

## ПЕРЕКРЕСТНАЯ КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННАЯ СИММЕТРИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДВУМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ С ВАРЬИРУЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ

*Пономарева О.В., д.т.н., профессор Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова, e-mail: [ponva@mail.ru](mailto:ponva@mail.ru);*

*Пономарев А.В., к.э.н., доцент Ижевского государственного технического университета им. М.Т. Калашникова, e-mail: [palexizh@gmail.com](mailto:palexizh@gmail.com);*

*Пономарева Н.В., к.т.н., доцент Севастопольского государственного университета, e-mail: [yolkany@gmail.com](mailto:yolkany@gmail.com)*

### CROSSED COMPLEX-CONJUGATED SYMMETRY COEFFICIENTS OF THE TWO-DIMENSIONAL DISCRETE FOURIER TRANSFORM WITH VARIABLE PARAMETERS OF REAL SIGNALS

*Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Ponomareva N.V.*

*In many areas of scientific research, the methods and algorithms of digital Fourier processing have applications in solving a wide range of practical problems. The methods and algorithms of this group for processing complex and real discrete finite signals are based on one-dimensional, two-dimensional (generally multidimensional) discrete Fourier transform. The practice of applying the methods of digital Fourier processing of discrete finite signals based on discrete Fourier transforms has revealed both the advantages of these unitary transformations and their disadvantages, which manifest themselves in the form of a number of negative effects. These are, first of all, the picket fence effect, the aliasing effect and the leakage effect, as well as the scalloping effect. The paper considers two new discrete Fourier transforms that are a generalization of the classical discrete Fourier transforms: the parametric discrete Fourier transform (one-dimensional case) (DFT-P) and the discrete two-dimensional Fourier transform with variable parameters (two-dimensional case) (2D DFT-IP). These Fourier transforms, which are a development of the classical discrete Fourier transforms, make it possible to eliminate or significantly weaken the influence of the negative effects inherent in standard discrete Fourier transforms. Due to the wide distribution of real signals, in order to develop effective and efficient methods for the Fourier processing of this class of signals in new bases, the properties of the complex conjugate symmetry of the DFT-P and 2D DFT-IP coefficients are considered in the work. The concept of cross complex-conjugate symmetry of 2D DFT-WT coefficients of real signals is introduced. The properties of the cross complex conjugate symmetry of the 2D DFT-WT coefficients of real signals are confirmed by the results of mathematical modeling. Methods and algorithms for fast calculation of the discrete Fourier transform with variable parameters of real signals for various combinations of variable parameters have been developed.*

**Key words:** real signal, parametric discrete Fourier transform, discrete two-dimensional Fourier transform with variable parameters, cross complex conjugate symmetry.

**Ключевые слова:** действительный сигнал, параметрическое дискретное преобразование Фурье, дискретное двумерное преобразование Фурье с варьируемыми параметрами, перекрестная комплексно-сопряженная симметрия.

#### Введение

Методы и алгоритмы цифровой Фурье-обработки, основанные на дискретном преобразовании Фурье (ДФФ), имеют самое широкое приложение при решении большого круга практических задач во многих областях научных исследований [1-38]. В научно-квалификационной работе одного из авторов [38] введено и исследовано параметрическое дискретное преобразование (ДФФ-П).

ДФФ-П является обобщением и развитием классического ДФФ и в матричной форме описывается следующим соотношением:

$$S_{N,\theta} = \frac{1}{N} \mathbf{F}_{N,\theta} \mathbf{X}_N; \quad 0 \leq \theta < 1; \quad (1)$$

Во многих областях научных исследований методы и алгоритмы цифровой Фурье-обработки имеют приложения при решении большого круга практических задач. В основе методов и алгоритмов этой группы обработки комплексных и действительных дискретных финитных сигналов лежит одномерное, двумерное (в общем случае многомерное) дискретное преобразование Фурье. Практика применения методов цифровой Фурье-обработки дискретных финитных сигналов на основе дискретных преобразований Фурье выявила как преимущества этих унитарных преобразований, так и их недостатки, которые проявляются в виде ряда негативных эффектов. Это, прежде всего, эффекты частоты, наложения и утечки (picket fence effect, aliasing effect и leakage effect), а также гребешковый эффект (scalloping effect). В работе рассматриваются два новых дискретных преобразования Фурье, являющихся обобщением классических дискретных преобразований Фурье: параметрическое дискретное преобразование Фурье (одномерный случай) (ДФФ-П) и дискретное двумерное преобразование Фурье с варьируемыми параметрами (двумерный случай) (2D ДФФ-ВП). Данные преобразования Фурье, являющиеся развитием классических дискретных преобразований Фурье, позволяют устранить или существенно ослабить влияние негативных эффектов, присущих стандартным дискретным преобразованиям Фурье. В силу широкого распространения действительных сигналов, с целью разрабатки эффективных и результативных методов Фурье-обработки этого класса сигналов в новых базисах, в работе рассмотрены свойства комплексно-сопряженной симметрии коэффициентов ДФФ-П и 2D ДФФ-ВП. Введено понятие перекрестной комплексно-сопряженной симметрии коэффициентов 2D ДФФ-ВП действительных сигналов. Свойства перекрестной комплексно-сопряженной симметрии коэффициентов 2D ДФФ-ВП действительных сигналов подтверждены результатами математического моделирования. Разработаны методы и алгоритмы быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами действительных сигналов при различных сочетаниях варьируемых параметров.







Табл. 1. действительный сигнал  $X_{8 \times 8}$

2,021	0,502	-1,998	0,272	0,337	0,138	-1,611	-1,007
1,254	0,786	1,121	0,828	-0,555	-0,569	0,588	0,049
1,405	1,178	-1,114	0,247	-0,817	-1,267	-1,805	-0,702
0,100	-0,067	-0,913	1,627	-0,676	-1,237	0,106	-0,372
1,669	0,192	2,072	-0,312	0,253	-1,055	0,636	0,273
1,727	-1,884	0,769	-2,643	-0,943	-0,916	2,471	1,857
1,130	-1,917	0,410	-0,040	0,692	0,327	-1,926	-0,318
2,261	-1,380	-0,041	-0,672	-2,276	-0,656	0,832	-0,774

Находим 2D ДПФ-ВП действительного сигнала  $X_{8 \times 8}$  при  $(\theta_1 = 1/4, \theta_2 = 1/4)$  (табл. 2).

Табл. 2. 2D ДПФ-ВП действительного сигнала  $X_{8 \times 8}$ ,  $(\theta_1 = 1/4, \theta_2 = 1/4)$

0,008	0,003	0,017	0,009	0,003	0,006	0,004	0,009
+0,007i	-0,013i	-0,003i	-0,011i	-0,014i	-0,007i	-0,002i	-0,009i
0,004	0,000	0,000	-0,002	0,01	0,006	0,007	0,007
+0,003i	+0,009i	-0,003i	+0,002i	+0,011i	-0,01i	-0,005i	-0,01i
-0,004	-0,005	0,004	0,006	-0,005	0,007	0,012	0,002
-0,004i	-0,008i	+0,004i	-0,003i	-0,007i	+0,000i	+0,004i	+0,003i
-0,011	0,011	0,005	0,000	0,001	0,006	0,002	0,003
+0,005i	+0,008i	+0,000i	-0,001i	+0,003i	+0,004i	+0,006i	-0,003i
0,001	-0,004	-0,003	0,005	0,001	-0,003	0,005	0,016
+0,002i	+0,012i	-0,011i	-0,002i	+0,006i	+0,008i	-0,009i	+0,003i
-0,002	-0,008	0,003	0,002	-0,006	0,001	0,008	-0,009
+0,008i	+0,002i	-0,007i	-0,002i	+0,006i	+0,005i	-0,01i	+0,005i
0,004	0,005	0,002	-0,005	0,005	-0,001	0,001	-0,003
-0,006i	+0,003i	+0,000i	+0,012i	+0,001i	+0,001i	+0,006i	+0,000i
0,003	0,000	0,001	-0,002	-0,014	-0,007	0,007	0,001
+0,006i	+0,000i	-0,004i	-0,014i	+0,004i	+0,008i	-0,004i	+0,014i

Находим 2D ДПФ-ВП 2D действительного сигнала  $X_{8 \times 8}$  при  $(\theta_1 = 3/4, \theta_2 = 3/4)$  (табл. 3).

Табл. 3. 2D ДПФ-ВП действительного сигнал  $X_{8 \times 8}$ ,  $(\theta_1 = 3/4, \theta_2 = 3/4)$

0,001	0,007	-0,007	-0,014	-0,002	0,001	0,000	0,003
-0,014i	+0,004i	-0,008i	-0,004i	+0,014i	+0,004i	+0,000i	-0,006i
-0,003	0,001	-0,001	0,005	-0,005	0,002	0,005	0,004
+0,000i	-0,006i	-0,001i	-0,001i	-0,012i	+0,000i	-0,003i	+0,006i
-0,009	0,008	0,001	-0,006	0,002	0,003	-0,008	-0,002
-0,005i	+0,010i	-0,005i	-0,006i	+0,002i	+0,007i	-0,002i	-0,008i
0,016	0,005	-0,003	0,001	0,005	-0,003	-0,004	0,001
-0,003i	+0,009i	-0,008i	-0,006i	+0,002i	+0,011i	-0,012i	-0,002i
0,003	0,002	0,006	0,001	0,000	0,005	0,011	-0,011
+0,003i	-0,006i	-0,004i	-0,003i	+0,001i	+0,000i	-0,008i	-0,005i
0,002	0,012	0,007	-0,005	0,006	0,004	-0,005	-0,004
-0,003i	-0,004i	+0,000i	+0,007i	+0,003i	-0,004i	+0,008i	+0,004i
0,007	0,007	0,006	0,010	-0,002	0,000	0,000	0,004
+0,010i	+0,005i	+0,010i	-0,011i	-0,002i	+0,003i	-0,009i	-0,003i
0,009	0,004	0,006	0,003	0,009	0,017	0,003	0,008
+0,009i	+0,002i	+0,007i	+0,014i	+0,011i	+0,003i	+0,013i	-0,007i

Находим 2D ДПФ-ВП действительного сигнала  $X_{8 \times 8}$  при  $(\theta_1 = 1/2, \theta_2 = 1/4)$  (табл. 4).

Табл. 4. 2D ДПФ-ВП действительного сигнал  $X_{8 \times 8}$ ,  $(\theta_1 = 1/2, \theta_2 = 1/4)$

0,018	0,000	0,017	0,01	0,000	0,004	0,007	0,004
+0,003i	-0,005i	-0,009i	-0,011i	-0,01i	-0,009i	-0,002i	-0,01i
0,005	0,009	0,000	-0,001	0,016	0,002	0,004	-0,001
-0,004i	+0,006i	+0,000i	+0,006i	+0,008i	-0,004i	-0,004i	-0,012i
0,000	-0,009	0,005	0,004	-0,009	0,002	0,012	0,009
+0,001i	+0,000i	+0,002i	-0,005i	+0,000i	-0,003i	-0,006i	+0,000i
-0,008	0,01	0,005	-0,002	0,000	0,005	0,005	0,001
+0,013i	+0,003i	+0,000i	+0,001i	+0,004i	+0,001i	+0,005i	-0,004i
0,004	0,009	-0,009	0,000	0,003	0,004	-0,005	0,012
-0,002i	+0,013i	-0,001i	-0,004i	+0,003i	+0,013i	-0,003i	-0,009i
0,004	-0,003	-0,005	-0,002	-0,002	0,003	-0,001	-0,005
+0,006i	+0,01i	-0,005i	-0,006i	+0,007i	+0,006i	-0,015i	+0,005i
-0,004	0,003	-0,001	0,003	0,004	-0,001	0,004	-0,002
-0,005i	-0,001i	-0,003i	+0,012i	+0,000i	+0,002i	+0,005i	+0,006i
0,007	0,003	0,002	-0,01	-0,011	-0,005	-0,004	0,007
+0,004i	+0,002i	-0,003i	-0,013i	+0,007i	+0,012i	-0,008i	+0,008i

Находим 2D ДПФ-ВП действительного сигнала  $X_{8 \times 8}$  при  $(\theta_1 = 1/2, \theta_2 = 3/4)$  (табл. 5).

Табл. 5. 2D ДПФ-ВП действительного сигнала  $X_{8 \times 8}$ ,  $(\theta_1 = 1/2, \theta_2 = 3/4)$

0,007 -0,008i	-0,004 +0,008i	-0,005 -0,012i	-0,011 -0,007i	-0,01 +0,013i	0,002 +0,003i	0,003 -0,002i	0,007 -0,004i
-0,002 -0,006i	0,004 -0,005i	-0,001 -0,002i	0,004 +0,000i	0,003 -0,012i	-0,001 +0,003i	0,003 +0,001i	-0,004 +0,005i
-0,005 -0,005i	-0,001 +0,015i	0,003 -0,006i	-0,002 -0,007i	-0,002 +0,006i	-0,005 +0,005i	-0,003 -0,01i	0,004 -0,006i
0,012 +0,009i	-0,005 +0,003i	0,004 -0,013i	0,003 -0,003i	0,000 +0,004i	-0,009 +0,001i	0,009 -0,013i	0,004 +0,002i
0,001 +0,004i	0,005 -0,005i	0,005 -0,001i	0,000 -0,004i	-0,002 -0,001i	0,005 +0,000i	0,01 -0,003i	-0,008 -0,013i
0,009 +0,000i	0,012 +0,006i	0,002 +0,003i	-0,009 +0,000i	0,004 +0,005i	0,005 -0,002i	-0,009 +0,000i	0,000 -0,001i
-0,001 +0,012i	0,004 +0,004i	0,002 +0,004i	0,016 -0,008i	-0,001 -0,006i	0,000 +0,000i	0,009 -0,006i	0,005 +0,004i
0,004 +0,01i	0,007 +0,002i	0,004 +0,009i	0,000 +0,01i	0,01 +0,011i	0,017 +0,009i	0,000 +0,005i	0,018 -0,003i

Находим 2D ДПФ-ВП действительного сигнала  $X_{8 \times 8}$  при  $(\theta_1 = 1/4, \theta_2 = 1/2)$  (табл. 6).

Табл. 6. 2D ДПФ-ВП действительного сигнала  $X_{8 \times 8}$ ,  $(\theta_1 = 1/4, \theta_2 = 1/2)$

0,009 +0,001i	-0,008 -0,011i	0,012 -0,013i	-0,001 -0,014i	-0,013 -0,008i	0,000 -0,001i	0,004 -0,001i	0,003 -0,003i
0,008 -0,001i	0,005 +0,005i	0,001 -0,003i	0,001 +0,002i	0,012 +0,000i	-0,005 -0,008i	0,002 -0,005i	-0,002 -0,01i
-0,004 -0,002i	-0,013 -0,001i	0,009 +0,000i	0,003 -0,006i	-0,009 -0,002i	0,002 -0,006i	0,013 -0,004i	0,003 +0,002i
-0,006 +0,011i	0,009 -0,006i	0,011 -0,001i	0,000 -0,001i	0,000 -0,001i	0,006 -0,004i	0,011 +0,007i	-0,001 -0,002i
-0,002 +0,003i	0,007 +0,009i	-0,004 -0,003i	0,004 -0,005i	0,003 +0,001i	0,004 +0,007i	0,003 -0,003i	0,014 -0,011i
0,002 +0,011i	-0,004 +0,01i	-0,002 -0,006i	0,003 -0,006i	-0,001 +0,009i	0,006 +0,005i	0,001 -0,011i	0,000 +0,008i
-0,005 -0,004i	0,005 +0,003i	0,003 +0,001i	0,01 +0,013i	0,006 -0,003i	0,001 +0,002i	0,006 +0,005i	-0,003 +0,003i
0,001 +0,003i	0,002 +0,004i	-0,002 +0,000i	-0,007 -0,002i	-0,006 +0,015i	0,001 +0,016i	0,005 -0,003i	0,011 +0,016i

Находим 2D ДПФ-ВП действительного сигнала  $X_{8 \times 8}$  при  $(\theta_1 = 3/4, \theta_2 = 1/2)$  (табл. 7).

Табл. 7. 2D ДПФ-ВП действительного сигнала  $X_{8 \times 8}$ ,  $(\theta_1 = 3/4, \theta_2 = 1/2)$

0,011 -0,016i	0,005 +0,003i	0,001 -0,016i	-0,006 -0,015i	-0,007 +0,002i	-0,002 +0,000i	0,002 -0,004i	0,001 -0,003i
-0,003 -0,003i	0,006 -0,005i	0,001 -0,002i	0,006 +0,003i	0,010 -0,013i	0,003 -0,001i	0,005 -0,003i	-0,005 +0,004i
0,000 -0,008i	0,001 +0,011i	0,006 -0,005i	-0,001 -0,009i	0,003 +0,006i	-0,002 +0,006i	-0,004 -0,010i	0,002 -0,011i
0,014 +0,011i	0,003 +0,003i	0,004 -0,007i	0,003 -0,001i	0,004 +0,005i	-0,004 +0,003i	0,007 -0,009i	-0,002 -0,003i
-0,001 +0,002i	0,011 -0,007i	0,006 +0,004i	0,000 +0,001i	0,000 +0,001i	0,011 +0,001i	0,009 +0,006i	-0,006 -0,011i
0,003 -0,002i	0,013 +0,004i	0,002 +0,006i	-0,009 +0,002i	0,003 +0,006i	0,009 +0,000i	-0,013 +0,001i	-0,004 +0,002i
-0,002 +0,010i	0,002 +0,005i	-0,005 +0,008i	0,012 +0,000i	0,001 -0,002i	0,001 +0,003i	0,005 -0,005i	0,008 +0,001i
0,003 +0,003i	0,004 +0,001i	0,000 +0,001i	-0,013 +0,008i	-0,001 +0,014i	0,012 +0,013i	-0,008 +0,011i	0,009 -0,001i

Находим 2D ДПФ-ВП действительного сигнала  $X_{8 \times 8}$  при  $(\theta_1 = 3/4, \theta_2 = 1/4)$  (табл. 8).

Табл. 8. 2D ДПФ-ВП действительного сигнала  $X_{8 \times 8}$ ,  $(\theta_1 = 3/4, \theta_2 = 1/4)$

0,020	0,005	0,014	0,010	0,002	0,002	0,009	-0,001
-0,008i	+0,002i	-0,012i	-0,013i	-0,006i	-0,007i	-0,003i	-0,006i
-0,002	0,010	0,001	0,001	0,019	0,005	0,006	-0,007
-0,005i	-0,002i	+0,001i	+0,009i	+0,000i	+0,000i	-0,001i	-0,004i
0,005	-0,004	0,006	0,004	-0,004	-0,002	0,003	0,008
-0,002i	+0,006i	+0,001i	-0,006i	+0,008i	+0,002i	-0,010i	-0,008i
0,000	0,007	0,004	-0,001	0,001	0,002	0,007	-0,002
+0,017i	+0,001i	-0,001i	+0,003i	+0,005i	+0,000i	+0,001i	-0,004i
-0,002	0,017	-0,003	-0,004	0,001	0,013	-0,004	0,001
-0,005i	+0,001i	+0,007i	+0,000i	+0,000i	+0,009i	+0,008i	-0,010i
0,004	0,006	-0,005	-0,008	0,000	0,008	-0,011	-0,005
-0,001i	+0,009i	+0,002i	-0,004i	+0,005i	+0,004i	-0,011i	+0,003i
-0,006	-0,001	-0,007	0,007	0,003	-0,001	0,006	0,005
+0,003i	-0,001i	-0,002i	+0,007i	-0,001i	+0,003i	+0,001i	+0,007i
0,007	0,006	0,004	-0,015	-0,008	0,002	-0,013	0,004
-0,001i	-0,001i	-0,004i	-0,007i	+0,007i	+0,013i	+0,000i	+0,002i

Находим 2D ДПФ-ВП действительного сигнала  $X_{8 \times 8}$  при  $(\theta_1 = 1/4, \theta_2 = 3/4)$  (табл. 9).

Табл. 9. 2D ДПФ-ВП действительного сигнала  $X_{8 \times 8}$ ,  $(\theta_1 = 1/4, \theta_2 = 3/4)$

0,004	-0,013	0,002	-0,008	-0,015	0,004	0,006	0,007
-0,002i	+0,000i	-0,013i	-0,007i	+0,007i	+0,004i	+0,001i	+0,001i
0,005	0,006	-0,001	0,003	0,007	-0,007	-0,001	-0,006
-0,007i	-0,001i	-0,003i	+0,001i	-0,007i	+0,002i	+0,001i	-0,003i
-0,005	-0,011	0,008	0,000	-0,008	-0,005	0,006	0,004
-0,003i	+0,011i	-0,004i	-0,005i	+0,004i	-0,002i	-0,009i	+0,001i
0,001	-0,004	0,013	0,001	-0,004	-0,003	0,017	-0,002
+0,01i	-0,008i	-0,009i	+0,000i	+0,000i	-0,007i	-0,001i	+0,005i
-0,002	0,007	0,002	0,001	-0,001	0,004	0,007	0,000
+0,004i	-0,001i	+0,000i	-0,005i	-0,003i	+0,001i	-0,001i	-0,017i
0,008	0,003	-0,002	-0,004	0,004	0,006	-0,004	0,005
+0,008i	+0,01i	-0,002i	-0,008i	+0,006i	-0,001i	-0,006i	+0,002i
-0,007	0,006	0,005	0,019	0,001	0,001	0,01	-0,002
+0,004i	+0,001i	+0,000i	+0,000i	-0,009i	-0,001i	+0,002i	+0,005i
-0,001	0,009	0,002	0,002	0,01	0,014	0,005	0,02
+0,006i	+0,003i	+0,007i	+0,006i	+0,013i	+0,012i	-0,002i	+0,008i

Анализ результатов математического моделирования путем сравнения табл. 2 с табл. 3, табл. 4 с табл. 5, табл. 6 с табл. 7, табл. 8 с табл. 9 подтвердили справедливость соотношения (17).

Справедливость соотношения (17), т.е. доказанность свойства перекрестной комплексно-сопряженной симметрии коэффициентов двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами для 2D действительных сигналов, позволяет сократить вычислительные затраты и затраты памяти в два раза. Этот вывод следует из того, что вычислять коэффициенты 2D ДПФ-ВП  $S_{N_1 \times N_2, (1-\theta_1), (1-\theta_2)}^{k_1, k_2}$  не имеет смысла, поскольку они не несут новой информации. Коэффициенты  $S_{N_1 \times N_2, (1-\theta_1), (1-\theta_2)}^{k_1, k_2}$  могут быть получены из коэффициентов 2D ДПФ-ВП  $S_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2}^{k_1, k_2}$  путем соответствующего комплексного сопряжения последних.

Рассмотрим метод сокращения вычислительных затрат и затрат памяти при вычислении 2D ДПФ-ВП 2D действительных сигналов при  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/2$ .

**Метод быстрого вычисления двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами действительных сигналов при значении параметров  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/2$**

2D ДПФ-ВП  $S_{N_1 \times N_2, 1/2, 1/2}^{k_1, k_2}$  (16) действительного сигнала  $X_{8 \times 8}$ , (табл. 1), приведено в табл.10.

Воспользовавшись обозначением комплексно-сопряженной симметрии комплексных чисел (рис. 2), комплексно-сопряженную симметрию коэффициентов 2D ДПФ-ВП  $S_{N_1 \times N_2, 1/2, 1/2}^{k_1, k_2}$  действительного сигнала  $X_{N_1 \times N_2}$ , можно изобразить в следующем виде.

Идея метода быстрого вычисления 2D ДПФ-ВП действительных сигналов  $X_{N_1 \times N_2}$  при значениях параметров  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/2$  основана на анализе структуры матрицы  $S_{N_1 \times N_2, 1/2, 1/2}^{k_1, k_2}$  и использовании того, что при представлении действительного сигнала  $X_{N_1 \times N_2}$  в комп-

Табл. 10. 2D ДПФ-ВП  $S_{N_1 \times N_2, 1/2, 1/2}^{k_1, k_2}$  действительного сигнала  $X_{8 \times 8}$

0,014	-0,006	0,006	-0,002	-0,012	-0,002	0,004	0,003
-0,006i	+0,000i	-0,017i	-0,015i	-0,002i	-0,002i	-0,004i	-0,004i
0,003	0,009	0,002	0,004	0,014	-0,003	0,002	-0,008
-0,006i	-0,001i	-0,002i	+0,003i	-0,006i	-0,001i	-0,002i	-0,005i
0,001	-0,009	0,007	0,002	-0,005	-0,004	0,006	0,007
-0,003i	+0,009i	-0,003i	-0,007i	+0,005i	-0,002i	-0,013i	-0,005i
0,004	0,002	0,009	0,002	0,000	-0,001	0,013	0,000
+0,016i	-0,003i	-0,006i	+0,000i	+0,003i	-0,005i	-0,003i	-0,001i
0,000	0,013	-0,001	0,000	0,002	0,009	0,002	0,004
+0,001i	+0,003i	+0,005i	-0,003i	-0,000i	+0,006i	+0,003i	-0,016i
0,007	0,006	-0,004	-0,005	0,002	0,007	-0,009	0,001
+0,005i	+0,013i	+0,002i	-0,005i	+0,007i	+0,003i	-0,009i	+0,003i
-0,008	0,002	-0,003	0,014	0,004	0,002	0,009	0,003
+0,005i	+0,002i	+0,001i	+0,006i	-0,003i	+0,002i	+0,001i	+0,006i
0,003	0,004	-0,002	-0,012	-0,002	0,006	-0,006	0,014
+0,004i	+0,004i	+0,002i	+0,002i	+0,015i	+0,017i	+0,000i	+0,006i

комплексной форме мнимая часть равна нулю. Структура матрицы  $S_{N_1 \times N_2, 1/2, 1/2}^{k_1, k_2}$  действительного сигнала  $X_{N_1 \times N_2}$  такова, что если известны значения элементов блоков  $A$  и  $B$ , то элементы блоков  $C$  и  $D$  восстанавливаются однозначно (табл. 10). Аналогичное утверждение справедливо и относительно блоков  $A$ ,  $C$  и  $B$ ,  $D$ .

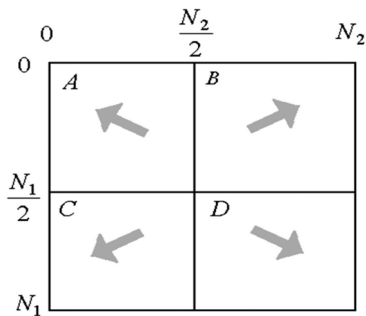


Рис. 3. Комплексно-сопряженная симметрия коэффициентов двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами  $S_{N_1 \times N_2, 1/2, 1/2}^{k_1, k_2}$

Использование факта отсутствия мнимой части у элементов действительного сигнала  $X_{N_1 \times N_2}$  можно реализовать двумя способами:

1) путем формирования комплексного сигнала  $Y_{N_1 \times N_2/2}$  (табл. 11) «сжимая» исходный сигнал  $X_{N_1 \times N_2}$  (10) по горизонтали согласно соотношению:

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) - jx(n_1, n_2 + N_2/2); \quad (18)$$

2) путем формирования комплексного сигнала  $Z_{N_1/2 \times N_2}$  (табл. 12) «сжимая» исходный сигнал  $X_{N_1 \times N_2}$  (10) по вертикали согласно соотношению:

$$z(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) - jx(n_1 + N_1/2, n_2). \quad (19)$$

Табл. 11. Комплексный сигнал  $Y_{N_1 \times N_2/2}$

2,021-	0,502-	-1,998	0,272
0,337i	0,138i	+1,611i	+1,007i
1,254	0,786	1,121-	0,828-
+0,555i	+0,569i	0,588i	0,049i
1,405	1,178	-1,114	0,247
+0,817i	+1,267i	+1,805i	+0,702i
0,100	-0,067	-0,913-	1,627
+0,676i	+1,237i	0,106i	+0,372i
1,669-	0,192	2,072-	-0,312-
0,253i	+1,055i	0,636i	0,273i
1,727	-1,884	0,769-	-2,643-
+0,943i	+0,916i	2,471i	1,857i
1,130-	-1,917-	0,410	-0,040
0,692i	0,327i	+1,926i	+0,318i
2,261	-1,380	-0,041-	-0,672
+2,276i	+0,656i	0,832i	+0,774i

Результаты 2D ДПФ-ВП комплексного сигнала  $Y_{N_1 \times N_2/2}$  при значении параметров  $\theta_1 = 1/4$  и  $\theta_2 = 1/2$  и комплексного сигнала  $Z_{N_1/2 \times N_2}$  при значении параметров  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/4$  и приведены в соответственно в табл. 13 и табл. 14.

Анализируя табл. 13 и табл. 14 несложно установить, что информация, содержащаяся в них, позволяет однозначно восстановить табл. 10.

Таким образом, предложен метод быстрого вычисления двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами действительных сигналов при значении параметров  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/2$ . Метод позволяет сократить вычислительные затраты и затрат памяти в два раза.

Табл. 12. Комплексный сигнал  $Z_{N_1/2 \times N_2}$

2,021-	0,502-	-1,998-	0,272	0,337-	0,138	-1,611-	-1,007-
1,669i	0,192i	2,072i	+0,312i	0,253i	+1,055i	0,636i	0,273i
1,254-	0,786	1,121-	0,828	-0,555i-	-0,569	0,588-	0,049-
1,727i	+1,884i	0,769i	+2,643i	+0,943i	+0,916i	2,471i	1,857i
1,405-	1,178	-1,114-	0,247	-0,817	-1,267-	-1,805	-0,702
1,130i	+1,917i	0,410i	+0,040i	+0,692	0,327i	+1,926i	+0,318i
0,100-	-0,067	-0,913	1,627	-0,676	-1,237	0,106-	-0,372
2,261i	+1,380	+0,041	+0,672	+2,276i	+0,656i	0,832i	+0,774



Табл. 13. 2D ДПФ-ВП комплексного сигнала  $Z_{N_1/2 \times N_2}$  при значении параметров  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/4$ 

0,014 -0,006i	0,006 -0,017i	-0,012 -0,002i	0,004 -0,004i
0,003 -0,006i	0,002 -0,002i	0,014 -0,006i	0,002 -0,002i
0,001 -0,003i	0,007 -0,003i	-0,005 +0,005i	0,006 -0,013i
0,004 +0,016i	0,009 -0,006i	0,000 +0,003i	0,013 -0,003i
0,000 +0,001i	-0,001 +0,005i	0,002 +0,000i	0,002 +0,003i
0,007 +0,005i	-0,004 +0,002i	0,002 +0,007i	-0,009 -0,009i
-0,008 +0,005i	-0,003 +0,001i	0,004 -0,003i	0,009 +0,001i
0,003 +0,004i	-0,002 +0,002i	-0,002 +0,015i	-0,006 +0,000i

Табл. 14. 2D ДПФ-ВП комплексного сигнала  $Y_{N_1 \times N_2/2}$  при значении параметров  $\theta_1 = 1/4$  и  $\theta_2 = 1/2$ 

0,014- 0,006i	-0,006 +0,000i	0,006- 0,017i	-0,002- 0,015i	-0,012- 0,002i	-0,002- 0,002i	0,004- 0,004i	0,003- 0,004i
0,001- 0,003i	-0,009 +0,009i	0,007- 0,003i	0,002- 0,007i	-0,005 +0,005i	-0,004- 0,002i	0,006- 0,013i	0,007- 0,005i
0,000 +0,001i	0,013 +0,003i	-0,001 +0,005i	0,000- 0,003i	0,002 +0,000i	0,009 +0,006i	0,002 +0,003i	0,004- 0,016i
0,007 +0,005i	0,006 +0,013i	-0,004 +0,002i	-0,005- 0,005i	0,002 +0,007i	0,007 +0,003i	-0,009- 0,009i	0,001 +0,003i

### Заключение

1. Рассмотрено новое дискретное преобразование Фурье – дискретное преобразование Фурье с варьируемыми параметрами, которое является обобщением стандартного двумерного ДПФ и имеет ряд преимуществ перед последним.

2. Выявлена и исследована перекрестная комплексно-сопряженной симметрии коэффициентов двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами действительных сигналов.

3. Свойства перекрестной комплексно-сопряженной симметрии коэффициентов двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами для действительных сигналов подтверждены результатами математического моделирования.

4. Разработаны методы и алгоритмы быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами действительных сигналов при различных сочетаниях варьируемых параметров

### Литература

- Rabiner L., Gold B. Theory and Application of digital signal processing. New Jersey, Prentice-hall, 1975. 772 p.
- Favorskaya M., Savchina E., Popov A. Adaptive visible image watermarking based on Hadamard transform. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2018, vol. 450, no. 5, pp. 052003.1-052003.6. doi: 10.1088/1757-899X/450/5/052003
- Klionskiy D. M., Kaplun D. I., Geppener V. V. Empirical more decomposition for signal preprocessing and classification of intrinsic mode functions. Pattern Recognition and Image Analysis (Advances in Mathematical Theory and Applications). 2018, vol. 28, No. 1, pp. 122-132. doi:10.1134/S1054661818010091

4. Ponomarev A.V., Ponomareva O.V. Digital technologies in non-destructif testing. Journal of Physics: Conference Series. 2019, 12038 p.

5. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Application of parametric discret Fourier transform non-destructif testing of composite materials with a free oscilation metod. Journal of Physics: Conference Series. 2019. 12039 p.

6. Batishchev V.I., Volkov I.I., Zolin A.G. Using a stochastic basis in signal and image recovery problems. Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2017, vol. 53, no. 4, pp. 414-420.

7. Kulikovskikh I., Prokhorov S. Psychological perspectives on implicit regularization: a model of retrieval-induced forgetting (rif). Journal of Physics: Conference Series. electronic edition. 2018. 012079 p. Doi:10.1088/1742-6596/1096/1/012079.

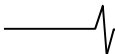
8. Favorskaya M.N., Buryachenko V.V. Authentication and copyright protection of videos under transmitting specifications. Computer Vision in Advanced Control Systems-5. ISRL. Springer, Cham, 2020, vol. 175, pp. 119-160. doi.org/10.1007/978-3-030-33795-7\_5.

9. Blahut R.E. Fast Algorithms for Digital Signal Processing. Reading, MA: Addison-Wesley, 1984.

10. Bogner R.E., Constantinides A.G. Introduction to digital filtering. John Wiley and Sonc, London, New York, Sydney, Toronto, 1975. 216 p.

11. Likhtsinder B. Conditional average value of queues in queuing systems with bath request flows. 2017 4<sup>th</sup> International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications Science and Technology, PIC S and T 2017 – Proceedings. 2018, pp. 49-52. DOI:10.1109/INFOCOMMST.2017.8246347.

12. Bakulin M.G., Vityazev V.V., Shumov A.P., Kreyndelin V.B. Effective signal detection for the spatial multiplexing mimo systems. Telecommunications and Radio Engineering.



- 2018, vol. 77, no. 13, pp. 1141-1158. DOI.org/10.1615/TelecomRadEng.v77.i13.30.
13. Prozorov D., Tatarinova A. Comparison of grapheme-to-phoneme conversions for spoken document. 2019 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTs 2019. 2019. 8884449 p. DOI:10.1109/EWDTs.2019.8884449.
14. Prozorov D., Trubin I. Detection of a signal in the simo system with spatial correlation of noise. 2018 7<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2018 – Including ECYPS 2018, Proceedings. 7. 2018, pp. 1-5. DOI:10.1109/MECO.2018.8405965
15. Urakov A., Gurevich K., Alies M., Reshetnikov A., Kasatkin A., Urakova N. The tissue temperature during injection of drug solution into it as an integral indicator of rheology. Journal of Physics: Conference Series. 4<sup>th</sup> International Conference on Rheology and Modeling of Materials, IC-RMM 2019. 2020, 012003 p. DOI:10.1088/1742-6596/1527/1/012003.
16. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing. Published by Pearson, 2018. 1168 p.
17. Pratt William K. Digital image processing. A Wiley-Interscience publication, 2007. 807 p.
18. Cooley J., Tukey J. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, Math. Comput., vol. 19, no. 90, Apr. 1965, pp. 297-301, doi: 10.2307/2003354.
19. Пономарев А.В. Основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами. Цифровая обработка сигналов. 2019. № 2. С. 12-20.
20. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Theoretical foundations of digital vector Fourier analysis of two-dimensional signals padded with zero samples. Informacionno-upravlyayushchie sistemy [Information and Control Systems], 2021, no. pp. 55-65. doi:10.31799/1684-8853-2021-1-55-65.
21. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V., Smirnova N.V. Sliding Spatial Frequency Processing of Discrete Signals. In: Advances in Signal Processing. Theories, Algorithms, and System Control-8. Favorskaya M.N., Jain L.C. (eds). Springer, Cham, vol.184, pp. 97-110. doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6\_8.
22. Ponomareva O., Ponomarev A., Smirnova N. Properties of Two-Dimensional Discrete Exponential Functions with Variable Parameter in Spatial-Frequency Domain / 2021 23rd International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA 2021. 23. 2021. С. 9535969.
23. Ponomareva O., Ponomarev A., Smirnova N. Two-Dimensional Discrete Fourier Transform with Variable Parameter in the Spatial-Frequency Domain / 2021 23rd International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA 2021. 23. 2021. С. 9535997.
24. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения: Вып.1. Пер с англ. В.Ф.Писаренко. М.:Мир, 1971. 312 с.
25. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения: Вып.2. Пер с англ. В.Ф.Писаренко. М.: Мир, 1972. 283 с.
26. Милентьев В.С., Батищев В.И. Аппроксимационные методы и системы измерения и контроля параметров периодических сигналов. М.: Физматлит, 2011. 240 с.
27. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных процессов: Пер. с англ. М.:Мир, 1989. 540 с.
28. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Перевод с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.
29. Оппенгейм Э. Применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 552 с.
30. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций с примерами из метеорологии. Изд. Гидрометеиздат. Л.:1981.281 с.
31. Батищев В.И., Золин А.Г., Косарев Д.Н., Романев А.Е. Аппроксимационный подход к решению задач анализа и интерпретации экспериментальных данных. Вестник Самарского государственного университета. Серия: Технические науки. 2006. № 40. С.57-65.
32. Батищев В.И., Мелентьев В.С. Измерительно-моделирующий подход к определению интегральных характеристик периодических сигналов. Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2003. № 6. С.36-39.
33. Батищев В.И., Волков И.И., Золин А.Г. Использование стохастического базиса в задачах восстановления сигналов и изображений. Автометрия.2017. Т. 53, № 4. С. 127-134.
34. Батищев В.И., Волков И.И., Золин А.Г. Исследование аппроксимационных свойств функциональных базисов в задачах реконструкции изображений при дистанционном зондировании земли. Проблемы управления и моделирования в сложных системах труды XVIII Международной конференции. 2016. С. 304-307.
35. Prokhorov S.A., Kulikovskikh I.M. Unique Condition for generalized Laguerre Functions to solve pole Position Problem. Signal Processing. 2015, vol. 108, pp. 25-29.
36. Прохоров С.А., Графкин В.В. Структурно-спектральный анализ случайных процессов. Изд. Самарский научный центр РАН. Самара, 2010.
37. Прозоров Д.Е., Петров Е.П. Быстрый поиск шумоподобных сигналов. Под ред. Е.П. Петрова. Изд. О-кратное. Киров, 2006.
38. Пономарева О.В. Развитие теории и разработка методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье: дис....д-ра техн. наук: 05.13.01. Ижевск, 2016. 357 с.