

УДК 621.3.087.42

О НОВОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНКИ МОДУЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

Бартенев В.Г., профессор, д.т.н., МИРЭА – Российский технологический университет, e-mail: bartenev_v@mirea.ru;

Бартенев Г.В., аспирант АО ВНИИРТ, А.В. Бауточко, аспирант в/ч 15644.

ON THE NEW REPRESENTATION OF THE CORRELATION COEFFICIENT ESTIMATE DISTRIBUTION

Bartenev V.G., Bartenev G.V.

A new representation is obtained for the distribution of the estimate of the modulus of the correlation coefficient, using the maximum likelihood method in the form of a finite sum. The properties of the new representation of the estimate of the maximum likelihood of the modulus of the correlation coefficient are investigated in comparison with the previously obtained distribution with an infinite series. An example of using a new formula to evaluate the efficiency of classifying discrete interfering reflections based on the inter-frequency correlation feature is given.

Key words: distribution of the estimate, maximum likelihood method, correlation coefficient, inter-frequency correlation.

Ключевые слова: плотность распределения, оценка максимального правдоподобия, коэффициент корреляции, двухчастотный коррелятор.

Введение

При анализе эффективности радиотехнических систем, в которых используется оценка максимального правдоподобия модуля коэффициента корреляции может возникнуть необходимость применять распределение этой оценки, например при анализе эффективности адаптивных обнаружителей [1] или систем классификации типов целей [2]. В работе [3] получено распределение такой оценки из распределения Уишарта, представленное в виде бесконечного ряда

$$W(\hat{R}) = \frac{2(1-\hat{R}^2)\hat{R}(1-\hat{R}^2)^{N-2} \sum_{k=0}^{\infty} (\hat{R}R)^{2k} \Gamma^2(N+k)}{\Gamma(N)\Gamma(N-1) \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma^2(k+1)}, \quad (1)$$

где R – модуль коэффициента корреляции, \hat{R} – его оценка максимального правдоподобия, N – число выборок наблюдения, Γ (·) – гамма функция.

К сожалению, сходимость ряда в (1) ухудшается по мере приближения истинного значения модуля коэффициента корреляции R и его оценки \hat{R} к единице, что заставляет применять рекуррентные схемы вычисления членов ряда и использования их большого числа. В частности, для расчетов плотности распределения (1) удобно пользоваться таким рекуррентным соотношением

$$W(\hat{R}) = \frac{2(1-\hat{R}^2)R(1-R^2)^{N-2} \sum_{k=0}^{\infty} P_k}{\Gamma(N)\Gamma(N-1)} \quad (2)$$

где $P_0 = \Gamma(N)_2$, $P_{k+1} = P_k (\hat{R}R)^2 (N+k)^2 / (k+1)^2$.

На рис. 1-3 показаны результаты расчета плотности распределения (1) при $R = 0,8$ и $R = 0,95$ для $N = 4,8$

Получено выражение для плотности распределения оценки максимального правдоподобия модуля коэффициента корреляции, которое в отличие от ранее известного с бесконечным рядом содержит конечную сумму, что при малых выборках наблюдения, наиболее часто встречающихся на практике значительно снижает вычислительные затраты при анализе эффективности радиотехнических систем. Приведен пример использования полученного выражения для расчета вероятности правильной и ошибочной классификации двухчастотного коррелятора.

и 16 с рекуррентной формулой (2) и без нее для бесконечного ряда, соответственно кружочками и крестиками. Число членов ряда для рекуррентной формулы было 1500, без рекуррентности максимально возможное 60. Из графиков следует, что до $R < 0,8$ можно пользоваться формулой (1) на прямую. Ограничение на использование формулы (1) без рекуррентного расчета накладывает и увеличение N .

Тем не менее, попытка получить распределение (1) в виде конечной суммы была предпринята.

Если внимательно проанализировать бесконечный ряд в выражении для плотности распределения оценки модуля коэффициента корреляции в (1), то можно заметить, что поскольку $(\hat{R}R)^{2k} < 1$, то сумму бесконечного ряда можно рассматривать в виде убывающей геометрической прогрессии, что дает после небольших преобразований новое выражение для плотности распределения с конечной суммой ряда

$$W(\hat{R}) = 2(N-1)(1-\hat{R}^2)^{N-2} \hat{R}(1-R^2)^N \times \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(\hat{R}R)^{2k} \Gamma(N+k)}{(1-\hat{R}^2 R^2)^{N+k} \Gamma(N-k)^2 (k+1)}. \quad (3)$$

Естественно возникает вопрос насколько совпадают расчеты по формуле с бесконечным рядом (1) и по полученной формуле с конечным рядом (3).

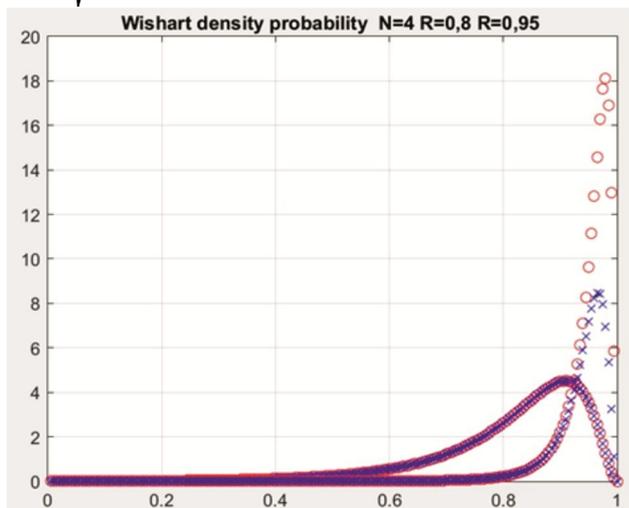


Рис. 1. Графики плотности вероятности для $R = 0,8$ и $R = 0,95$ при $N = 4$ с кружочками для рекуррентного расчета и с крестиками без рекуррентности

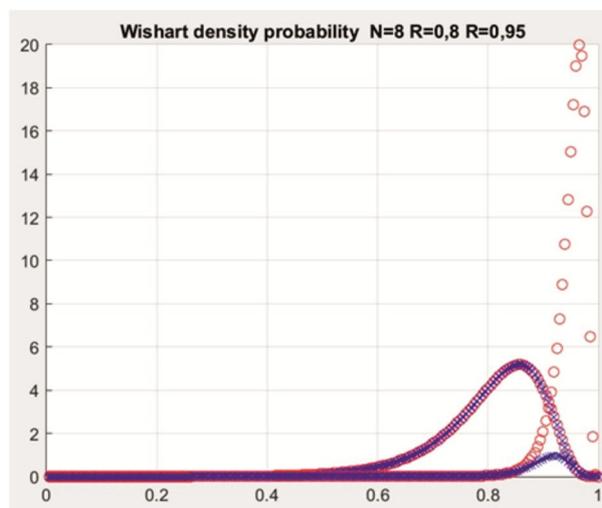


Рис. 2. Графики плотности вероятности для $R = 0,8$ и $R = 0,95$ при $N = 8$ с кружочками для рекуррентного расчета и с крестиками без рекуррентности

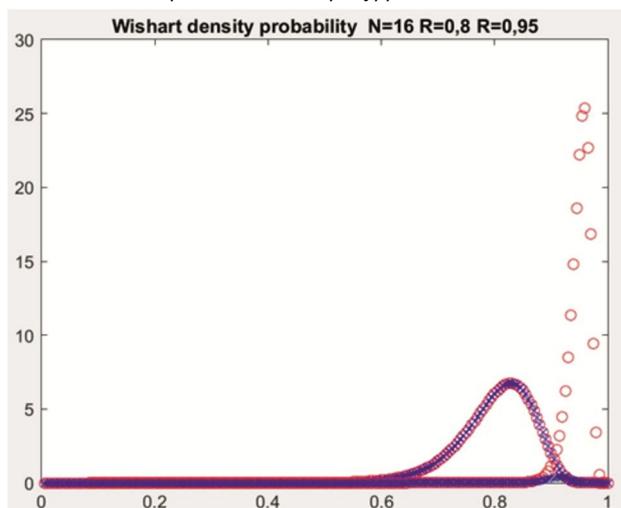


Рис. 3. Графики плотности вероятности для $R = 0,8$ и $R = 0,95$ при $N = 16$ с кружочками для рекуррентного расчета и с крестиками без рекуррентности

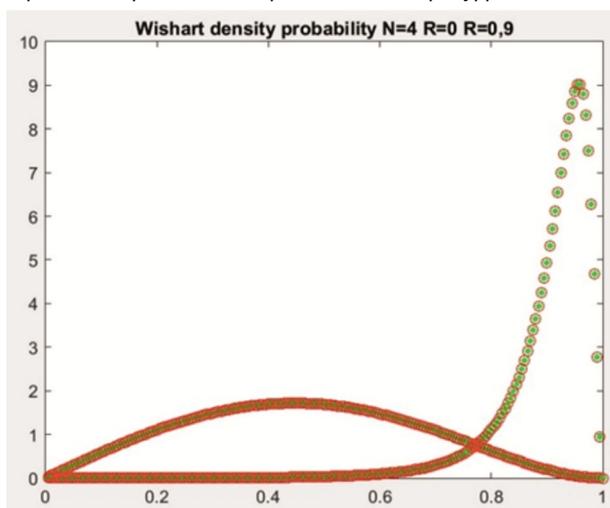


Рис. 4. Графики плотности вероятности для $R = 0$ и $R = 0,9$ при $N = 4$ с кружочками для рекуррентного расчета и со звездочками для конечной суммы

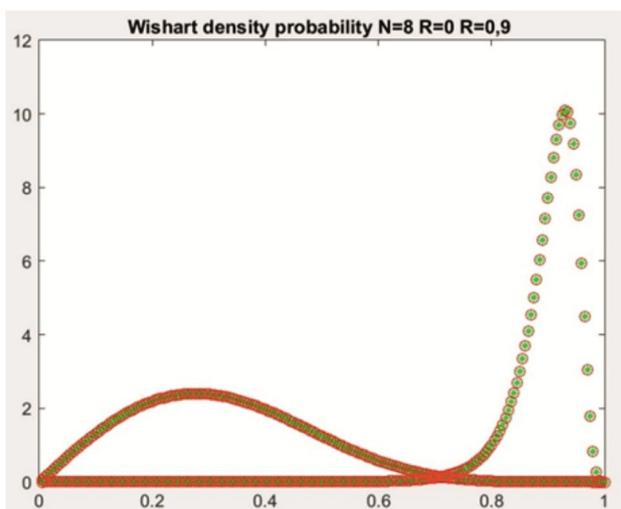


Рис. 5. Графики плотности вероятности для $R = 0$ и $R = 0,9$ при $N = 8$ с кружочками для рекуррентного расчета и со звездочками для конечной суммы

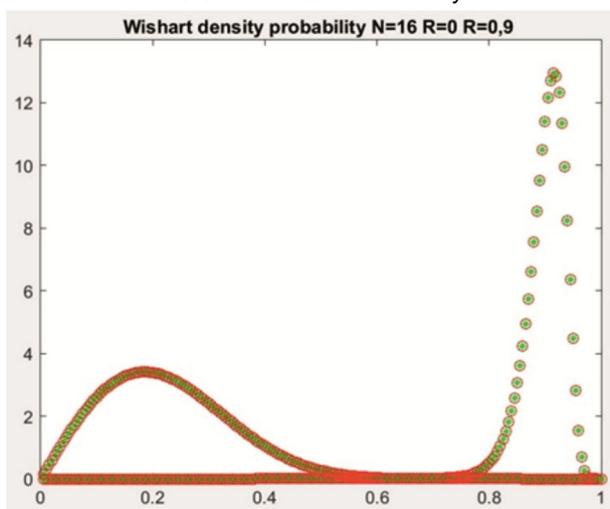


Рис. 6. Графики плотности вероятности для $R = 0$ и $R = 0,9$ при $N = 16$ с кружочками для рекуррентного расчета и со звездочками для конечной суммы

На рис. 4, 5, 6 представлены графики плотности распределения для двух значений исходных коэффициентов корреляции $R = 0$ и $R = 0,95$ для $N = 4, 8, 16$. Не трудно видеть, что графики полностью совпадают. Расчет плотности распределения по формуле (1) производился по рекуррентной схеме и потребовал 1500 членов ряда.

А теперь попробуем применить полученную формулу (3) для оценки эффективности классификации дискретных мешающих отражений по межчастотному корреляционному признаку. Такой способ описан в [4, 5].

Напомню принцип классификации целей по межчастотному коэффициенту корреляции или лучше сказать по их продольному размеру. Для того чтобы различить класс летательных аппаратов с малым продольным размером (с высоким межчастотным коэффициентом корреляции) от класса дискретных мешающих объектов, имеющих значительно большие размеры (межчастотный коэффициент корреляции близок к нулю) достаточно выбрать соответствующий разнос несущих частот. И тогда сравнивая оценку межчастотного коэффициента корреляции с порогом при его не превышении сформировать корреляционный признак отраженного сигнала, который может принадлежать к сигналам целеподобных мешающих отражений, которые могут быть бланкированы. Для формирования оценки межчастотного коэффициента корреляции лучше всего применить оценку максимального правдоподобия модуля коэффициента корреляции, плотность распределения которой и описывается формулой (1) или (3). Алгоритм оценки максимального правдоподобия для модуля межчастотного коэффициента корреляции такой [6]

$$r = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Re}(Z_{1i}) \text{Re}(Z_{2i}) + \text{Im}(Z_{1i}) \text{Re}(Z_{2i});$$

$$s = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Re}(Z_{2i}) \text{Re}(Z_{1i}) + \text{Im}(Z_{2i}) \text{Re}(Z_{1i});$$

$$z1 = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Re}(Z_{1i}) \text{Re}(Z_{1i}) + \text{Im}(Z_{1i}) \text{Im}(Z_{1i});$$

$$z2 = \sum_{i=1}^{N-1} \text{Re}(Z_{2i}) \text{Re}(Z_{2i}) + \text{Im}(Z_{2i}) \text{Im}(Z_{2i}),$$

где Z_{1i} и Z_{2i} – комплексные выборки N наблюдений на первой и второй несущей частоте. Тогда оценка межчастотного коэффициента корреляции может быть вычислена по следующей формуле:

$$\hat{R}(\Delta F) = \frac{\sqrt{r^2 + s^2}}{\sqrt{z1z2}} \leq R_{\text{пор}}.$$

Таким образом, наша задача проинтегрировать выражение (3) от нуля до $R_{\text{пор}}$ и для $R = 0$ получить вероятность правильной классификации мешающих целеподобных мешающих отражений, а для $R = 0,7$ вероятность ошибочной классификации (т.е., например, если самолет классифицируется, как мешающее отражение)

На рис. 7, 8 и 9 приведены вероятности правильной и ошибочной классификации для $N = 4, 8, 16$ красной линией. Уже при $N > 8$ для порога равного 0,5 получается вероятность правильной классификации больше 0,9 при вероятности ошибочной классификации меньше 0,1

Для верификации полученных результатов было проведено моделирование данного классификатора в системе Матлаб. Результаты моделирования на рис. 7, 8, 9 представлены точками. Они подтверждают совпадение моделирования и аналитические расчеты и, главное, корректность формулы (3).

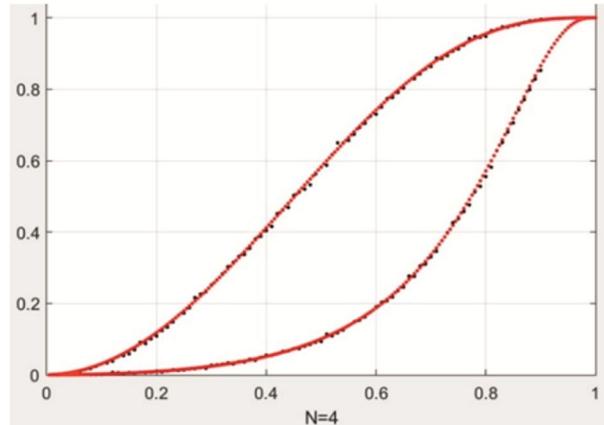


Рис. 7. Графики вероятности правильной классификации для $R = 0$ (слева) и ошибочной классификации для $R = 0,7$ (справа) при $N = 4$, красным аналитика, точками моделирование

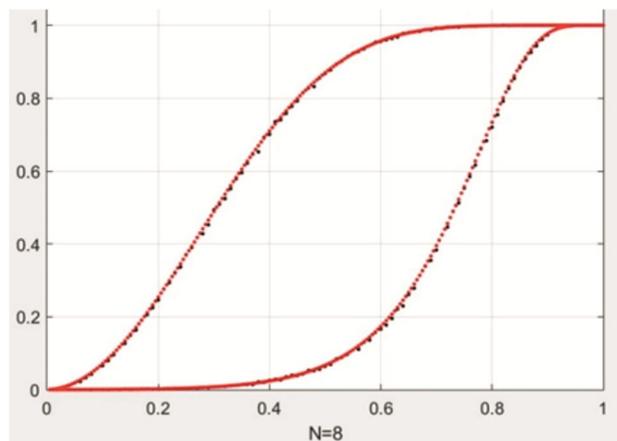


Рис. 8. Графики вероятности правильной классификации для $R = 0$ (слева) и ошибочной классификации для $R = 0,7$ (справа) при $N = 8$, красным аналитика, точками моделирование

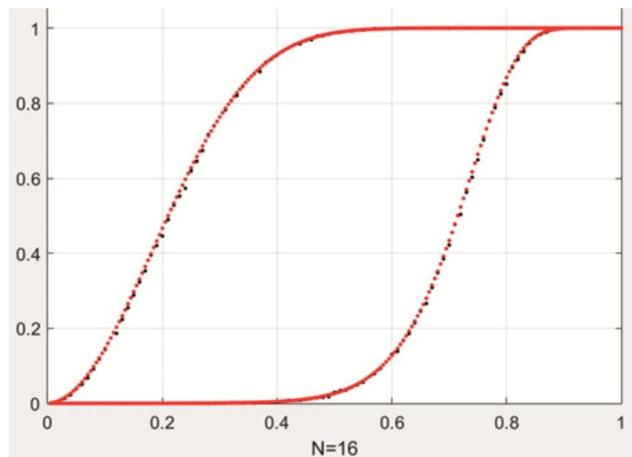


Рис. 9. Графики вероятности правильной классификации для $R = 0$ (слева) и ошибочной классификации для $R = 0,7$ (справа) при $N = 16$, красным аналитика, точками моделирование



Литература

1. Бартенев В.Г. Квазиоптимальные адаптивные алгоритмы обнаружения сигналов // Современная электроника. 2011. № 2, С.70-73.
2. Бартенев В.Г. Радиолокационные отражения от ясного неба вынуждают улучшать параметры РЛС // Современная электроника. 2014. № 7, С.18-20.
3. Бартенев В.Г. Применение распределения Уишарта для анализа эффективности адаптивных систем СДЦ // Радиотехника и электроника. 1981. Т.ХХVI, № 2, С. 356-361.
4. Бартенев В.Г. Способ классификации и бланкирования дискретных помех. Патент № 2710894 по заявке № 2018134712 зарегистрирован в Государственном реестре РФ 14.01.2020.
5. Бартенев В.Г. Об использовании трех сигнальных признаков для классификации и бланкирования дискретных мешающих отражений // Цифровая обработка сигналов. 2020. № 4. С. 54-57.
6. Бартенев В.Г. Модельно-ориентированное проектирование программируемых радиотехнических устройств. Практический курс // Горячая линия-Телеком, М., 2019, С. 48-64.