,m,k} \right) \right);$$

$$; f2(\bar{k}) = \exp \left(-i \left(\bar{k} \bar{R}_{n,m,k} \right) \right) - \hat{R}^*(\bar{k}) \exp \left(i \left(\bar{k} \bar{R}_{n,m,k} \right) \right);$$

$$\hat{R}(\bar{k}) = \frac{1}{K} \sum_k \exp(2i(\bar{k} \bar{R}_{n,m,k})), \tag{3}$$

где N, M, K – количество элементарных вибраторов вдоль осей X, Y, Z , $\hat{R}(\bar{k})$ – комплексный коэффициент

корреляции между прямой и отраженной волной.

Преобразуем функционал правдоподобия (2), используя предложение К. Хелстрема [6]. Необходимость преобразования связана с тем, что поверхность функционала правдоподобия (2) имеет большое количество локальных минимумов, среди которых сложно найти глобальный минимум. Согласно К. Хелстрому, подставим (3) в выражение (2). В этом случае функционал правдоподобия будет зависеть лишь от волнового вектора \bar{k} и исключаются локальные минимумы его поверхности. Дополнительно возведем полученное выражение в квадрат и преобразуем с учетом (3) к функционалу следующего вида.

$$\Delta 1 \left(\bar{k} \right) = \sum_{n,m,k} \left| \hat{Y}_{n,m,k} \right|^2 - \tag{4}$$

$$- \sum_{n,m,k} \left| \hat{U}_1(\bar{k}) \exp \left(-i \left(\bar{k} \bar{R}_{n,m,k} \right) \right) - \hat{U}_2(\bar{k}) \exp \left(i \left(\bar{k} \bar{R}_{n,m,k} \right) \right) \right|^2.$$

Преобразованный функционал правдоподобия (4) имеет ясный физический смысл. Он является разностью мощности, принимаемой на вибраторах совокупности сигнала и шума и мощностью копии сигнала. В точке минимума, при $\bar{k} = \bar{k}$, математическое ожидание от (4) определяет дисперсию шума в принятой реализации

$$M \left(\Delta 1 \left(\bar{k} = \bar{k} \right) \right) = \sigma^2 NMK. \tag{5}$$

Для получения диаграммы направленности антенной системы в методе углового спектрального анализа, запишем функционал правдоподобия (2) в другом виде.

$$\Delta \left(\hat{U}_0, \bar{k} \right) = \sum_{n,m,k} \left| \hat{Y}_{n,m,k} - \hat{U}_0 \exp \left(-i \left(\bar{k} \bar{R}_{n,m,k} \right) \right) \right|^2. \tag{6}$$

В этом выражении принятой реализации, содержащей прямую и отраженную волну, сопоставляется плоская волна с амплитудой \hat{U}_0 и волновым вектором \hat{k} .

Дифференцируя (6) по \hat{U}_0 и приравнивая дифференциал нулю, получим выражение для диаграммы направленности суммы прямой и отраженной волны.

$$\hat{U}_0(\hat{k}) = \frac{1}{N, M, K} \sum_{n, m, k} \hat{Y}_{n, m, k} \exp\left(i \left(\hat{k} \overline{R}_{n, m, k} \right)\right). \quad (7)$$

Проведем краткий анализ выражений (3), (4), (7). Выражение для диаграммы направленности (7) получено при несоответствии правой и левой частей функционала (6). Следовательно, при наличии в принятой реализации двух и более плоских волн угловой спектральный анализ не является оптимальным методом обработки. В результате выражение (7) характеризуется интерференционным взаимодействием прямой и отраженной волны. Это приводит к систематическим интерференционным погрешностям в оценке параметров сигнала. Выражения (3) для отдельных диаграмм направленности прямой и отраженной волны включают в себя коэффициент корреляции между прямой и отраженной волной. Этим исключается интерференционное взаимодействие между ними. Массив данных на вибраторах при этом преобразуется в два независимых массива данных. Однако наличие в знаменателе значения

$$c - \left| \hat{R}(\hat{k}) \right|^2$$

приводит к появлению ложного максимума в диаграммах направленности в точках $|\hat{R}| = 1$, при угле места $\beta = 0$. Этот ложный максимум не позволяет получать оценки углов места в области малых значений (при высоте цели 10 км, угловой диапазон $0 \div 10$ градусов, дальность $100 \div 350$ км). В первых двух рассмотренных методах критерием отбора решений является максимум диаграммы направленности. В третьем методе, связанном с преобразованным функционалом правдоподобия (4), критерием отбора решений является минимум функционала. Математическое ожидание от (4) в минимуме определяет дисперсию шума (5). Этот критерий является устойчивым критерием, как в области малой корреляции прямой и отраженной волн, когда критерий Рэлея выполняется, так и в области высокой корреляции. Этот метод может быть рекомендован для оценки углов места (высоты цели) в РЛС метрового диапазона.

Рассмотрим вопрос об учете явления тропосферной рефракции при оценке высоты цели с помощью РЛС. Тропосферная рефракция увеличивает угол места цели. Для метрового диапазона волн это увеличение небольшое $\approx 0,5$ градуса. Однако оно существенно увеличивает предельную дальность РЛС при оценке высоты цели. Из геометрии траектории луча можно получить следующее выражение для пересчета оценок углов места и времени приема в оценку высоты цели.

$$H(t_0, \beta) = -R_0 + \sqrt{(ct_0 \sin(\beta) + R_0)^2 + (ct_0 \cos(\beta))^2}, \quad (8)$$

где t_0 – время приема сигнала, β – угол места цели,

c – скорость света, R_0 – радиус земли.

Для учета тропосферной рефракции, как показали исследования, достаточно в (8) заменить радиус земли R_0 на эквивалентный радиус $c_1 = 4/3 R_0$.

Таким образом, учет тропосферной рефракции увеличивает дальность РЛС при оценке высот цели и исключает систематическую погрешность оценки высоты цели, следующую из геометрии.

Результаты модельных исследований

Приведем результаты модельных расчетов, иллюстрирующих возможности оценки углов места, а следовательно, и высоты цели тремя рассмотренными методами. На рис. 1 показана зависимость от угла места модуля коэффициента корреляции между прямой и отраженной волнами. В области высокой корреляции $0 \div 7$ градусов (эквивалентные расстояния до цели $350 \div 100$ км, при высоте цели 10 км) отмечается сильное взаимодействие прямой и отраженной волн. В этой области оценки углов места можно получить лишь методом максимального правдоподобия на основе функционала правдоподобия. В области малой корреляции ($7 \div 85$ градусов) оценки углов места можно получить тремя вышеприведенными методами.

Коэффициент корреляции прямой и отраженной волны

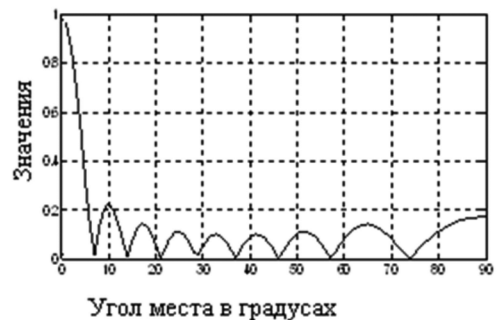


Рис. 1. Зависимость коэффициента корреляции прямого и отраженного от поверхности земли луча от угла места

Суммарная амплитуда прямой и отраженной волны

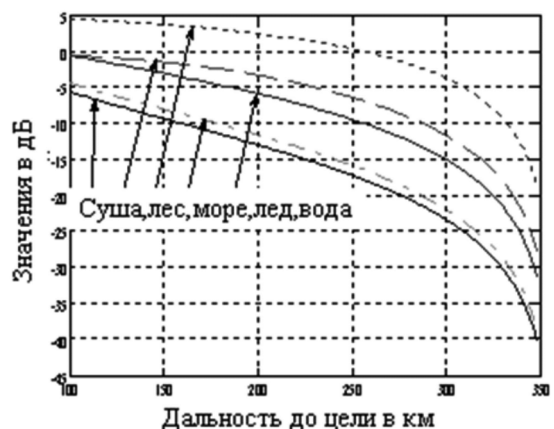


Рис. 2. Зависимость суммарной амплитуды прямой и отраженной волны от дальности до цели, высота цели 10 км

При дальностях более 300 км резко уменьшается суммарная амплитуда прямой и отраженной волны. Это приводит к значительному уменьшению отношения сигнал/шум. Расстояние прямой видимости оказывается недостижимой для РЛС дальностью. Согласно рис. 2, для получения удовлетворительных оценок углов места на расстояниях более 300 км, требуется дополнительное увеличение отношения сигнал/шум, которое для суши достигает 25 дБ. Следует отметить, что необходимое увеличение отношения сигнал/шум достигается за счет увеличения количества вибраторов, за счет повторных излучений, за счет использования сложных сигналов.

На рис. 3 показана оценка углов места методом, на основе уравнений правдоподобия (3). Диаграммы направленности, как для прямой волны, так и для отраженной волны имеют дополнительный максимум в нуле градусов. Согласно данному рисунку, ложный максимум в нуле градусов существенно затрудняет оценку малых углов места.



Рис. 3. Диаграммы направленности антенной системы по углу места. Малые углы места. Модельное значение угла места 10 градусов

На рис. 4. показана суммарная диаграмма направленности прямой и отраженной волн, полученная методом углового спектрального анализа (7). При углах места 5 градусов и меньше отмечается один суммарный максимум диаграммы направленности.



Рис. 4. Двумерная суммарная диаграмма направленности, полученная методом углового спектрального анализа

Модельные значения азимута 20 градусов, угла места 5 градусов. Прямой и отраженный лучи неортогональны, коэффициент корреляции равен 0,35. Оценка угла места 1 градус существенно отличается от модельного значения 5 градусов. На рис. 5 показана поверхность обратного функционала правдоподобия (4)

$$\Delta 2 \left(\frac{\cdot}{k} \right) = \frac{1}{\Delta 1 \left(\frac{\cdot}{k} \right)}$$

пестков, положение максимумов оценивает азимут и углы места прямой и отраженной волн. Уравнения правдоподобия (3) при этих оценках азимута и угла места определяют амплитуды прямой и отраженной волн. Значение максимума оценивает дисперсию шума в принятой реализации (5). Модельные значения азимута 20 градусов, угла места 5 градусов. Решение вполне возможно как в области малой корреляции, так и в области высокой корреляции.

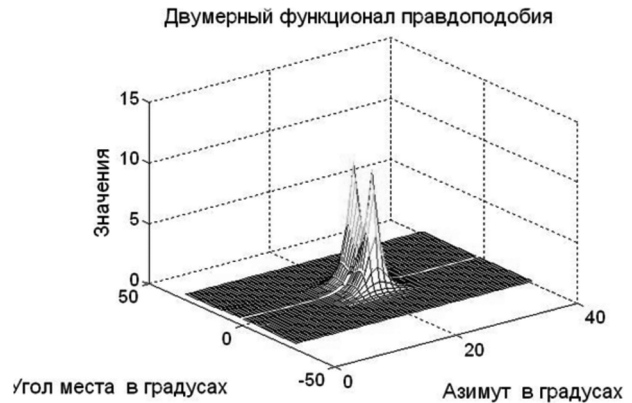


Рис. 5. Поверхность двумерного обратного функционала правдоподобия

На рис. 6 показаны погрешности оценки углов места, полученные методом углового спектрального анализа (7) и методом, основанном на функционале правдоподобия (4). Первый метод приводит к систематическим погрешностям оценок углов места за счет взаимодействия прямой и отраженной от поверхности земли волны. Погрешности существенные. Второй метод (3) имеет лишь случайные погрешности, которые зависят от отношения сигнал/шум и могут быть уменьшены за счет увеличения количества вибраторов, за счет повторных излучений, за счет использования сложных сигналов.

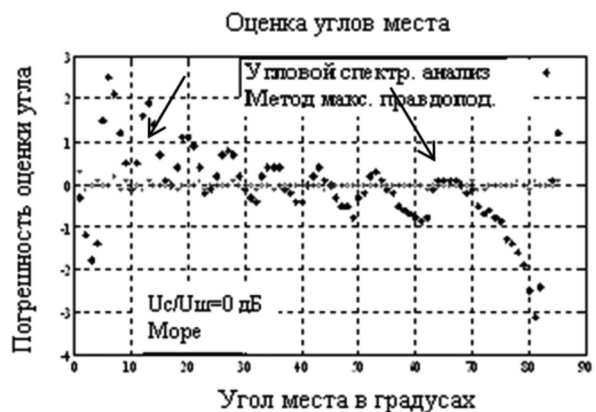


Рис. 6. Погрешности оценок углов места, полученные двумя методами при отношении сигнал/шум 10 дБ. Морская вода

На рис. 7 показаны погрешности оценок углов места при малых углах места, полученные методом углового спектрального анализа (8) и методом, основанном на функционале правдоподобия (4). Как следует из рисун-

ка, угловой спектральный анализ приводит к существенным систематическим погрешностям.

Эти погрешности отсутствуют в методе (4).



Рис. 7. Оценка углов места в области 0-10 градусов. Коэффициент корреляции меняется в пределах 0,99-0,22. Отношение сигнал/шум равно 20 дБ. Сухая земля

При переходе к оценке высоты цели в соответствии с (8) погрешности возрастают. На рис. 8 представлены оценки высоты цели в зависимости от дальности до цели. Оценки высоты цели, полученные методом углового спектрального анализа (7), неудовлетворительные. Оценки, полученные методом, основанном на функционале правдоподобия (4), увеличиваются при увеличении дальности до цели. Исходя из требований точности оценок (≈ 1 км) предельная дальность РЛС при оценке высоты цели равна 260 км.



Рис. 8. Оценка высоты цели в зависимости от дальности. Морская вода. Угол места меняется от 5,5 градуса до 0,6 градуса

При учете тропосферной рефракции предельная дальность оценки высоты цели может быть увеличена до расстояния прямой видимости (350 км при высоте цели 10 км, рис. 9). Кроме того исключаются систематические погрешности в оценке высоты цели.

На рис. 9 показаны оценки высоты цели, полученные двумя структурами РЛС. Первая структура – это существующая РЛС «Резонанс». Она содержит для оценки углов места одну вертикальную линейку вибраторов (15 вибраторов, распределенных по высоте 37,5 м.) Вторая структура РЛС – это объединенная азимутальная и угломестная системы вибраторов с 64-мя вертикальными линейками вибраторов длиной 37,5 м и количеством вибраторов 15. Как видно из рисунка, при второй структуре РЛС погрешность оценки высоты цели не превышает значения 700 м на расстоянии прямой ви-

димости 350 км. В первой структуре отчетливо проявляется систематическое завышение высоты цели, связанное с не учетом тропосферной рефракции.

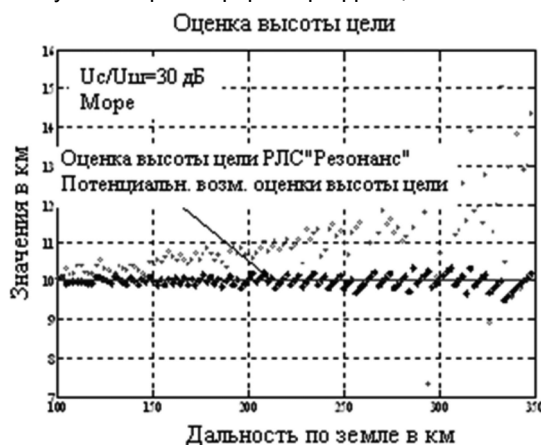


Рис. 9. Сравнение возможностей оценки высоты цели двух структур РЛС

Заключение

Основным результатом настоящей работы являются следующие выводы. Проблема оценки высоты цели по данным РЛС в области метрового диапазона волн может быть решена при выполнении следующих трех условий.

Для обработки данных необходимо использовать метод, основанный на преобразованном функционале правдоподобия, позволяющим решать задачу оценки высоты цели как в области высокой корреляции прямой и отраженной волны, так и в области малой корреляции;

Структура РЛС должна обеспечить требуемое отношение сигнал/шум с учетом существенного его уменьшения в области малых углов места за счет количества вибраторов, за счет сложных сигналов, за счет повторных излучений.

Необходим учет тропосферной рефракции, устраняющий систематическую погрешность и увеличивающий предельную дальность РЛС при оценке высоты цели.

Литература

1. Бакулев П.А. Радиолокационные системы. Учебник для вузов. – М.: Радиотехника, 2004, 320 с.
2. Перов А.И. Статистическая теория радиотехнических систем: учебное пособие для вузов. – М.: Радиотехника, 2003.-400 с.
3. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. – М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.
4. Пахотин В.А., Власова К.В. Решение задачи определения угловых координат объекта методом максимального правдоподобия. Вестник РГУ им. И. Канта. Вып. 4: сер. физико-математические науки. – Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2010. – 173с.
5. Пахотин В.А., Власова К.В., Бессонов В.А., Строков В.И., Бабинович А.И., Шустов Э.И. Технология цифровой обработки простых и широкополосных сигналов на основе функционала правдоподобия. (Пленарное заседание) Доклады 18-й Международной конференции DSPA-2016, серия: Цифровая обработка сигналов и ее применение. Т. 1, Москва, Россия, с.13-25.
6. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов. К.; Изд-во: М.: Иностранной литературы, 1963.
7. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн, М.: Горячая линия – Телеком, 2004. – 558 с.
8. Военное обозрение.dfpwar.ru
9. Военное обозрение.topwar.ru

УДК 621.391

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИЧИН ЯВЛЕНИЯ ГИББСА

Сорока Е.З., к.т.н., гл. научный сотрудник ЗАО «МНИТИ» (Московский научно-исследовательский телевизионный институт), e-mail: soroka@mniti.ru.

THE RESEARCH OF THE REASONS OF THE GIBBS PHENOMENON

Soroka E.Z.

The reasons of occurrence of the Gibbs phenomenon at the spectrum cutoff of discontinuous function have been researched. Methods of decreasing and elimination of this phenomenon by smooth limiting of the spectrum of the discontinuous function have been examined.

Key words: Gibbs phenomenon, spectrum, discontinuous function, smooth limiting.

Ключевые слова: явление Гиббса, спектр, разрывная функция, плавное ограничение.

Введение

Явление Гиббса [1-5] состоит в том, что в случае ограничении числа членов ряда Фурье для функции с разрывами первого рода возникают затухающие колебательные процессы около мест разрыва (на радиотехническом жаргоне – «звон»). Рассмотрим популярный пример – меандр $s_1(t)$ с периодом T (красный график на рис. 1 а).

Будем считать, что меандр $s(t)$ образуется путем периодизации разрывной функции

$$\begin{cases} -1 & \text{при } -T/2 < t < 0, \\ 0 & \text{при } t = 0, \quad t \geq T/2, \quad t \leq -T/2, \\ 1 & \text{при } 0 < t < T/2. \end{cases} \quad (1)$$

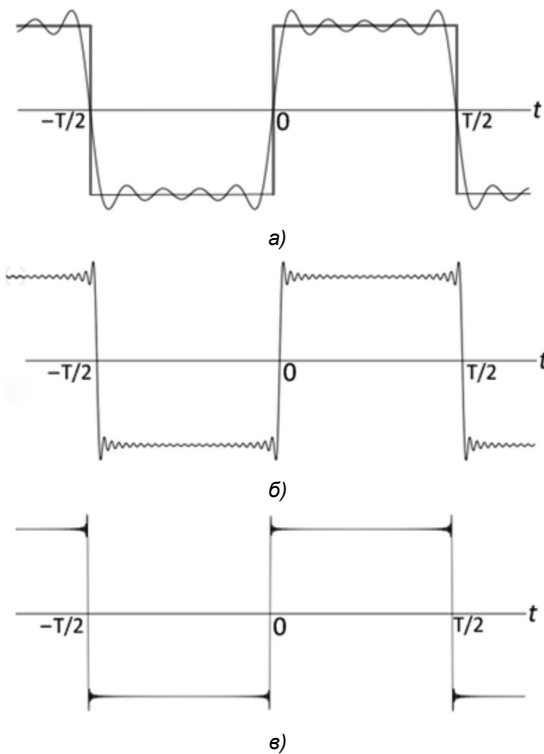


Рис. 1. Графическое представление явления Гиббса

Исследуются причины возникновения явления Гиббса при резком ограничении спектра разрывных функций и рассматриваются методы его ослабления и устранения путем перехода к плавному ограничению спектра разрывной функции.

Для описания процедуры периодизации можно использовать аппарат дискретизирующих функций [6]. При периодизации некоторой функции (ограниченной протяженности) дискретизирующая функция $D(t)$ выражается суммой смещенных дельта-функций

$$D(t) = \sum_k \delta(t - kT), \quad (2)$$

где T – интервал периодизации, $k = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$ (рис. 2).

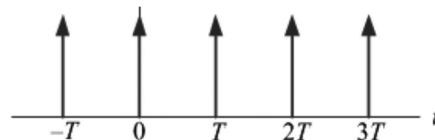


Рис. 2. Дискретизирующая (периодизирующая) функция $D(t)$

Меандр (рис. 1) как результат периодизации выражается сверткой периодизируемой разрывной функции $sig(t)$ с $D(t)$:

$$s_1(t) = \sum_k sig(t)D(t) = \sum_k sig(t - kT). \quad (3)$$

Для дальнейшего анализа используется следующая пара преобразований Фурье [7]:

Частотный спектр сигнала

$$r(f) = \mathcal{F} [r(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} r(t)e^{-j2\pi ft} dt.$$

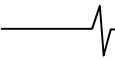
Сигнал

$$r(t) = \mathcal{F}^{-1} [r(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} r(f)e^{-j2\pi ft} df. \quad (4)$$

Здесь \mathcal{F} – прямое преобразование Фурье, \mathcal{F}^{-1} – обратное преобразование Фурье, $r(t)$ – сигнал, $r(f)$ – его спектр, t – время, f – частота.

С учетом этого спектр функции $sig(t)$ выражается как

$$\begin{aligned} sig(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} sig(t)e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} sig(t)e^{-j2\pi ft} dt = \frac{j}{\pi f} (\cos \pi f T - 1). \end{aligned} \quad (5)$$



На рис. 3 спектр $sig(f)$ представлен синим графиком (принято $T = 1$).

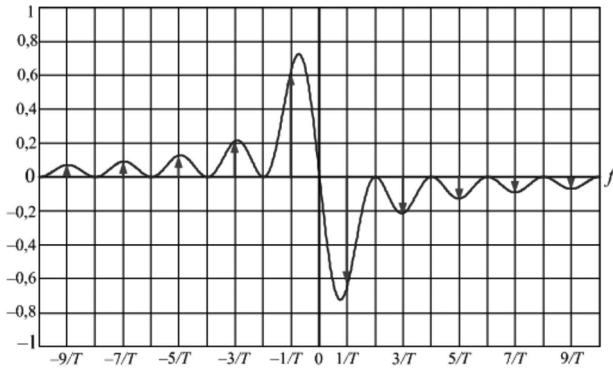


Рис. 3. Графики спектральных функций $sig(f)$ и $sI(f)$

При периодизации сигнала (с периодом T) происходит дискретизация его спектра (с периодом $F = 1/T$), а при дискретизации сигнала с периодом T происходит периодизация его спектра с периодом $F = 1/T$ [6]. При этом дискретизирующие функции $D(t)$ и $D(f)$ связаны между собой парой преобразований Фурье (4), откуда можно получить

$$D(f) = F \sum_m \delta(f - mF), \quad (6)$$

где F – период дискретизации по частоте, причем $F = 1/T$.

Определим частотный спектр меандра (3) с использованием спектральной дискретизирующей функции (6). Для этого требуется выполнить перемножение функций (5) и (6), поскольку операции свертки (при периодизации) в сигнальной области соответствует операция перемножения в области преобразования Фурье (спектральной области):

$$\begin{aligned} s_1(f) &= sig(f) F \sum_m \delta(f - mF) = \\ &= \frac{j}{\pi f} (\cos \pi f T - 1) F \sum_m \delta(f - mF). \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом выделяющего свойства дельта-функции и подстановки $F = 1/T$ (при нечетном m) спектр меандра выражается как

$$s_1(f) = \frac{j}{\pi} \sum_m \frac{1}{m} (\cos m\pi - 1) \delta\left(f - \frac{m}{T}\right). \quad (8)$$

На рис. 3 этот спектр представлен в виде отсчетов красного цвета.

Анализ искажений из-за явления Гиббса

Как справедливо отмечено в [5], ограничение числа членов ряда Фурье в разложении функции с разрывами первого рода, вызывающее явление Гиббса, эквивалентно пропусканию меандра (или другой подобной разрывной функции) через идеальный фильтр нижних частот (ФНЧ). В результате становится очевидным, что явление Гиббса можно рассматривать как результат операции

свертки меандра $s_1(t)$ с импульсной характеристикой идеального ФНЧ $g_1(t) = \sin(2\pi F_{cp} t) / \pi t$, где F_{cp} – граничная частота ФНЧ:

$$s_2(t) = s_1(t) \otimes g_1(t). \quad (9)$$

При этом чем больше полоса пропускания F_{cp} , тем выше частота возникающего колебательного процесса в $g_1(t)$ и в выходном сигнале $s_2(t)$ (см. рис. 1, черные графики а, б и в).

В большинстве источников, описывающих явление Гиббса, указывается, что колебания в выходном сигнале возникают из-за разрывов в исходном сигнале [1-4 и др.]. Отсюда вытекает, что для предотвращения явления Гиббса следует устранить разрывы во входном сигнале (т.е. сгладить его). Для проверки этого соображения воспользуемся блок-схемой, представленной на рис. 4.

Здесь ФНЧ 1 – идеальный фильтр нижних частот с амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)

$$k_1(f) = \begin{cases} 1 & \text{при } |f| < F_{cp}, \\ 1/2 & \text{при } |f| = F_{cp}, \\ 0 & \text{при } |f| > F_{cp}, \end{cases} \quad (10)$$

действие которого приводит к возникновению явления Гиббса, ФНЧ 2 – предварительный сглаживающий фильтр, который должен устранить разрывы в сигнале, поступающем на вход ФНЧ 1.

В качестве примера рассмотрим действие идеального ФНЧ 2 с полосой пропускания $k_2(f) = nF_{cp}$, т.е. в n раз более широкой, чем у ФНЧ 1. Под действием ФНЧ 2 функция на входе ФНЧ 1 станет безразрывной. Однако из-за n -кратной разницы в полосах пропускания фильтр ФНЧ 1 просто «не заметит» действия фильтра ФНЧ 2 и того, что входная функция стала безразрывной – результат останется прежним, и явление Гиббса будет таким же, что и без предварительного сглаживающего ФНЧ 2.

По-видимому, само явление возникает не только из-за того, что входная функция имеет разрывы. Фактически его причиной является ограничение спектра входного сигнала идеальным фильтром ФНЧ 1, АЧХ которого имеет разрывы, а импульсная характеристика носит колебательный (осциллирующий) характер.

Отсюда следует, что для полного устранения явления Гиббса нужно, чтобы импульсная характеристика фильтра ФНЧ 1 не содержала колебаний. Соответственно, чтобы ослабить явление Гиббса требуется уменьшение амплитуды колебаний в импульсной характеристике ФНЧ 1. Например, при использовании ФНЧ 1 с безразрывной треугольной АЧХ, имеющей граничную частоту полосы пропускания $2F$, импульсная характеристика будет иметь вид

$$g_{imp}(t) = \sin^2(2\pi Ft) / (\pi t)^2, \quad (11)$$

благодаря чему амплитуда нежелательных колебаний в выходном сигнале существенно ослабляется.

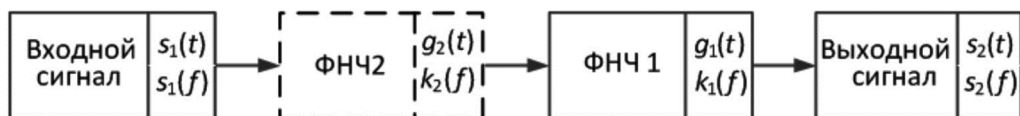


Рис. 4. Блок-схема преобразования сигнала с учетом действия фильтров

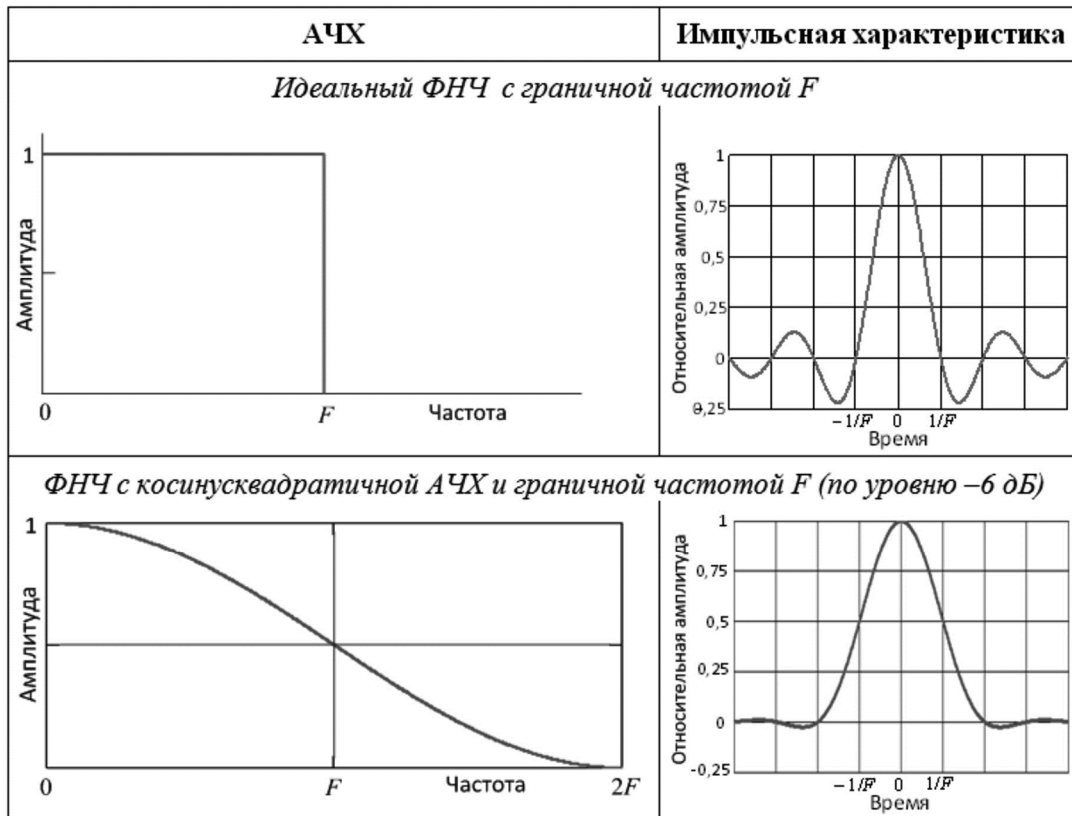


Рис. 5. Характеристики идеального и косинусквадратичного ФНЧ

Для полного устранения явления Гиббса необходимо использовать фильтр ФНЧ 1, в импульсной характеристике которого будут полностью отсутствовать колебательные процессы, что накладывает определенные ограничения на крутизну АЧХ этого фильтра. Изложенные соображения иллюстрирует рис. 5, где представлены АЧХ и импульсные характеристики двух видов фильтров:

– идеального фильтра нижних частот с граничной частотой F и колебательной импульсной характеристикой $\sin x/x$;

– фильтра нижних частот с косинусквадратичной АЧХ с граничной частотой F (по уровню -6 дБ) и импульсной характеристикой, в которой почти отсутствуют колебания (амплитуда колебаний на порядок ниже, чем у идеального фильтра), благодаря чему явление Гиббса для сигналов с разрывами также ослабляется на порядок.

Понятно, что такое ослабление амплитуды колебаний в разрывном сигнале происходит при любой полосе пропускания F фильтра нижних частот с косинусквадратичной АЧХ.

Таким образом, использование для ограничения спектра входной разрывной функции ФНЧ с неколебательной импульсной характеристикой исключает появление колебаний в выходном сигнале, порождающих явление Гиббса. При этом происходит плавное ограничение спектра входной разрывной функции.

Подбор формы характеристик ФНЧ позволяет устанавливать в выходном сигнале любое допустимое значение выбросов в местах разрывов – приблизительно от 9 % (явление Гиббса) до 0.

Применение оконных функций для устранения явления Гиббса

Альтернативный способ устранения или ослабления явления Гиббса основывается на применении оконных функций. Характеристики оконных функций и их фурье-образов подробно рассмотрены в [2, 8-10]. Отметим различия двух методов устранения явления Гиббса.

Действие фильтра нижних частот описывается операцией свертки входного сигнала с (неколебательной) импульсной характеристикой ФНЧ, благодаря чему исходная функция сглаживается, и разрывы устраняются. В частотной области это выражается перемножением спектра сигнала и АЧХ фильтра (фурье-образа импульсной характеристики).

Действие оконной (взвешивающей) функции – при спектральном анализе – описывается операцией перемножения входного сигнала и оконной функции. В частотной области это отображается сверткой спектра сигнала и спектра (фурье-образа) оконной функции. Нетрудно показать, что применение оконных функций в сигнальной области не приводит к сглаживанию спектра сигнала и не позволяет устранить явление Гиббса.

Проиллюстрируем действие оконной функции на том же меандре на примере косинусквадратичной функции, т.е. окна Хэннинга (Ханна) длительностью в k периодов меандра, где k – нечетное число:

$$p(t) = \cos 2(\pi t / kT) \times \Pi(t / kT). \quad (12)$$

Здесь для выделения одного периода косинусквадратичной функции использовано прямоугольное окно $\Pi(t/kT)$, определяемое как

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } |t| < 1/2, \\ 1/2 & \text{при } |t| = 1/2, \\ 0 & \text{при } |t| > 1/2. \end{cases} \quad (13)$$

В результате получаем взвешенную функцию меандра в виде

$$\begin{aligned} s_{1836}(t) &= p(t) \times s_1(t) = \\ &= \cos^2(\pi t / kT) \times \Pi(t / kT) \sum_k \text{sig}(t - kT). \end{aligned} \quad (14)$$

Ее спектр выражается через свертку спектров сомножителей в (14):

$$\begin{aligned} s_{1836}(f) &= p(f) \otimes s_1(f) = \\ &= \left[\frac{1}{2} \delta\left(f - \frac{1}{kT}\right) + \delta(f) + \frac{1}{2} \delta\left(f + \frac{1}{kT}\right) \right] \otimes \\ &\otimes \frac{\sin(kTf / 2)}{f / 2} \otimes \sum_m \frac{j}{m\pi} (\cos m\pi - 1), \end{aligned}$$

где k и m – нечетные числа.

Рис. 6 иллюстрирует вид спектра оконной функции $p(f)$. Его ширина на уровне 0,5 составляет $2/kT$, где T – период меандра, k – число периодов в анализируемом фрагменте. Понятно, что ширина $p(f)$ уменьшается с ростом k . Свертка $p(f)$ со спектром меандра $s_1(f)$ практически не оказывает влияния на конфигурацию этого спектра, поскольку шаг его составляющих (рис. 3) составляет $2/T$.

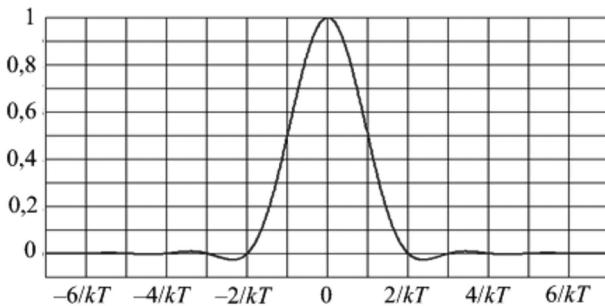


Рис. 6. Спектр оконной функции $p(f)$

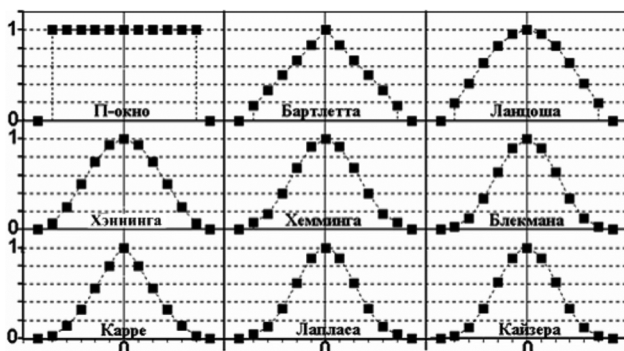


Рис. 7. Спектральные оконные функции (дискретизированные)

Устранение (или ослабление) явления Гиббса достигается применением оконных функций к спектру разрывного сигнала (о чем, правда, не всегда четко говорится в литературных источниках). При этом спектр сигнала перемножается с оконной функцией. Но в этом случае оконная функция может рассматриваться как АЧХ некоторого предварительного сглаживающего фильтра, действие которого подробно рассмотрено в предыдущем

разделе. На рис. 7 показаны некоторые известные оконные функции [9].

В предыдущем разделе действие оконной функции Хэннинга было продемонстрировано на примере ФНЧ с косинус квадратичной АЧХ.

Заключение

Явление Гиббса возникает из-за резкого ограничения спектра входной функции, имеющей разрывы первого рода. С радиотехнической точки зрения явление Гиббса порождается разрывностью амплитудно-частотной характеристики идеального ФНЧ, который описывает операцию ограничения спектра входной разрывной функции (т.е. отбрасывания высокочастотных составляющих ее ряда Фурье).

Для устранения или ослабления явления Гиббса следует ограничивать спектр разрывного сигнала с помощью ФНЧ с импульсной характеристикой, в которой отсутствуют или ослаблены колебательные процессы, т.е. с АЧХ, имеющей достаточно плавный спад. (При этом появляется возможность управления интенсивностью колебаний в выходном сигнале, которые в предельном случае применения идеального фильтра низких частот приводят к возникновению явления Гиббса.)

Применение для устранения или ослабления явления Гиббса спектральных оконных функций эквивалентно выбору для ограничения спектра разрывных функций фильтра низких частот с неколебательной импульсной характеристикой.

Указанные соображения полезно учитывать при изложении явления Гиббса в учебных курсах радиотехнических ВУЗов.

Литература

1. Анго Андре. Математика для электро- и радиоинженеров – М: Наука, Главная редакция физ.-мат. литературы, 1965 – 780 с. – Глава II.
2. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Том 1. – М.: Мир, 1983.
3. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов – СПб: Питер, 2002 – 608 с. – главы 1 и 6.
4. Булыгин В.С. Явление Гиббса. – МФТИ, кафедра общей физики – методический материал [Электронный ресурс]. 23.10.2012. – 6 с. URL: https://mipt.ru/education/chair/Physics/S_III/Metod_3/G_t_an.
5. Gibbs phenomenon. [Электронный ресурс] URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_phenomenon/
6. Игнатьев Н.К. Дискретизация и ее приложения – М.: Связь – 1980 – 264 с.
7. Transforms and applications handbook / editor, Alexander D. Poularikas. – 3rd ed. – Boca Raton, FL, USA: Taylor and Francis Group – 2010. – 853 p.
8. Хэррис Ф.Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье. – ТИИЭР – 1978, т. 66. – № 1. – С. 60-96.
9. Давыдов А.В. Тема 3: Весовая функция [Электронный ресурс]. URL: <http://www.geokniga.org/bookfiles/geokniga-davydovleksiipocifrovojobrabotkesignalov03-effektgibbsaivesovie.pdf>. 2004 – 8 с.
10. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Оконные функции для гармонического анализа сигналов – Издание второе, переработанное и дополненное – М.: Техносфера, 2016. – 208 с.