

ВОЗМОЖНОСТИ СОЗДАНИЯ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ СИСТЕМ СВЯЗИ С ВЫСОКОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТЬЮ (ЧАСТЬ 2)

Быховский М.А., доктор технических наук, профессор МТУСИ, e-mail: bykhmark@gmail.com.

POSSIBILITIES OF CREATING LOW-SPEED COMMUNICATION SYSTEMS WITH HIGH SPECTRAL AND ENERGY EFFICIENCY (PART 2)

Bykhovskiy M.A.

In this paper, we consider the possibility of creating low-speed communication systems in which messages are transmitted using signals with permutation modulation (PM) with extremely low power, and to correct errors that occur when demodulating such signals, the use of error-correcting codes (ECCs) with the maximum achievable code distance (MACD). As such ECCs, Reed-Solomon (RS) codes or low-density parity-check code (LDPC) codes can be used.

The paper describes two algorithms for the formation of ensembles of signals from the PM, analyzes the noise immunity of receiving signals from the PM, and discusses in detail issues related to the selection of ECC parameters for low-speed communication systems that can ensure high reliability of message reception and their high spectral efficiency.

It is shown that, in contrast to high-speed communication systems, in which two-dimensional AS with quadrature-amplitude modulation and ECCs with MACD are used for message transmission, in the studied low-speed systems, the optimal choice of their parameters allows their energy and spectral efficiency to be very close to the limiting ones - those that have the «perfect» Shannon system. It is also shown that the ECC used in these systems can have a relatively small length and its implementation is quite simple in technical terms.

Key words: Low-speed communication systems, signal transmission methods, spectral and energy efficiency, noise-resistant codes.

Ключевые слова: низкоскоростные системы связи, методы передачи сигналов, спектральная и энергетическая эффективность, помехоустойчивые коды.

Введение

Данная статья является продолжением статьи [1], в которой исследованы возможности создания высокоскоростных систем связи. Такие системы создаются, как правило, для передачи сообщений по магистральным линиям связи, в которых удельная скорость передачи сообщений может составлять $R_f = 3 \dots 10$ бит/сек·Гц. В [1] показано, что в высокоскоростных системах применение для передачи сообщений двумерных ансамблей сигналов (АС), таких, например, как M -позиционные сигналы с квадратурно-амплитудной модуляцией (M-QAM – Quadrature Amplitude Modulation) и помехоустойчивых кодов (ПК) с максимально достижимым расстоянием (МДР), приводит к заметному снижению энергетической и спектральной эффективности (ЭЭ и ЭС) создаваемой системы связи по отношению к «идеальной» системе Шеннона. Потери ЭЭ в таких системах могут составлять от 2,5 до 5 дБ.

В [1] показано, что в высокоскоростных системах приблизиться к эффективности «идеальной» системы Шеннона можно, не применяя помехоустойчивые коды (ПК), если для передачи сообщений использовать многомерные оптимальные АС, сигналы которых имеют большую длительность.

Однако в ряде случаев возникает необходимость создания систем связи, которые должны передавать со-

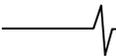
Рассмотрена возможность создания низкоскоростных систем связи, в которых передача сообщений осуществляется с использованием сигналов с перестановочной модуляцией (ПМ) с предельно низкой мощностью, а для исправления ошибок, возникающих при демодуляции таких сигналов, предусматривается применение помехоустойчивых кодов (ПК) с максимально достижимым кодовым расстоянием (МДР). В качестве таких ПК могут использоваться коды Рида-Соломона (RS) или низкоплотностные коды LDPC (Low-density parity-check code).

Описаны два алгоритма формирования ансамблей сигналов с ПМ, дан анализ помехоустойчивости приема сигналов с ПМ и подробно рассмотрены вопросы, связанные с выбором параметров ПК для низкоскоростных систем связи, которые позволяют обеспечить высокую надежность приема сообщений и их высокую спектральную эффективность.

Показано, что, в отличие от высокоскоростных систем связи, в которых для передачи сообщений применяются двумерные АС с квадратурно-амплитудной модуляцией и ПК с МДР, в исследованных низкоскоростных системах оптимальный выбор их параметров позволяет обеспечить их энергетическую и спектральную эффективность, весьма близкие к предельным – тем, которые имеет «идеальная» система Шеннона. Показано также, что применяемый в этих системах ПК может иметь сравнительно незначительную длину и его реализации является достаточно простой в техническом отношении.

общения с низкой удельной скоростью $R_f \leq 1$ бит/сек·Гц.

Такие системы связи также должны иметь высокие энергетическую и спектральную эффективность. Важность создания систем с высокой ЭЭ связана с тем, что снижение энергетики линии связи уменьшает стоимость ее



создания и эксплуатации, а также облегчает обеспечение ее электромагнитной совместимости (ЭМС) с другими системами, работающими в общих с ней полосах частот. В спутниковых системах связи снижение на 1 дБ мощности бортового передатчика на искусственном спутнике Земли уменьшает затраты на его создание примерно на 1 млн. долл. США. Повышение СЭ системы связи также важно, так как частотный спектр является, как отмечалось в [1], весьма ценным и ограниченным природным ресурсом и должен использоваться экономно. Кроме того, передача сообщения с требуемой скоростью в каналах связи, имеющих предельно малую полосу частот, улучшает условия обеспечения ЭМС систем связи, работающих в эфире.

В современных высокоскоростных системах связи для передачи сообщений обычно применяются сигналы с QAM или другие двумерные АС, упомянутые в [1]. Для передачи сообщений с низкой скоростью в системах связи используются N -мерные сигналы, такие, например, как ортогональные и биортогональные сигналы [2, 3], а также сигналы с перестановочной модуляцией (ПМ), предложенные Слепяном [4, 5]. Особенностью таких АС является то, что у них удельная скорость передачи сообщений с увеличением размерности АС существенно уменьшается ($R_f \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$). Следует также отметить, что АС с N -мерными сигналами с ПМ не являются оптимальными и, как показано ниже, системы связи, их использующие, не могут при $N \gg 1$ приблизиться по своей ЭЭ и ЭС к «идеальной» системе Шеннона.

В данной работе рассмотрена возможность создания низкоскоростных систем связи, в которых передача сообщений осуществляется с использованием сигналов с ПМ с предельно низкой мощностью, а для исправления ошибок, возникающих при демодуляции таких сигналов, как и [1], предусматривается применение ПК с максимально достижимым кодовым расстоянием (МДР) между кодовыми комбинациями (КК). В качестве таких ПК могут использоваться коды Рида-Соломона (RS) или низкоплотные коды (коды LDPC – Low-Density Parity-Check) [6-10].

Как известно, в ПК с МДР между длиной кодовой комбинации кода (N_q), количеством в ней информационных q -ичных символов (k), а также количеством исправляемых в КК ошибок (t) существует соотношение $2t + 1 = (N_q - k)$ [6]. Если учесть, что кодовая скорость равна $R_c = (k / N_q) \leq 1$, то это соотношение может быть записано в следующем виде: $\hat{t} = 0,5 \cdot (1 - R_c)$, где $\hat{t} = (t / N_q)$. Минимальное расстояние Хэмминга между разными КК у таких кодов равно $d_c = (2t + 1) = N_q(1 - R_c)$. При $R_c = const$ величина d_c увеличивается пропорционально увеличению длины кода N_q . У кодов R_S параметры N_q , k , q и d_c связаны соотношениями $N_q = (2^q - 1)$, $k = (2^q - d_c)$. Кодовая комбинация таких кодов представляет собой последовательность q -ичных символов, каждый из которых может быть представлен последовательностью из q двоичных символов,

т.е. один q -ичный символ может принимать 2^q разных значений. Длина КК таких кодов, выраженная в количестве имеющихся в ней двоичных символов, равна $N_b = qN_q$.

Алгоритмы формирования N -мерных АС с ПМ

Опишем возможные алгоритмы формирования N -мерных АС с ПМ, где $N = 2 \cdot \text{int}(FT)$ (здесь и далее $\text{int}(x)$ – целая часть числа x), (FT) – нормированная длительность сигналов, F – полоса частот канала связи, T – длительность сигналов. Такие сигналы могут быть сформированы из N элементарных ортогональных сигналов (ЭОС) $S_i(t)$ ($i = 1 \dots N$) разными способами.

В системах с временным разделением сигналов каждый из ЭОС имеет длительность $\tau = 2T / N$ (T – длительность одного q -ичного символа). ЭОС $S_i(t)$ может быть передан в интервале времени $(T_{i-1}, T_{i-1} + \tau)$, где $T_{i-1} = (i-1)\tau$ и $i = 1 \dots N/2$. В этом интервале могут быть переданы два ЭОС, равные $S_{2i-1}(t) = \sin(\omega_0 t)$ и $S_{2i}(t) = \cos(\omega_0 t)$, где ω_0 – несущая частота передаваемых сигналов. За пределами указанного интервала времени каждый из сигналов $S_{2i-1}(t)$ и $S_{2i}(t)$ равен 0. Полоса частот, которую занимает каждый ЭОС в канале связи, равна, очевидно, $F = 1/\tau$, при этом $2(FT) = N$.

В системах с частотным разделением сигналов (системах OFDM, многочастотных системах) каждый из ЭОС имеет длительность, равную T . Отдельные ЭОС формируются на $(N/2)$ поднесущих и имеют вид

$$S_{2i-1}(t) = \sin(\omega_i t) \quad \text{и} \quad S_{2i}(t) = \cos(\omega_i t), \quad \text{где} \quad \omega_i = i \frac{2\pi}{T},$$

$$i = 1 \dots (N/2), \quad \text{а частотный разнос между соседними}$$

поднесущими равен $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = (\omega_{i+1} - \omega_i)$. В полосе частот F , которую занимают ЭОС, размещены все

$N = \frac{2\pi F}{\Delta\omega}$ поднесущих. Отметим, что в [11] исследован метод формирования многочастотных сигналов, для которых, в отличие от сигналов с OFDM, пик-фактор не растет с увеличением N .

Характеристики ЭЭ и СЭ систем связи, в которых могут применяться описанные виды ЭОС, теоретически не отличаются друг от друга. Существенным отличием таких систем является то, что в системах с временным уплотнением канала связи уровень внеполосных излучений существенно выше, чем в системах с частотным уплотнением, так как длительность ЭОС для этих двух случаев отличаются в $N = (2T/\tau) \gg 1$ раз.

В рассматриваемых в данной работе системах связи с ПМ каждый из сигналов, входящих в АС, формируется путем выбора k определенных ЭОС из N возможных.

Такой выбор может быть сделан $C_N^k = \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!}$ способами (C_N^k – число сочетаний из N по k) и, таким образом, в АС имеется $M = C_N^k$ разных сигналов, с помо-

щью которых сообщения могут быть переданы по каналу связи с удельной скоростью передачи, равной, $R_f = \frac{\log_2 M}{(FT)}$. Каждому такому сигналу может быть при-

своен номер $1 \leq m \leq M = 2^{R_f \cdot (FT)}$.

Рассмотрим процедуру определения параметра k , при котором АС с ПМ обеспечивает удельную скорость передачи сообщений, равную R_f . Обозначим v параметр, который показывает какую долю числа N составляет количество ЭОС, используемых для передачи сигналов в системе связи с ПМ. В этом случае $k = [\text{int}(vN) + 1]$. Используя формулу Стирлинга для вычисления значения M при $N \gg 1$ и $k \gg 1$, придем к следующей приближенной, но достаточно точной формуле:

$$R_f(v) = \frac{\log_2 M}{(FT)} \cong \cong 2 \left[v \log_2 \left(\frac{1}{v} \right) + (1-v) \log_2 \left(\frac{1}{1-v} \right) - \frac{\log_2(Y(N,v))}{2FT} \right], \quad (1)$$

где $Y(N,v) = \sqrt{2\pi Nv(1-v)}$, причем $\frac{\log_2(Y(N,v))}{2FT} \rightarrow 0$ при $(FT) \rightarrow \infty$.

На рис. 1 приведены зависимости $R_f(v)$ при разных значениях N . Эти зависимости позволяют найти параметр k – количество ЭОС, которые должны входить в каждый сигнал АС с ПМ. Каждый такой сигнал позволяет передать по каналу связи последовательность, состоящую из $N_{bs} = R_f \cdot (FT)$ бит, или же последовательность из $N_{qs} = [R_f \cdot (FT) / q]$ q -ичных символов.

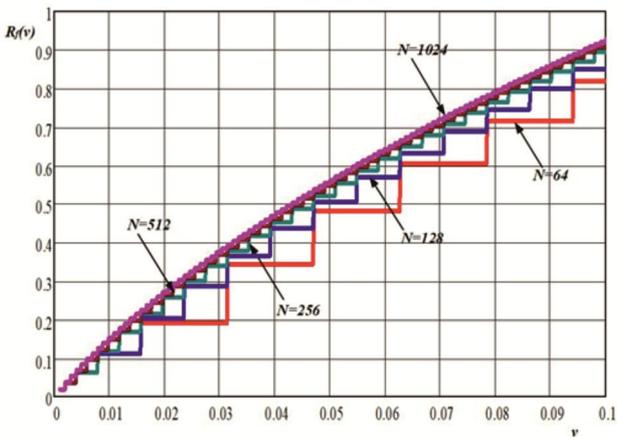


Рис. 1. Зависимости $R_f(v)$ при разных значениях N

Как видно из рис. 1, при больших значениях N эти зависимости сходятся к предельной кривой, практически совпадающей с построенной при $N = 1024$. Достаточно близко от предельной кривой находятся зависимости $R_f(v)$, построенные при $N = 512$ и $N = 256$. Для удельной скорости передачи $R_f(v) = 0,5$ бит/сек·Гц значение $v \cong 0,045$, т.е. каждый из сигналов, принадлежащих АС с N -мерным ПМ, должен иметь k ЭОС, причем их количество при $R_f(v) = 0,5$ составляет только

4,5 % от общего количества (N) ЭОС, из которых формируются все сигналы, принадлежащие АС. Алгоритм построения каждого из таких сигналов представляет собой процедуру определения по его номеру m номеров n_1, n_2, \dots, n_k тех ЭОС, которые входят в его состав.

Алгоритм нумерации вариантов размещения k символов единиц в последовательности, имеющей N позиций

Опишем алгоритм перечисления всех возможных вариантов размещения k символов единиц в последовательности, имеющей N позиций. Количество таких вариантов равно $C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$. Присвоение номеров этим вариантам может быть сделано многими способами.

Опишем алгоритм формирования номера m принятого сообщения, который состоит в следующем. Если в демодуляторе определено, что $n_1 = 1, n_2 = 2, \dots, n_k = k$, а остальные $(N-k)$ значения $n_i = 0$ при $i > k$, то $m = 1$. Для любого другого варианта размещения единиц в рассматриваемой последовательности числа n_i должны удовлетворять следующим условиям $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{(k-1)} < n_k \leq N$ и $n_i \geq i$. Для определения номера m принятого сообщения, соответствующего k номерам (n_1, n_2, \dots, n_k) принятых ЭОС, отметим, что множество всех C_N^k вариантов размещения может быть разбито на $(N-k+1)$ подмножеств 1-го порядка, в каждом из которых первая из единиц занимает одну из позиций $n_1 = 1, n_1 = 2, \dots, n_1 = (N-k+1)$, а остальные $(k-1)$ единицы могут занимать в каждом подмножестве другие $(N-n_1)$ позиций. Количество вариантов размещения единиц в каждом таком подмножестве равно, очевидно, $C_{N-n_1}^{k-1}$. При этом общее количество вариантов размещения единиц на k позициях из N возможных равно сумме вариантов размещения во всех описанных подмножествах. Отсюда следует соотношение

$$C_N^k = \sum_{n_1=1}^{(N-k+1)} C_{N-n_1}^{k-1}. \quad (2)$$

Разным вариантам размещения единиц в подмножестве, соответствующем определенному значению n_1 в рассматриваемом варианте нумерации этих вариантов, могут быть присвоены номера m , лежащие в интервалах

$$V_1(n_1) = W_{1\min} \leq m \leq W_{1\max} = V_1(n_1) + C_{N-n_1}^k, \quad (3)$$

где $W_{1\min}$ и $W_{1\max}$ минимальное и максимальное значение границ, в которых может находиться номер m , если

$$\text{задано значение } n_1, \text{ а } V_1(n_1) = \left(\sum_{t=1}^k C_{N-t}^{k-1} \right) = (C_N^k - C_{N-n_1}^k).$$

Таким образом, для варианта размещения с известным номером позиции n_1 , на котором размещена первая единица, определены границы, в которых должен находиться номер этого варианта. Точное значение номера

m полностью определяется номерами всех позиций $n_i (i = 1 \dots k)$, на которых размещены единицы в последовательности длиной в N , т.е. $m = F(i_1, i_2, \dots, i_k)$.

Для уточнения границ номера m , когда известно значение параметра $n_2 \geq (n_1 + 1)$, следуем изложенной выше логике. При этом подмножество 1-го порядка, соответствующее определенному варианту размещений, при известном значении позиции n_1 , на которой стоит первая единица, разбиваем на $(N - n_2 + 1)$ подмножеств 2-го порядка, где параметр n_2 должен находиться в интервале $(n_1 + 1) \leq n_2 \leq (N - n_1 + 1)$.

Таким образом, в каждом из подмножеств 1-го порядка, соответствующее определенному значению n_1 и имеющее $C_{N-n_1}^{k-1}$ элементов, разбивается на $(N - n_1 + 1)$ подмножеств 2-го порядка, причем число элементов в каждом из этих множеств равно $C_{N-n_2}^{k-2}$. Таким образом,

$$C_{N-n_1}^{k-1} = \sum_{t=1}^{N-k-n_1+2} C_{N-n_1-t}^{k-2}. \quad (4)$$

В подмножествах 2-го порядка, соответствующих значениям $n_2 = (n_1 + t)$, имеются $C_{N-n_2}^{k-2}$ элементов.

Обозначив
$$V_2(n_1, n_2) = \sum_{t=1}^{n_2-n_1} C_{N-n_1-t}^{k-2} = (C_{N-n_1}^{k-1} - C_{N-n_2}^{k-1}),$$

найдем уточненные границы, в которых лежит номер m , если известны значения n_1 и n_2 :

$$V_1(n_1) + V_2(n_1, n_2) + 1 = W_{2\min} \leq m \leq W_{2\max} = V_1(n_1) + V_2(n_1, n_2) + C_{N-n_2-1}^{k-1}. \quad (5)$$

Следуя изложенной процедуре, последовательно уточняем номер m и находим границы $W_{j\min}$ и $W_{j\max}$ для $j = 3 \dots k$ (отметим, что $W_{k\min} = W_{k\max}$). В результате определяем точное значение номера

$$m = F(n_1, n_2, \dots, n_k), \quad (6)$$

для конкретного размещения k единиц и $(N - k)$ нулей на N позициях.

При модуляции сигналов с ПМ требуется решить задачу обратную той, которая была рассмотрена выше. В этом случае требуется, зная номер m передаваемого сообщения, определить значения n_i – номера позиций в последовательности длиной N , на которых расположены единицы. Эти позиции будут определять номера ЭОС, которые войдут в состав m -го сигнала, принадлежащего АС с ПМ. Значения n_i определяются путем последовательной проверки условий выполнения неравенств $W_{i\min} \leq m \leq W_{i\max}$, в которых параметры $W_{j\min}$ и $W_{j\max}$ были определены выше.

Отметим, что совокупность значений n_i и последовательности двоичных чисел 0 и 1 в двоичной записи числа m представляют собой индексы модуляции [5], которые используются для формирования сигнала с ПМ, т.е. для определения номеров тех ЭОС, которые будут излучаться в эфир на передающей стороне линии связи.

В системах связи с временным уплотнением передаваемый сигнал занимает $(N/2)$ временных интервала, длительность которых равна τ . В канал связи сигналы передаются только в тех временных интервалах, в которых находятся выбранные для передачи сообщений ЭОС. Причем, в каждом интервале времени для передачи могут быть выбраны как синусная, так и косинусная составляющие гармонического колебания частоты ω_0 , либо обе эти составляющие.

В многочастотных системах связи передаваемый сигнал может передаваться на $(N/2)$ поднесущих, длительность каждой из которых равна T . Для передачи сообщений используются ЭОС, представляющие собой как синусную, так и косинусную составляющие гармонического колебания частоты ω_i .

Целесообразно отметить, что процедуру формирования АС с ПМ можно существенно упростить, если количество возможных ЭОС (N) в АС с ПМ, а также количество ЭОС, из которых состоит каждый из входящих в АС сигналов (k), выбрать кратным целому числу L , т.е. принять, что $N = L \cdot K_o$ и $k = L \cdot k_o$, а также учесть приближенное соотношение $\log_2(C_N^k) / [L \cdot \log_2(C_{K_o}^{k_o})] \cong 1$.

Это соотношение показывает, что при $N \gg 1$ вместо одной сложной процедуры формирования C_N^k сигналов с ПМ можно использовать L существенно более простых процедур формирования $C_{K_o}^{k_o}$ таких сигналов, в каждой из которых осуществляется выбор только k_o ЭОС из K_o возможных. При этом упрощенная процедура формирования АС с ПМ при $v = (k/N) = const$ приводит к снижению не более, чем на 2...5 % удельной скорости $R_f(v)$ передачи сообщений АС с ПМ, если соблюдается условие $N \geq 64$.

В качестве иллюстрации точности приближенного соотношения отметим, что, например, $\log_2(C_{256}^{14}) \div \div [8 \cdot \log_2(C_{32}^2)] = 1,049$; $\log_2(C_{128}^7) / [4 \cdot \log_2(C_{32}^2)] = 1,018$. Таким образом, если разбить последовательность длиной $N = 256$ на $L = 8$ подпоследовательностей длиной $K_o = 32$, и для каждой подпоследовательности формировать m_i сигналов ($1 \leq m_i \leq M_i$), каждый из которых принадлежит к АС, состоящий из $M_i = C_{32}^2$ сигналов с ПМ, то в результате с помощью такой более простой процедуры формируется АС с ПМ, содержащий $M_L = M_i^L$ сигналов с ПМ, причем, так как $M_L \cong C_{256}^{14}$, то общее количество таких сигналов будет почти таким же, как при формировании АС по полной процедуре.

Описание системы связи, предназначенной для передачи сигналов с небольшой удельной скоростью

На рис. 2 представлена блок-схема системы связи, предназначенная для передачи сообщений с удельной скоростью R_f .

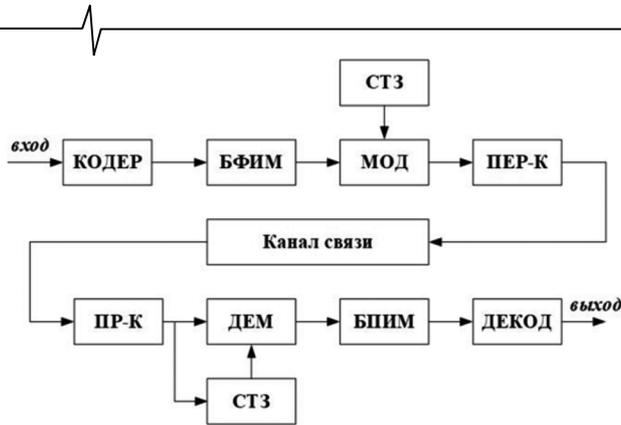


Рис. 2. Блок-схема системы связи, в которой применяется перестановочная модуляция

При поступлении на вход кодера (КОДЕР) системы связи двоичной последовательности в кодере формируется кодовая комбинация кода с МДР, состоящая из последовательности q -ичных символов, длина которой равна $N_q = (2^q - 1)$. Эта последовательность может быть разбита на блоки, состоящие из $N_{qs} < N_q$ q -ичных символов. Каждый такой блок символов можно рассматривать как номер сообщения m , которое должно быть передано по каналу связи с помощью сигналов с ПМ. Этот номер в блоке формирования индексов модуляции (БФИМ) с помощью алгоритма, описанного в предыдущем разделе, преобразуется в индексы модуляции – в k номеров n_1, n_2, \dots, n_k тех ЭОС, которые должны быть переданы по каналу связи. Индексы модуляции поступают на сигнальный вход модулятора (МОД), имеющего второй вход, на который подаются сигналы с выхода синтезатора опорных частот (СТЗ), которые используются при формировании ЭОС. В МОД формируется N -мерный сигнал с ПМ, который после усиления в передатчике (ПЕР-К), поступает в канал связи.

После прохождения канала связи и усиления в приемнике (ПР-К) принимаемый сигнал совместно с гауссовским шумом поступает на вход демодулятора (ДЕМ). На другой вход ДЕМ поступают сигналы с выхода СТЗ на приемном конце линии связи, который синхронизируется с принимаемым сигналом. В ДЕМ осуществляется синхронное детектирование всех N ЭОС, которые могут быть использованы для передачи сообщений в системе связи с ПМ. На выходах тех k синхронных детекторов (СД), на входы которых поступали ЭОС, содержащиеся в принятом сигнале, появляются напряжения, среднее значение которых имеет достаточно высокий уровень, а на выходах остальных $(N - k)$ СД появляются напряжения, обусловленные только шумом, поступившим на вход ДЕМ. Эти случайные напряжения имеют среднее значения, равное нулю. В результате обработки этих напряжений в ДЕМ осуществляется оценка индексов модуляции, которые соответствуют сигналу, поступившему на его вход. В результате демодуляции принятого сигнала определяются k номеров (n_1, n_2, \dots, n_k) тех СД, на выходах которых эти напряжения имеют наибольшие значения.

Номера n_1, n_2, \dots, n_k поступают на вход блока преобразования индексов модуляции (БПИМ) в номер принятого сообщения, представленный в виде последова-

тельности, состоящей из N_{qs} q -ичных символов. Несколько таких последовательностей объединяются и образуют последовательность длиной N_q , состоящую из символов, входящих в КК, переданной по каналу связи. Эта последовательность поступает на вход декодера (ДЕКОД), в котором исправляются ошибки принятых символов, которые, возможно, возникли при демодуляции сигналов с ПМ. На выход декодера поступает двоичная последовательность информационных символов, длина которой равна $N_{bl} = qN_qR_c$.

Покажем на примере, каким образом в рассматриваемой системе связи может быть передана кодовая комбинация ПК и МДР, имеющая длину $N_q = (2^q - 1)$, если удельная скорость передачи сообщений по линии связи составляет $R_f = 0,5$ бит/сек·Гц, нормированная длительность сигналов равна $(FT) = 128$ и $q = 8$. В данном случае каждый из сигналов, принадлежащих АС с ПМ, является переносчиком $N_{qs} = [R_f(FT)/q] = 8$ q -ичных символов. Так в коде с МДР каждая КК имеет длину $N_q = 255$, то все символы этой КК могут быть переданы с помощью $(N_q / N_{qs}) = 32$ сигналов, принадлежащих АС с ПМ.

Определение вероятности ошибки при демодуляции сигналов с ПМ

В данном разделе представлен анализ помехоустойчивости приема сигналов в системах связи, в которых сообщения передаются с помощью сигналов с ПМ. При формировании на передаче АС с ПМ в каждом интервале времени T , равном длительности сигналов, входящих в эти АС, из N ЭОС выбирается определенная группа из k ЭОС, которые используются для передачи сообщения с номером m . На выбранных ЭОС передается сообщение с номером m , а остальные $(N - k)$ ЭОС в канал связи не передаются. В оптимальном демодуляторе таких сигналов используются N синхронных детекторов, при этом на выходах определенных k из них в демодуляторе выделяются напряжения $U_{si} (i = 1 \dots k)$, определяющие принятое сообщение, а на выходах остальных $(N - k)$ СД выделяются напряжения U_{ni} , обусловленные только гауссовским шумом, действующим на входе приемника.

В системе с ПМ может быть передано $M = C_N^k$ сообщений и номер принятого сообщения определяется, как это показано ранее, номерами тех СД в демодуляторе, на выходе которых напряжения имеют наибольшее значение. Следует отметить, что в системах связи с ПМ мощность передатчика расходуется на передачу k разных ЭОС. Поэтому нормированное к мощности шума среднее значение напряжения на выходе тех k СД, на вход которых поступают переданные ЭОС, будет равно $\bar{U}_{si} = \sqrt{2N\rho_s/k}$, где ρ_s – отношение сигнал/шум на входе демодулятора. Так как каждый из передаваемых сигналов является переносчиком одного из M сообщений, номер которого может быть записан последова-

тельностью из $\log_2(M)$ двоичных знаков, то определенный выше параметр ρ_s связан с параметром ρ_b (ρ_b – отношение сигнал/шум на входе демодулятора, приходящееся на один бит принятого сообщения) соотношением $\rho_s = \rho_b \cdot \log_2(C_N^k)$.

Из приведенных выше пояснений работы демодулятора сигналов с ПМ следует, что условия, при выполнении которых могут произойти ошибки при приеме сигналов, имеют следующий вид:

$$\min(|U_{si}|) \leq \max_{k \neq i}(|U_{nk}|) \quad (7)$$

В (7) U_{si} – напряжения на выходах тех k СД, на входы которых поступают ЭОС, U_{nk} – напряжения на выходах тех $(N-k)$ СД, на входы которых поступает только шум.

Для вычисления вероятности того, что условие (7) будет выполняться, заметим, что плотность распределения вероятностей величины $u_s = \min(|U_{si}|)$ в (7) может быть записана следующим образом:

$$p_s(u_s) = k p_{sk}(u_s) \left[\int_{u_s}^{\infty} p_{sk}(x) dx \right]^{(k-1)}, \quad (8)$$

а вероятность того, что при $u_s = const$ выполняется условие (7), равна $\{1 - F_n(u_s)\}$, где

$$F_n(u_s) = \left[\int_{-u_s}^{u_s} p_n(x) dx \right]^{N-k}. \quad (9)$$

В (8) и (9) $p_{sk}(x) = \frac{\exp\{-(x - \sqrt{2N\rho_s/k})^2/2\}}{\sqrt{2\pi}}$ и

$p_n(x) = \frac{\exp[-x^2/2]}{\sqrt{2\pi}}$. Таким образом, вероятность ошибки при демодуляции сигналов с ПМ определяется следующей формулой:

$$p_{ser}(\rho_b, k, N) = \int_0^{\infty} \{1 - [F_n(u_s)]^{(N-k)}\} p_s(u_s) du_s. \quad (10)$$

На рис. 3 представлены зависимости ρ_{ser} от $(FT) = N/2$ при $\rho_b = 1, 2$ и 3 дБ, $v = (k/N) = 0,02$ и $0,05$.

Из этих зависимостей видно, что при увеличении (FT) при небольших значениях $\rho_b = 0$ и $1,5$ дБ вероятности ρ_{ser} уменьшаются с увеличением N весьма медленно, однако при больших значениях $\rho_b = 3$ скорость их уменьшения возрастает. Из рис. 3 также видно, что при $N \geq 450$ значения ρ_{ser} изменяются весьма незначительно. Это связано с тем, что минимальное расстояние между разными сигналами в АС с ПМ пропорционально $\bar{U}_{si} \cong \sqrt{2\rho_s/v}$, где $v = (k/N)$. Таким образом, в АС с ПМ это расстояние, в отличие от оптимальных поверхностно-сферических АС, рассмотренных в [1] и [5], не увеличивается с увеличением N . Это означает, что АС с ПМ не являются оптимальными с точки зрения возможности приближения систем связи, в которых они используются, к «идеальной» системе Шеннона.

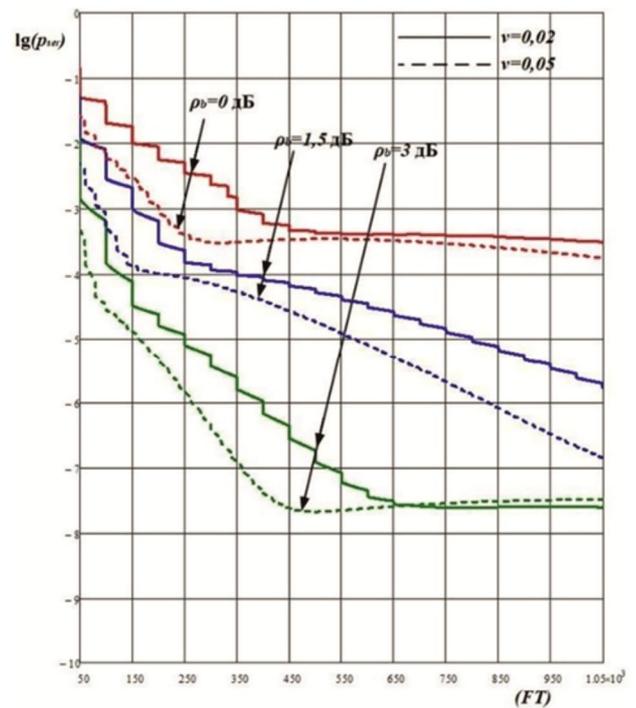


Рис. 3. Зависимости ρ_{ser} от FT при $v = 0,02$ и $0,05$ ($R_f = 0,25$ и $0,55$)

На рис. 4 представлены зависимости ρ_{ser} от (FT) при $\rho_b = -0,1, -0,5$ дБ и -1 дБ, $v = (k/N) = 0,02, 0,05$ и $0,1$ ($R_f = 0,25, 0,55$ и $0,1$). Эти зависимости рассчитаны при небольших значениях ρ_b , близких к пределу Шеннона для указанных выше удельных скоростей R_f передачи сообщений. Отметим, что предел Шеннона для определенного значения R_f определяется формулой [1, 12] $\rho_{bsh} = 10 \lg[(2^{R_f} - 1)/R_f]$.

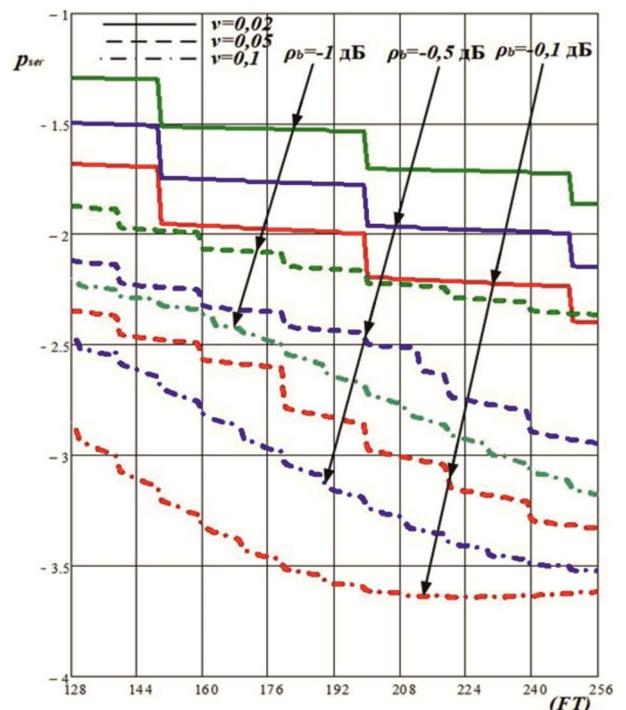


Рис. 4. Зависимости ρ_{ser} от FT при $v = 0,02, 0,05$ и $0,1$

Таблица 1. Значения $p_{ser}(FT = 128) / p_{ser}(FT = 256)$ и $p_{qs1}(FT = 128) / p_{qs2}(FT = 256)$ при разных значениях R_f и ρ_b

1	R_f бит/сек·Гц	0,25	0,55	0,9
2	N_{qs1} / N_{qs2}	48	8/16	16/32
3	ρ_b дБ	$p_{ser}(FT = 128) / p_{ser}(FT = 256)$ $p_{qs1}(FT = 128) / p_{qs2}(FT = 256)$		
4	-0,1	$0,02/5 \cdot 10^{-3}$ $5 \cdot 10^{-3}/6,25 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-3}/10^{-3}$ $6,25 \cdot 10^{-4}/6,25 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-3}/10^{-3}$ $1,25 \cdot 10^{-4}/3 \cdot 10^{-6}$
5	-0,5	$0,032/7 \cdot 10^{-3}$ $8 \cdot 10^{-3}/10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-3}/2 \cdot 10^{-3}$ $10^{-3}/1,25 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-3}/10^{-3}$ $2,5 \cdot 10^{-4}/3 \cdot 10^{-6}$
6	-1	$0,05/0,014$ $1,25 \cdot 10^{-2}/2 \cdot 10^{-3}$	$0,014/4 \cdot 10^{-3}$ $2 \cdot 10^{-3}/2,5 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-3}/10^{-3}$ $4,3 \cdot 10^{-4}/3 \cdot 10^{-6}$

Для указанных выше скоростей предел Шеннона равен, соответственно, -1,25, -0,74 и -0,167 дБ. При таких небольших значениях ρ_b на входе демодулятора сигналов с ПМ вероятности ошибок в последовательности символов, появляющихся на выходе демодулятора, имеют довольно большие значения $\rho_{ser} = 10^{-3} \dots 10^{-2}$. Поэтому для того, чтобы обеспечить в системе связи с ПМ высокую надежность приема сообщений ошибки, возникшие при демодуляции, необходимо исправить, используя для этого ПК.

Зависимости рис. 4 показывают, что с увеличением (FT) – размерности АС с ПМ, вероятность ρ_{ser} уменьшается, однако из-за того, что АС с ПМ не является оптимальным по Шеннону, эта вероятность не может быть сделана меньше чем $\rho_{ser} \geq 3 \cdot 10^{-4}$. Так как с уменьшением ρ_{ser} эффективность исправления ошибок, возникающих при демодуляции сигнала, повышается, то, как видно из рис. 4, размерность АС с ПМ целесообразно выбирать (FT) = 256.

Отметим, что для определения вероятности ρ_{dec} – ошибки декодирования принятой КК требуется знание ρ_{qs} – вероятности ошибки при приеме одного q -ичного символа в последовательности символов, поступающих на вход декодера. Как показано в [1], значения ρ_{qs} и ρ_{ser} связаны приближенным соотношением $p_{qs} \cong p_{ser} / N_{qs}$, где N_{qs} – количество q -ичных символов, которые передаются каждым сигналом с ПМ. Значения N_{qs} определяются следующей формулой $N_{qs} = \text{int}[R_f(FT) / q]$.

На основе данных, приведенных на рис. 4, составлена табл. 1, в которой приведены значения величин $p_{ser}(FT = 128)$ и $p_{ser}(FT = 256)$ (в табл. 1 они обозначены $p_{ser}(FT = 128) / p_{ser}(FT = 256)$), а также при $q = 8$ аналогично значения величин $p_{qs1}(FT = 128) / p_{qs2}(FT = 256)$ при разных значениях R_f и ρ_b .

Данные табл. 1 будут использованы в следующем разделе для выбора параметров ПК с МДР, который обеспечивает вероятность ошибки одного бита информационного сообщения в рассматриваемой системе связи, равную $p_{bl} = 10^{-10}$.

Оптимальный выбор для ПК кодовой скорости и длины КК

В [1] показано, что вероятность p_{bl} связана с вероятностью ошибки декодирования КК p_{dec} соотношением $p_{bl} = p_{dec} / qN_q$, где N_q – длина КК кода с МДР, равная $N_q = (2^q - 1)$, а вероятность p_{dec} определяется следующей формулой [1]:

$$p_{dec} \cong e^{-N_q \left\{ 0,5(1-R_c) \ln \left[\frac{0,5(1-R_c)}{p_q} \right] + 0,5(1+R_c) \ln \left[\frac{0,5(1+R_c)}{1-p_q} \right] \right\}} \tag{11}$$

В (11) R_c – кодовая скорость ПК. Из (11) следует, что зависимость длины ПК от параметров R_c , p_{qs} и p_{dec} может быть определена с помощью следующей формулы:

$$N_q \cong \frac{\ln(1/p_{dec})}{\Phi(R_c, p_{qs})} \tag{12}$$

$$\Phi(R_c, p_{qs}) = 0,5(1-R_c) \ln \left[\frac{0,5(1-R_c)}{p_{qs}} \right] + 0,5(1+R_c) \ln \left[\frac{0,5(1+R_c)}{1-p_{qs}} \right]$$

Учитывая, что в (12) $p_{dec} = p_{bl} \cdot q \cdot N_q$, из (11) получим следующее уравнение для определения

$$N_q : N_q = \frac{\ln[(p_{be} \cdot q)^{-1}] + \ln(N_q)}{\Phi(R_c, p_{qs})}$$

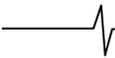
Это уравнение может быть решено методом итераций. В качестве первого приближения к его решению примем $N_q^1 = \frac{\ln[(p_{be} \cdot q)^{-1}]}{\Phi(R_c, p_{qs})}$,

$$\text{второго} - N_q^2 = \frac{\ln[(p_{be} \cdot q)^{-1}] + \ln(N_q^1)}{\Phi(R_c, p_{qs})}$$

а к качестве окончательного решения следующее:

$$N_q = \frac{\ln[(p_{bl} \cdot q)^{-1}] + \ln(N_q^2)}{\Phi(R_c, p_{qs})} \tag{13}$$

Вычисления значения N_q на третьей и четвертой итерации незначительно отличаются от значения N_q , полученного на второй итерации. Точность определения этого значения на второй итерации составляет примерно 10 %.



Кодовая скорость (R_c) и длина КК (N_q) должны быть выбраны так, чтобы энергетические потери (ЭП) [1] от применения ПК были бы минимальны, а вероятность ошибки декодирования, приходящаяся на один информационный бит (p_{bl}) была бы весьма незначительной (равной, например, $p_{bl} = 10^{-10}$). Если на вход декодера поступают n -ичные символы, некоторые из которых с вероятностью, равной p_{qs} , приняты с ошибкой, то среднее количество ошибочно принятых символов в КК длиной N_q равно $p_{qs} N_q$. Для их исправления должен применяться ПК, который может исправлять количество ошибок $t \geq N_q p_{qs}$. Как показано в [1] (формула (8)), из этого условия следует, что кодовая скорость ПК с МДР не должна превышать предельное значение, равное $R_{c0} = (1 - 2p_{qs})$.

В [1] и [5] отмечалось, что уменьшение кодовой скорости R_c приводит к снижению СЭ, равной $\mu_s = R_c < 1$, по сравнению с «идеальной» системой Шеннона. Снижение СЭ означает, что полоса частот, которую необходимо выделить для работы системы, в которой используются ПК, должна превышать минимально необходимую в $(1/\mu_s)$ раз.

Кроме того, применение ПК приводит к ЭП потерям по сравнению с «идеальной» системой Шеннона. Эти потери можно определить по формуле ([1, 5])

$$\Delta_{ПК}(R_f, R_c) = 10 \cdot \lg \left[\frac{2^{R_f} - 1}{2^{R_f R_c} - 1} \right] R_c \text{ дБ.} \quad (14)$$

Для того, чтобы уменьшить эти ЭП, значение R_c следует выбирать лишь немного меньше предельной, например, $R_c = 0,97 \cdot R_{c0}$. При этом СЭ системы будет иметь значение, близкое к предельно возможному – для низкоскоростных систем ЭП она составит 97 %. Кроме того, из-за применения ПК в рассматриваемых системах, в которых $R_f < 1$, будут весьма незначительны $\Delta_{ПК}(R_f, R_c) \cong 0$ (дБ). Поэтому в таких системах при $R_c \geq 0,75$ из-за применения ПК будет снижаться только СЭ этих систем.

На рис. 5 показаны зависимости $\log_2(N_q)$ от $R_c \leq 0,97 \cdot R_{c0}$ при $p_{qs} = 2 \cdot 10^{-3}$, $1,25 \cdot 10^{-3}$ и $3 \cdot 10^{-6}$ для случая, когда $p_{bl} = 10^{-10}$ и $(FT) = 256$. Из рис. 5 видно, что при меньших значениях R_c требуемая надежность приема может быть обеспечена с помощью ПК с меньшей длиной КК.

На основе данных табл. 1 и рис. 5 составлена табл. 2, в которой приведены данные о характеристиках низкоскоростных систем связи, использующих для пе-

редачи сообщений сигналы с ПМ, а для исправления ошибок, возникающих при демодуляции этих сигналов, ПК с МДР. Эти данные определены для случая, когда $(FT) = 256$. В первом столбце этой таблицы указаны удельные скорости передачи сообщений R_f (в бит/сек·Гц) в исследуемых системах; во втором, ρ_{bsh} – минимально возможное отношение сигнал/шум (в дБ) на входе демодулятора, приходящееся на один бит принятого сообщения в «идеальной» системе Шеннона, в которой обеспечивается абсолютная надежность передачи; в третьем, Δ_{dem} – энергетические потери, возникающие при демодуляции сигналов с ПМ, относительно «идеальной» системы Шеннона. Отметим, что из указанных в столбцах 4...8 двух цифр первая относится к системе, в которой кодовая скорость ПК равна $R_c = 0,8$, а вторая – когда $R_c = 0,9$.

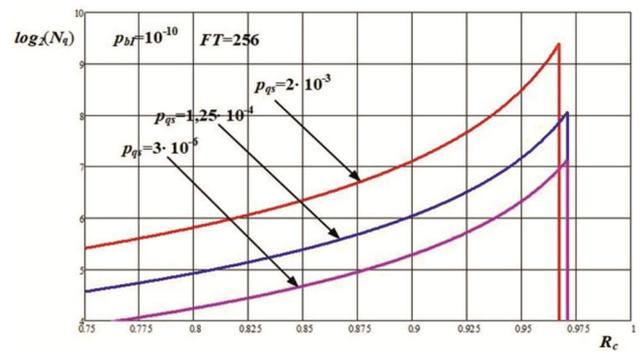


Рис. 5. Зависимости длины КК N_q от R_c , p_q и p_{bl}

В столбце 4 указаны данные о μ_s – СЭ рассматриваемых систем; в столбце 5 – данные о $\Delta_{ПК}$ – ЭП, связанных с применением в них ПК; в столбце 6 – данные о $\mu_{en} = -(\Delta_{dem} + \Delta_{ПК})$, коэффициенте ЭЭ этих систем, его значение, взятое со знаком «минус», определяет их ЭП по отношению к «идеальной» системе Шеннона; в столбце 7 – N_q – длина КК, выраженная в количестве в ней n -ичных символов, при которой на выходе декодера обеспечивается вероятность ошибочного приема одного информационного символа, равная $p_{bl} = 10^{-10}$; в столбце 8 – N_b – длина КК, определенная количеством имеющихся в ней двоичных знаков.

Данные табл. 2 показывают, что у исследуемых систем связи, в которых используются сигналы с ПМ и ПК с МДР, энергетические потери по отношению к пределу Шеннона весьма незначительны и при $R_f \leq 1$ бит/сек·Гц не превышают 0,5 дБ. Спектральную эффективность таких систем можно сделать весьма близкой к предельной, если параметры ПК выбрать так, чтобы кодовая скорость была бы близка к предельному значению ($R_c \cong 0,97 \cdot R_{c0}$). Однако при таком выборе длина КК становится значительной. Если допустимо, чтобы СЭ

Таблица 2. Данные о ЭЭ и СЭ системы с ПМ и длине кода с МДР

R_f	ρ_{bsh} дБ	Δ_{dem} дБ	μ_s	$\Delta_{ПК}$ дБ	μ_{en} дБ	N_q	N_b
0,25	-1,21	0,21	0,80,9	0,08/0,04	-0,29/-0,25	64/256	512/2048
0,55	-0,74	0,24		0,175/0,09	-0,415/-0,33	32/64	256/512
0,9	-0,167	0,167		0,3/0,167	-0,467/-0,334	32/64	256/512

создаваемой системы связи составляло бы 80 % или 90 % от предельной ($R_c = 0,8$ или $0,9$), то длина КК, необходимая для обеспечения требуемой надежности приема сообщений ($p_{bl} = 10^{-10}$), оказывается небольшой ($N_b = 256 \dots 2048$ бит).

Заключение

В данной работе исследованы возможности создания низкоскоростных систем связи, энергетическая (ЭЭ) и спектральная (СЭ) эффективности которых близки к «идеальной» системе Шеннона. В таких системах для передачи сообщений применяются многомерные АС с перестановочной модуляцией (ПМ), а также помехоустойчивые коды (ПК) с максимальным достижимым расстоянием (МДР), такие, например, как коды RS или LDPC.

В работе описаны два алгоритма формирования АС с ПМ – полный и существенно более простой в технической реализации, дан анализ помехоустойчивости приема сигналов с ПМ и подробно рассмотрены вопросы, связанные с выбором параметров ПК для низкоскоростных систем связи, которые позволяют обеспечить высокую надежность приема сообщений и их высокую СЭ.

Показано, что, в отличие от высокоскоростных систем связи, в которых для передачи сообщений применяются двумерные АС с QAM и ПК с МДР [1], в исследованных низкоскоростных системах оптимальный выбор их параметров позволяет обеспечить их ЭЭ и СЭ весьма близкие к предельным – тем, которые имеет «идеальная» система Шеннона. Показано также, что применяемый в этих системах ПК может иметь сравнительно незначительную длину КК, откуда следует, что его реализация является достаточно простой в техническом отношении. В качестве помехоустойчивого кода, который в таких системах может обеспечить высокую надежность приема сообщений, целесообразно использовать код RS небольшой длины.

Литература

1. Быховский М.А. Возможности создания высокоскоростных систем связи с высокой спектральной и энергетической эффективностью (часть 1) // Цифровая обработка сигналов, 2021, № 1, с. 20-31.
2. Котельников В.А. Теория потенциальной помехоустойчивости. М.: Государственное энергетическое издательство. 1956.
3. Прокис Дж. Цифровая связь. // Перевод с английского под ред. Д.Д. Кловского. // М.: Советское радио, 2000
4. Slepian D. Permutation modulation. Proc. IEEE, vol. 53, Mar. 1965.
5. Быховский М.А. Гиперфазовая модуляция – оптимальный метод передачи сообщений в гауссовских каналах связи. М.: Техносфера, 2018
6. Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. М.: Мир, 1976.
7. Фролов А.А., Зяблов В.В. Границы минимального кодового расстояния для недвоичных кодов на двудольных графах, Проблемы передачи информации, 2011, выпуск 4, с. 27-42.
8. Фролов А.А. Корректирующие свойства недвоичных кодов с малой плотностью проверок. Диссертация на соискание научной степени ф.-м. наук. ИППИ им. А.А. Харкевича РАН, 2012.
9. Осипчук С.А. Повышение информационной эффективности беспроводных систем передачи на основе перераспределения ресурсов канала связи. КПИ, Диссертация на соискание научной степени к.т.н., Киев, 2015.
10. Uryvsky L., Osypchuk S. The analytical description of regular LDPS codes correcting ability. Institute of Telecommunication Systems National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute». Transport and Telecommunication. Vol. 15, № 3, 2014.
11. Быховский М.А. Метод формирования многочастотных сигналов и возможности их применения в системах связи. Цифровая обработка сигналов, № 1, 2019.