

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНО-ЧАСТОТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ С ВАРИРУЕМЫМ ПАРАМЕТРОМ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Пономарева О.В., д.т.н., профессор Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашиникова, e-mail: ponva@mail.ru;

Пономарев А.В., к.э.н., доцент Ижевского государственного технического университета имени М.Т. Калашиникова, e-mail: palexizh@gmail.com;

Смирнова Н.В., к.т.н., доцент Севастопольского государственного университета, e-mail: yolkanv@gmail.com.

DISCRETE-FREQUENCY FOURIER TRANSFORM DETERMINATION BY THE METHOD OF DISCRETE FOURIER TRANSFORM WITH A VARIABLE PARAMETER IN THE TIME DOMAIN

Ponomarev A.V., Ponomareva O.V., Smirnova N.V.

In digital signal processing (DSP) discrete-time Fourier transform (DTFT) is widely used in theoretical and applied research. In this paper the new form of Fourier transform - discrete-frequency Fourier transform (DFFT) is introduced into DSP. The aim of the work is to study a discrete Fourier transform with a variable parameter in the time domain, which allows efficiently find the values of the discrete-frequency Fourier transform not only for integers, but also for rational values of the time variable. The discrete Fourier transform method with a variable parameter in the time domain allows you to effectively deal with the effect has called by the authors the picket fence effect in the time domain. The paper introduces discrete exponential functions with a variable parameter in the time domain and investigates in detail their main properties. The paper has proposed algorithms for fast discrete Fourier transform with a variable parameter in the time domain (FFT-VPTD) for both complex and real sequences. A graph of the FFT-VPTD algorithm with decimation in time and with replacement (natural order of samples at the input of the algorithm, binary-inverse order of samples at the output of the algorithm) has been developed.

Key words: digital signal processing, discrete-frequency Fourier transform, discrete-time Fourier transform, picket fence effect in the time domain, fast discrete Fourier transform with a variable parameter in the time domain.

Ключевые слова: цифровая обработка сигналов, дискретно-частотное преобразование Фурье, дискретно-временное преобразование Фурье, эффект частоты во временной области, быстрое дискретное преобразования Фурье варьируемым параметром во временной области.

Введение

В теории цифровой обработки сигналов (ЦОС) при проведении теоретических и прикладных исследований широко используется дискретно-временное преобразование Фурье (ДВПФ) [1-3]. ДВПФ некоторой последовательности $x(n)$, $n = -\infty, +\infty$ определяется как ее z -преобразование на единичной окружности:

$$S_x(f) = S_x(z) \Big|_{z=\exp(j2\pi f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \exp(-j2\pi \cdot f \cdot n), \quad -1/2 \leq f \leq 1/2. \quad (1)$$

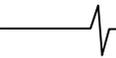
Таким образом, ДВПФ представляет собой непрерывное преобразование Фурье (НПФ) дискретной последовательности бесконечной длительности. Значения ДВПФ взвешенной последовательности¹ $x(n)$, $n = 0, N-1$ могут быть

В теории цифровой обработки сигналов (ЦОС) при проведении теоретических и прикладных исследований широко используется дискретно-временное преобразование Фурье (ДВПФ). В настоящей работе в теорию ЦОС введена новая форма преобразования Фурье – дискретно-частотное преобразование Фурье (ДЧПФ). Целью работы является разработка и исследование дискретного преобразования Фурье варьируемым параметром во временной области, позволяющего эффективно и результативно находить значения дискретно-частотного преобразования Фурье не только при целых, но и при рациональных значениях временной переменной. Метод дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром во временной области позволяет эффективно и результативно бороться с эффектом, названным авторами эффектом частоты во временной области (picket fence effect in the time domain). Введены дискретные экспоненциальные функции с варьируемым параметром во временной области и подробно исследуются их основные свойства. Предложены алгоритмы быстрого дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром во временной области (БПФ-ВПВО) как для комплексных, так и действительных последовательностей. Разработан граф алгоритма БПФ-ВПВО с прореживанием по времени и с замещением (естественный порядок отсчетов на входе алгоритма, двоично-инверсный порядок отсчетов на выходе алгоритма).

вычислены методом дискретного преобразования Фурье (ДПФ) [4-9].

ДПФ в алгебраической форме определяется следующим соотношением:

¹ **Взвешенная (финитная) последовательность** – последовательность бесконечной длительности, взвешенная прямоугольным финитным дискретным временным окном длительностью в N отсчетов.



$$S_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{kn};$$

$$W_N = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right), \quad k = \overline{0, (N-1)}, \quad (2)$$

где $S_N(k)$ – коэффициенты (бины) ДПФ (спектр).

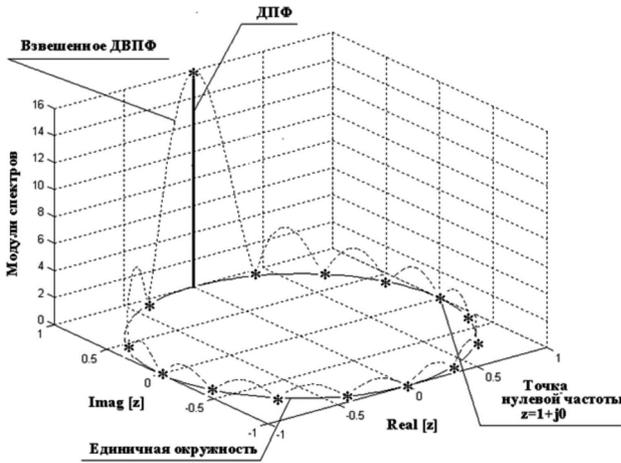
Из соотношений (1) и (2) непосредственно следует, что бины ДПФ равны значениям ДВПФ взвешенной последовательности $x(n)$ в точках $2\pi k / N$ на единичной окружности (рис.1):

$$S(f) = S(z) \Big|_{z=\exp\left(j \frac{2\pi}{n} k\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot \exp\left(j \frac{2\pi}{n} k \cdot n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp\left(j \frac{2\pi}{n} k \cdot n\right). \quad (3)$$

Обращаясь к рис.1 нетрудно видеть, что ДПФ не позволяет найти значения взвешенного ДВПФ² между отсчетами ДПФ, порождая тем самым эффект частотола (*picket fence effect*) в частотной области. Для борьбы с данным негативным эффектом ДПФ в работах [10-22] разработана теория параметрического ДПФ (ДПФ-П), которое в алгебраической форме задается соотношением:

$$S_N(k, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(k+\theta)n}; \quad 0 \leq \theta < 1. \quad (4)$$

В работе [10] в практику ЦОС введена новая форма преобразования Фурье – дискретно-частотное преобразование Фурье (ДЧПФ).



Взвешенное ДВПФ сигнала $x(n)$ обозначено пунктирной линией, а значения ДПФ сигнала обозначены звездочками *;

$$z = \exp(-2\pi / N)$$

Рис. 1. Взвешенное ДВПФ и ДПФ сигнала

$$x(n) = \exp((j \cdot 2\pi / N) \cdot k \cdot n); \quad n = \overline{0, N-1}, \quad N = 16, \quad k = 4$$

Если задан дискретный спектр $S(k)$ на бесконечном интервале $k = \overline{-\infty, +\infty}$, то его ДЧПФ задается следующим соотношением:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k) \cdot \exp(+j2\pi \cdot k \cdot t); \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (5)$$

Соотношением (5) определяется непрерывный временной спектр $x(t)$, соответствующий дискретной последовательности $S(k)$, $k = \overline{-\infty, +\infty}$. С учетом высказанных ранее положений, можно сделать вывод о том, что исходный дискретный сигнал $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$, получаемый в результате обратного ДПФ (ОДПФ), равен значениям непрерывного временного спектра, задаваемого ДЧПФ взвешенной последовательности $S_N(k)$, $k = \overline{0, N-1}$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_N(k) \cdot \exp(+j2\pi \cdot k \cdot t) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k) \cdot \exp(+j2\pi \cdot k \cdot t); \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (6)$$

ОДПФ в алгебраической форме определяется следующим соотношением:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} S_N(k) W_N^{-kn}; \quad n = \overline{0, (N-1)}. \quad (7)$$

Согласно соотношениям (6) и (7) исходный дискретный сигнал $x(n)$ является только одним из возможных дискретных временных спектров, который определен при целых значениях временной переменной $n = \overline{0, N-1}$. Таким образом, ОДПФ дискретного спектра $S(k)$ не дает ответа на вопрос: «каковы значения временного спектра, определяемого ДЧПФ последовательности $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ между значениями переменной $n = \overline{0, N-1}$ » [10]. Это порождает эффект, названный в работе [10] эффектом частотола во временной области (*picket fence effect in the time domain*).

В ЦОС для определения значений временного спектра, задаваемого ДЧПФ взвешенной последовательности $S_N(k)$, $k = \overline{0, N-1}$ ³, в промежутках между значениями $x(n)$, $n = \overline{0, N-1}$ применяется искусственное увеличение интервала определения $S_N(k)$ за счет добавления нулевых отсчетов в частотной области [21]. Назовем данную операцию операцией дополнения нулями в частотной области (ОДНЧ). ОДНЧ позволяет уменьшить влияние эффекта частотола во временной области [10].

Однако ОДНЧ имеет следующие существенные недостатки:

- существенное расширения оперативной памяти для хранения нулевых значений спектра;
- проведение непроизводительных вычислений с нулевыми значениями спектра;
- фиксированность шага дискретизации по времени при измерении временного спектра.

Целью работы является разработка и исследование дискретного преобразования Фурье варьируемым параметром во временной области, позволяющего эффективно и результативно находить значения дискретно-частотного преобразования Фурье не только при целых,

² В дальнейшем, если это не вызывает недоразумений, для обозначения *взвешенного ДВПФ* будем использовать термин *ДВПФ*.

³ См. сноски 1 и 2.

но и при рациональных значениях временной переменной. А также разработка алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье варьируемым параметром во временной области.

Обратное дискретное преобразование Фурье в матричной форме

ОДПФ в матричной форме задается следующим выражением:

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{F}_{N \times N}^* \cdot \mathbf{S}_N, \tag{8}$$

где * – знак комплексного сопряжения; $\mathbf{X}_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ – представление дискретного сигнала $x(n)$, $n = 0, N-1$, в виде вектора N -мерного линейного пространства; T – знак транспонирования;

$$\mathbf{F}_{N \times N}^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & \dots & W_N^{-(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & \dots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix}; \tag{9}$$

$\mathbf{S}_N = [s(0), s(1), \dots, s(N-1)]^T$ – вектор коэффициентов разложения вектора \mathbf{X}_N по системе дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), которая задается матрицей $\mathbf{F}_{N \times N}$ » [10]:

$$\mathbf{F}_{N \times N} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N-1) & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ (N-1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix}. \tag{10}$$

Дополним \mathbf{S}_N – вектор коэффициентов разложения \mathbf{X}_N по системе дискретных ДЭФ $N \cdot (r-1)$ нулевыми отсчетами следующим образом:

$$\mathbf{S}_{N,r} = [s(0), \dots, s(N/2-1), \underbrace{0, \dots, 0}_{N(r-1)}, s(N/2), \dots, s(N-1)]^T.$$

Выполнение ОДПФ спектра $\mathbf{S}_{N,r}$ (8) приводит к усечению средних столбцов матрицы $\mathbf{F}_{N,r}^*$ и превращению ее из квадратной матрицы  прямоугольную матрицу:

$$\mathbf{H}_{N,r \times N}^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & N/2-1 & N/2 & \dots & N-1 & k \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ N \cdot r - 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^{-1/r} & \dots & W_N^{-(N/2-1)/r} & W_N^{-(N/2+N(r-1))/r} & \dots & W_N^{-(N-1+N(r-1))/r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{-(N-r-1)/r} & \dots & W_N^{-(N-r-1)(N/2-1)/r} & W_N^{-(N/2+N(r-1))(N-r-1)/r} & \dots & W_N^{-(N-1+N(r-1))(N-r-1)/r} \end{bmatrix} \end{matrix}. \tag{11}$$

Обозначим множество номеров строк матрицы $\mathbf{H}_{N,r \times N}^*$ через $B: B = \{0, 1, 2, \dots, (Nr-1)\}$. Применим к множеству B отношение сравнимости по модулю r . В силу того, что это отношение является отношением эквивалентности, т.е. обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, оно разбивает множество B на r классов вычетов по модулю r :

$$B_0 = \{0, r, \dots, r(N-1)\};$$

$$B_{r-1} = \{r-1, r+(r-1), \dots, r(N-1)+(r-1)\};$$

$$B_i \neq \emptyset; \quad B_i \cap B_j = \emptyset; \quad \bigcup_{i=0}^{r-1} B_i = B. \tag{12}$$

Используя полученное разбиение представим матрицу $\mathbf{H}_{N,r \times N}^*$ в виде r квадратных матриц, размерность каждой из которых $N \times N$, номера строк являются классами вычетов по модулю r , а элементы соответствующих строк равны элементам матрицы $\mathbf{H}_{N,r \times N}^*$ [10]:

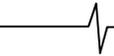
$$\mathbf{D}_{N \times N, \xi_m}^* = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & N/2-1 & N/2 & \dots & N-1 & k \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ N-1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^{-\xi_m} & \dots & W_N^{-\xi_m(N/2-1)} & W_N^{-\xi_m(N/2)} \cdot c_0 & \dots & W_N^{-\xi_m(N-1)} \cdot c_0 \\ 1 & W_N^{-(1+\xi_m)} & \dots & W_N^{-(1+\xi_m)(N/2-1)} & W_N^{-(1+\xi_m)(N/2)} \cdot c_1 & \dots & W_N^{-(1+\xi_m)(N-1)} \cdot c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{-(N-1+\xi_m)} & \dots & W_N^{-(N-1+\xi_m)(N/2-1)} & W_N^{-(N-1+\xi_m)(N/2)} \cdot c_{(N-1)} & \dots & W_N^{-(N-1+\xi_m)(N-1)} \cdot c_{(N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix}, \tag{13}$$

где $\xi_m = m/r$, $m = \overline{0, (r-1)}$; $c_i = W_N^{-(i+\xi_m) \cdot N \cdot (r-1)}$; $k, n, i = \overline{0, (N-1)}$.

Несложно установить, что $c_i = C = W_N^{-N \cdot (r-1) \cdot \xi_m}$ для $\forall i \in \overline{0, N-1}$.

Каждая из матриц, $\mathbf{D}_{N \times N, \xi_m}^*$, $\xi_m = m/(r-1)$,

$m = \overline{0, (r-1)}$ представляет собой базис преобразования Фурье, применение которого позволяет находить временные спектры ДЧПФ, смещенные относительно исходного сигнала $\mathbf{X}_N = [x(0), x(1), \dots, x(N-1)]^T$ на шаг ξ .



$$\mathbf{X}_{N, \xi_m} = \mathbf{D}_{N \times N, \xi_m}^* \cdot \mathbf{S}_N. \quad (14)$$

Отметим относительно преобразования (14) два важных момента. Во-первых, шаг $1/r$ переменной ξ_m в (13) связан исключительно с характером введения ОДНЧ. Следовательно, дискретная переменная ξ_m в преобразовании (14) может меняться непрерывно в интервале $[0, 1)$ (обозначим непрерывную переменную через ξ , $0 \leq \xi < 1$). Во-вторых, поворот вторых половин всех функций каждого базиса Фурье на коэффициент C связан не со структурой конкретных базисов, определяемых матрицами $\mathbf{D}_{N, \xi}^*$ (13), а со структурой действительных сигналов в комплексном базисе Фурье⁴.

Исходя из этих положений, представим соотношение (14) в следующем виде:

$$\mathbf{X}_{N, \xi} = \mathbf{F}_{N \times N, \xi} \cdot \mathbf{P}_{N \times N, \xi} \cdot \mathbf{S}_N;$$

где: $\mathbf{F}_{N \times N, \xi} =$ (15)

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & N/2-1 & N/2 & \dots & N-1 & k \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ N-1 \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & W_N^{-\xi} & \dots & W_N^{-\xi \cdot (N/2-1)} & W_N^{-\xi \cdot (N/2)} & \dots & W_N^{-\xi \cdot (N-1)} \\ 1 & W_N^{-(1+\xi)} & \dots & W_N^{-(1+\xi) \cdot (N/2-1)} & W_N^{-(1+\xi) \cdot (N/2)} & \dots & W_N^{-(1+\xi) \cdot (N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{-(N-1+\xi)} & \dots & W_N^{-(N-1+\xi) \cdot (N/2-1)} & W_N^{-(N-1+\xi) \cdot (N/2)} & \dots & W_N^{-(N-1+\xi) \cdot (N-1)} \end{bmatrix} \end{matrix};$$

$$\mathbf{P}_{N \times N, \xi} =$$
 (16)

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & N/2-1 & N/2 & \dots & N-1 & k \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \dots \\ N/2-1 \\ N/2 \\ \dots \\ N-1 \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & W_N^{-N \cdot \xi} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & W_N^{-N \cdot \xi} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Дискретные функции (строки матрицы $\mathbf{F}_{N \times N, \xi}$):

$$def_{VPTD}(k, n, \xi) = W_N^{-k(n+\xi)} = \exp \left[+j \frac{2\pi}{N} k(n+\xi) \right];$$

$k, n = \overline{0, (N-1)}$, $0 \leq \xi < 1$ назовем **дискретными экспоненциальными функциями с варьируемым параметром во временной области** (ДЭФ-ВПВО), $def_{VPTD}(k, n, \xi)$.

Основные свойства ДЭФ-ВПВО

1. ДЭФ-ВПВО, не являются функциями двух равноправных переменных k и n , в связи с чем матрица $\mathbf{F}_{N \times N, \xi}^*$ не является симметричной.

2. ДЭФ-ВПВО периодические по переменной n и параметрически периодические по переменной k с периодом N :

$$def_{VPTD}(k, (n \pm pN), \xi) = def_{VPTD}(k, n, \xi),$$

$$def_{VPTD}((k \pm pN), n, \xi) = def_{VPTD}(k, n, \xi) W_N^{\pm \xi \cdot N \cdot p};$$

3. Система ДЭФ-ВПВО является мультипликативной по переменной n :

$$def_{VPTD}(k, n, \xi) \cdot def_{VPTD}(k, m, \xi) \neq def_{VPTD}(k, (n+m), \xi), n, m = \overline{0, N-1}; n \neq m;$$

и является мультипликативной по переменной k :

$$def_{VPTD}(k, n, \xi) \cdot def_{VPTD}(l, n, \xi) = def_{VPTD}((k+l), n, \xi), k, l = \overline{0, N-1}; k \neq l;$$

4. Среднее значение ДЭФ-ВПВО по переменной n равно нулю при $k \neq 0$;

$$\sum_{n=0}^{N-1} def_{VPTD}(k, n, \xi) = \exp \left(j \frac{2\pi}{N} \xi \cdot k \right) \cdot \frac{1 - \exp(j2\pi k)}{1 - \exp \left(j \frac{2\pi}{N} k \right)},$$

а по переменной k не равно нулю:

$$\sum_{k=0}^{N-1} def_{VPTD}(k, n, \xi) = \frac{1 - \exp(j2\pi k(n+\xi))}{1 - \exp(j \frac{2\pi}{N} (n+\xi))}.$$

5. Система ДЭФ-ВПВО ортогональна по обоим переменным:

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-(n+\xi)k} [W_N^{-(m+\xi)k}]^* = \frac{1 - W_N^{-(n-m)N}}{1 - W_N^{-(n-m)}} = \begin{cases} N, & n = m; \\ 0, & n \neq m; \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-(n+\xi)k} [W_N^{-(n+\xi)l}]^* = \frac{1 - W_N^{-(l-k)N}}{1 - W_N^{-(l-k)}} = \begin{cases} N, & l = k; \\ 0, & l \neq k; \end{cases}$$

6. Система ДЭФ-ВПВО является полной системой в пространстве \mathbf{I}_2^N ⁵, так как число линейно независимых функций равно размерности множества дискретных сигналов.

Разложение по базисной системе ДЭФ-ВПВО определим как **дискретное преобразование Фурье с варьируемым параметром во временной области** (ДПФ-ВПВО).

Матричная форма ДПФ-ВПВО:

$$\mathbf{X}_{N, \xi} = \mathbf{F}_{N \times N, \xi} \cdot \mathbf{S}_{N, \xi}, \quad 0 \leq \xi < 1; \quad (17)$$

где: $\mathbf{S}_{N, \xi} = \mathbf{P}_{N \times N, \xi} \cdot \mathbf{S}_N$.

Алгебраическая форма ДПФ-ВПВО:

$$x(n, \xi) = \sum_{k=0}^{N-1} S_{N, \xi}(k) \cdot W_N^{-k(n+\xi)}; \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (18)$$

где: $S_{N, \xi}(k) = S_N(k)$, $\overline{k = 0, N/2-1}$;

$$S_{N, \xi}(k) = S_N(k) \cdot \exp(j2\pi \xi k), \quad \overline{k = N/2, N-1}.$$

Существует обратное ДПФ-ВПВО (ОДПФ-ВПВО) в алгебраической и матричной формах.

⁴ Спектр действительного сигнала имеет комплексно сопряженную структуру, действительная часть которого четная функция, а мнимая часть – нечетная функция.

⁵ Пространство \mathbf{I}_2^N – является подпространством комплексного гильбертова пространства \mathbf{I}_2 .

| $x_i[x(n, \xi)]$ | n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------------------|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $x_1[(n, 0)]$ | Re[$x_1(n, 0)$] | 1,1515 | 0,5557 | 0,3370 | 1,3795 | -0,4898 | -0,0672 | -1,9245 | -0,3428 |
| | Im[$x_1(n, 0)$] | -0,0000 | -0,0000 | -0,0000 | -0,0000 | -0,0000 | -0,0000 | -0,0000 | -0,0000 |
| $x_1[(n, 1/3)]$ | Re[$x_1(n, 1/3)$] | 1,1234 | 0,1802 | 0,9282 | 0,7801 | -0,4430 | -0,5237 | -1,9216 | 0,4758 |
| | Im[$x_1(n, 1/3)$] | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| $x_2[(n, 0)]$ | Re[$x_2(n, 0)$] | 1,2032 | 0,6676 | 1,7374 | -0,4740 | 1,6772 | -1,2801 | -0,9427 | 0,2707 |
| | Im[$x_2(n, 0)$] | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| $x_2[(n, 1/3)]$ | Re[$x_2(n, 1/3)$] | 0,8685 | 1,2650 | 1,2650 | 0,1005 | 1,2086 | -1,8102 | -0,4255 | 0,7516 |
| | Im[$x_2(n, 1/3)$] | 0,0000 | | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| $x_3[(n, 1/3)]$ | Re[$x_3(n, 1/3)$] | 1,1234 | 0,1802 | 0,9282 | 0,7801 | -0,4430 | -0,5237 | -1,9216 | 0,4758 |
| | Im[$x_3(n, 1/3)$] | 0,8685 | 1,2650 | 1,2650 | 0,1005 | 1,2086 | -1,8102 | -0,4255 | 0,7516 |

Рассмотрим алгоритм БПФ-ВПВО, который позволяет, используя вышеуказанную избыточность, находить одновременно два временных спектра двух различных дискретных действительных сигналов при одном значении временного параметра ξ .

Алгоритм БПФ-ВПВО двух действительных временных последовательностей

1. Пусть заданы дискретные действительные сигналы $x_1[(n, 0)]$ и $x_2[(n, 0)]$ (табл. 1) и их спектры $S_{1,N,\xi}(k)$ и $S_{2,N,\xi}(k)$.

2. Проводим умножение второй половины спектра $S_{1,N,\xi}(k)$ на $\exp(j2\pi\xi)$.

3. Проводим умножение второй половины спектра $S_{2,N,\xi}(k)$ на $\exp(j2\pi\xi)$.

4. Формируем комплексную последовательность:

$$S_{3,N,\xi}(k) = S_{1,N,\xi}(k) \cdot \exp(j2\pi\xi) + S_{2,N,\xi}(k) \cdot S_{2,N,\xi}(k).$$

5. Проводим БПФ-ВПВО последовательности $S_{3,N,\xi}(k)$.

В результате выполнения предложенного алгоритма БПФ-ВПВО получаем последовательность $x_3[(n, 1/3)]$ (табл.), действительная часть которой равна временному спектру $x_1(n, 1/3)$, а мнимая часть равна временному спектру $x_2(n, 1/3)$.

Заключение

В заключении отметим важные положения непосредственно вытекающие из работы, а также основные результаты, полученные в ней.

Широкое применение в теории ЦОС дискретно-временного преобразование Фурье во многом объясняется той ролью, которое оно играет в теоретических и прикладных исследованиях Фурье-обработки информации. Введение в статью в теорию ЦОС новой формы преобразования Фурье – дискретно-частотного преобразования Фурье имеет как теоретическое, так и прикладное значение для Фурье-обработки дискретных сигналов во временной области. Это преобразование позволило предложить новую эффективную методологию ослабления влияния эффекта частотного пикета во временной области (*picket fence effect in the time domain*) на

результативность и эффективность Фурье-обработки.

Введение в статью в теорию ЦОС нового вида дискретных экспоненциальных функций – дискретных экспоненциальных функций с варьируемым параметром во временной области позволило подойти к вопросу к Фурье-обработки временных спектров с новой нестандартной позиции.

Проведенные в работе исследования основных свойств дискретных экспоненциальных функций с варьируемым параметром во временной области, выявили мультипликативность этого базиса. Это позволило предположить существование алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье с варьируемым параметром во временной области (БПФ-ВПВО). В работе разработан граф алгоритма БПФ-ВПВО с прореживанием по времени и с замещением (*in place*) с естественным порядком отсчетов на входе алгоритма и двоично-инверсным порядком отсчетов на выходе алгоритма.

Предложенные алгоритмы БПФ-ВПВО для комплексных и действительных последовательностей могут быть эффективно применены при решении задач интерполяции дискретных сигналов во временной области. Приведен граф алгоритма БПФ-ВПВО с прореживанием по времени и с замещением (*in place*) с естественным порядком отсчетов на входе алгоритма и двоично-инверсным порядком отсчетов на выходе алгоритма.

Литература

- Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4th Ed. Published by Pearson. 2018. – 1168 p.
- Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Перевод с англ.– М.: Мир. 1978. – 839 с.
- Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Перевод с англ. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
- Cooley, J. and Tukey, J. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, Math. Comput., vol. 19, no. 90, Apr. 1965, pp. 297-301. DOI: 10.2307/20-03354.
- Favorskaya M., Savchina E., Popov A. Adaptive visible image watermarking based on Hadamard transform. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2018, vol. 450, no. 5, MIST Aerospace, pp. 052003.1-052003.6. doi:10.1088/1757-899X/450/5/052003

6. Bakulin M.G., Vityazev V.V., Shumov A.P., Kreyndelin V. B. Effective signal detection for the spatial multiplexing mimo systems. *Telecommunications and Radio Engineering*, 2018. vol. 77, no. 13, pp. 1141-1158. doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v77.i13.30.
7. Kulikovskikh I., Prokhorov S. Psychological perspectives on implicit regularization: a model of retrieval-induced forgetting (rif). *Journal of Physics: Conference Series*. 2018, pp. 012079. doi:10.1088/1742-6596/1096/1/012079.
8. Khanyan G.S. Sampling theorem in frequency domain for the finite spectrum. *Proceedings of 2018 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTs 2018*. 2018, pp. 8524822. doi:10.1109/EWDTs.2018.8524822
9. Ponomarev A.V. Systems Analysis of Discrete Two-Dimensional Signal Processing in Fourier Basis. In: *Advances in Signal Processing. Theories, Algorithms, and System Control-7*. Favorskaya M.N., Jain L.C. (eds). Springer, Cham. Vol. 184, pp. 87-96. doi.org/10/1007/978-3-030-40312-6_7.
10. Пономарева О.В. Развитие теории и разработка методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье: дис....д-ра техн. наук: 05.13.01. – Ижевск, 2016. – 357 с.
11. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Smirnova N.V. Sliding Spatial Frequency Processing of Discrete Signals. In: *Advances in Signal Processing. Theories, Algorithms, and System Control-8*. Favorskaya M.N., Jain L.C. (eds). Springer, Cham. Vol. 184. Pp. 97–110. doi.org/10/1007/978-3-030-40312-6_8
12. Prozorov D., Trubin I. Detection of a signal in the simo system with spatial correlation of noise. *2018 Proceedings of 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2018 – Including ECYPS 2018*, 2018, pp. 1-5. doi:10.1109/MECO.2018.8405965
13. Пономарев А.В. Основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами. *Цифровая обработка сигналов*, 2019, № 2, с. 12-20.
14. Пономарева Н.В. Проблемы компьютерной спектральной обработки сигналов в музыкальной акустике. *Интеллектуальные системы в производстве*, 2018, Т. 16. № 1. с. 26-33. doi: 10.22213/24-10-9304-2018-1-26-33
15. Ponomareva O., Ponomarev A., Ponomareva N. Window-Parametric discrete Fourier Transform // *Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDS'2018)*. 2018.С.364-368.
16. Пономарева О.В., Пономарев А.В. Интерполяция в пространственной области двумерных дискретных сигналов с помощью быстрых преобразований Фурье // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2019. Т. 17. № 1. С. 88-94.
17. Пономарева О.В., Пономарев А.В. Быстрый метод горизонтальной скользящей пространственно-частотной обработки // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2019. Т. 17. № 2. С. 81-87.
18. Пономарева О.В., Пономарев В.А. Измерение текущего энергетического Фурье-спектра комплексных и действительных дискретных сигналов на конечных интервалах // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2013. № 2 (22). С. 149-157.
19. Пономарев В.А., Пономарева О.В. Тенденции развития дискретных косвенных измерений параметров электрических сигналов // *Метрология*. 2017. № 1. С. 20-32.
20. Пономарева О.В. Вероятностные свойства спектральных оценок, полученных методом параметрического дискретного преобразования Фурье // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2010. № 2 (16). С. 36-42.
21. Bernard Gold, Charles M. Rader. *Digital Processing of Signals*, Published by McGraw-Hill Companies (first published 1983). – 368 p.
22. Пономарева О.В., Алексеев В.А., Пономарев А.В. Быстрый алгоритм измерения спектра действительных сигналов методом апериодического дискретного преобразования Фурье//*Вестник Ижевского государственного технического университета*. 2014. № 2. С. 106-109.