

УДК 621.396

РАСЧЁТ ПАРАМЕТРОВ СХЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ ЛОЖНОЙ ТРЕВОГИ ОБНАРУЖИТЕЛЯ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Белокуров В.А., к.т.н., доцент кафедры РТС РГРТУ, e-mail: belokurov.v.a@rsreu.ru
Нгуен К.Ч., аспирант кафедры РТС РГРТУ, e-mail: trongquang3883686@gmail.com

CALCULATION OF PARAMETERS OF THE STABILIZATION SCHEME OF THE PROBABILITY OF FALSE ALARM DETECTOR OF RANDOM SIGNALS

Belokurov V.A., Nguyen Q.T.

An algorithm for calculating the parameters of the OS-CFAR processor with two sorting stages is proposed and investigated. The purpose of the article is to derive an analytical expression for the dependence of the false alarm probability on the algorithm parameters that determine the numbers of ordinal statistics at each stage of sorting. Using the obtained dependences, it is shown that the OS-CFAR processor with two sorting stages loses in the threshold signal-to-noise ratio from 0.5 dB to 0.9 dB. This provides a gain in the number of computational operations from 2 to 8 times.

Key word: order statistics, false alarm probability, OS-CFAR detector.

Ключевые слова: порядковые статистики, вероятность ложной тревоги, обнаружитель ПС-ПУЛТ.

Введение

Одним из основных требований, предъявляемых к обнаружителю случайных сигналов [1], является обеспечение постоянного уровня ложной тревоги (ПУЛТ) при изменении параметров шума. В настоящее время разработано большое количество различных вариантов построения обнаружителей с ПУЛТ [2], которые предназначены для работы, как в многоцелевой обстановке, так и в случае обнаружения на фоне нестационарных негауссовских шумов. Известные обнаружители с ПУЛТ и их модификации условно можно разделить на [3]: а) УС-ПУЛТ; б) МИ/БИ-ПУЛТ; в) ПС-ПУЛТ. Каждая из схем обладает своими достоинствами и недостатками. Использование обнаружителя УС-ПУЛТ (УС – усреднение) обеспечивает наименьшие потери в пороговом отношении сигнал-шум, но при наличии нескольких целей, либо кромки помехи в «скользящем» окне потери резко возрастают. При этом обнаружитель с УС-ПУЛТ требует наименьшего числа вычислительных операций на реализацию. Обнаружитель ПС-ПУЛТ (порядковые статистики) обеспечивает стабилизацию уровня ложных тревог при обнаружении нескольких целей, а также в условиях работы на фоне шума, параметры которого меняются в пределах «скользящего» окна. В работе [2] приведён анализ эффективности данной схемы обнаружителя ПУЛТ. Существенный недостаток обнаружителя с ПС-ПУЛТ, заключается в необходимости большого числа вычислительных операций. Объём операций пропорционален размеру «скользящего» окна M .

Одним из возможных путей сокращения числа вычислительных операций является разбиение «скользящего» окна размером M элементов на ряд «подокон» меньшего размера и реализации сортировки в каждой из них. Для вычисления параметров обнаружителя с

Предложен и исследован алгоритм расчёта параметров ПС-ПУЛТ процессора с двумя этапами сортировки. Целью статьи является вывод аналитического выражения для зависимости вероятности ложной тревоги от параметров алгоритма, которые определяют номера порядковых статистик, на каждом этапе сортировки. С использованием полученных зависимостей показано, что ПС-ПУЛТ процессора с двумя этапами сортировки проигрывает в пороговом отношении сигнал-шум от 0,5 дБ до 0,9 дБ. При этом обеспечивается выигрыш в числе вычислительных операций от 2 до 8 раз.

ПС-ПУЛТ необходимо определить порядковые номера отсчётов, которые необходимо использовать после сортировки для оценки дисперсии шума. При этом порядковые номера влияют на значение вероятности ложной тревоги. Что приводит к необходимости нахождения аналитической зависимости вероятности ложной тревоги от порядковых номеров отсчётов «подокон», используемых в обнаружителе ПС-ПУЛТ.

Цель работы. Аналитическое вычисление зависимости вероятности ложной тревоги от номеров порядковых статистик обнаружителя ПС-ПУЛТ с несколькими этапами сортировки. Определение потерь в пороговом отношении сигнал-шум по сравнению с обнаружителем, в котором используется один этап сортировки. Вычисление выигрыша в числе вычислительных операций.

Теоретическая часть

Рассмотрим структурную схему обнаружителя ПС-ПУЛТ с разбиением «скользящего» окна на n «подокон», размером M/n . Результаты сортировки «подокон», также подвергаются сортировке. Структурная схема обнаружителя ПС-ПУЛТ показана на рис. 1.

На рис. 1 введены следующие обозначения: ПУ – пороговое устройство; M – размер «скользящего окна»; k_1 и k_2 – номера порядковых статистик «подокон», используемых на первом и втором этапе сортировки; – коэффициент, зависящий от вероятности ложной тревоги, приходящейся на анализируемую ячейку F ; M_z – ве-

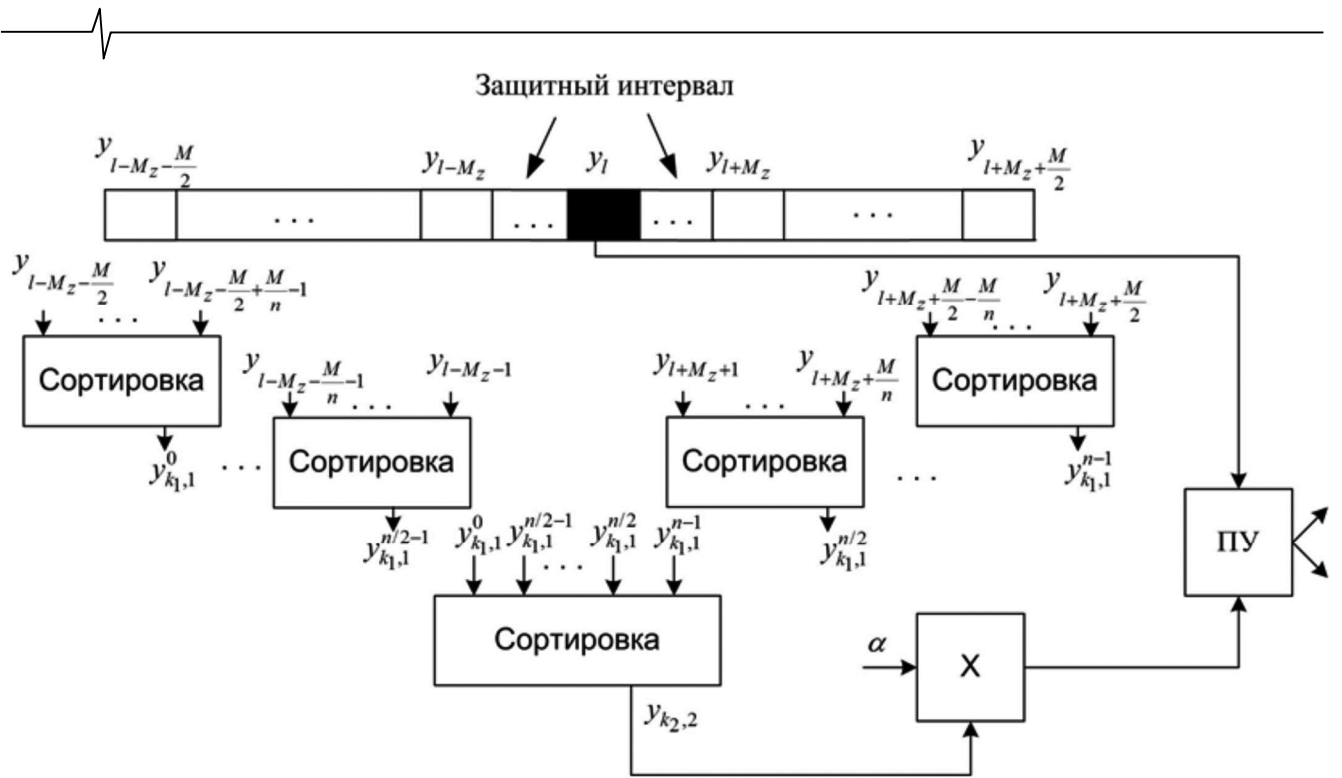


Рис. 1. Структурная схема предлагаемого алгоритма

величина защитного интервала. При обнаружении когерентной пачки импульсов со случайной амплитудой и начальной фазой [1]: $\alpha = \ln(F^{-1})$.

Обнаружение цели в l -м канале по скорости в соответствии с адаптивным байесовским подходом [4] происходит в соответствии с выражением:

$$y_l = |\mathbf{z}^T \mathbf{s}_l^*|^2 > \alpha \hat{\sigma}_u^2,$$

где z – принятый сигнал; s_l – опорный вектор, соответствующий настройке l -го канала по скорости:

$$\mathbf{s}_l = \left\{ \exp\left(-ik \frac{2\pi}{N} l\right) \right\}_{k=0}^{N-1}; N - \text{число импульсов в пачке};$$

T – символ транспонирования; $*$ – символ комплексного сопряжения; y_l – достаточная статистика в l -м канале;

$\hat{\sigma}_u^2$ – оценка дисперсии. Для оценки дисперсии формируется в «скользящем» окне массив отсчётов Y :

$$\mathbf{Y} = \left\{ \left\{ y_{l-(\frac{M}{2}+M_z+i)} \right\}_{i=0 \dots \frac{M}{2}-1}; \left\{ y_{l+M_z+i} \right\}_{i=0 \dots \frac{M}{2}-1} \right\},$$

где M_z – защитный интервал. Размерность массива Y равна M на 1, что соответствует одномерному «скользящему» окну. «Окно» данной размерности может формироваться, к примеру, в режиме работы с высокой частотой повторения импульсов бортовой РЛС [5].

На рис. 1 отсчёты $y_{k_1,1}^0 \dots y_{k_1,1}^{n-1}$ соответствуют k_1 -й порядковой статистике после первого этапа сортировки; элемент $y_{k_2,2}$ соответствует k_2 -й порядковой статистике второго этапа сортировки. Статистика $y_{k_2,2}$ представляет собой оценку дисперсии $\hat{\sigma}_u^2$.

Вычисление плотности распределения вероятностей дисперсии оценки $\hat{\sigma}_u^2$

Известно, что закон распределения статистики y_l при обнаружении когерентной пачки импульсов со случайной амплитудой и начальной фазой соответствует экспоненциальному закону. С учетом предположения о том, что параметры закона распределения в «скользящем» окне не изменяются, то закон распределения каждого из элементов массива Y также является экспоненциальным. По этой причине при дальнейшем выводе опустим индекс l у статистик $y_l, l = 0 \dots M-1$.

Функция распределения вероятностей $P_y(x)$ и плотность распределения вероятности $p_y(x)$ статистики y имеет вид:

$$p_y(x) = \frac{1}{\sigma_u^2} \exp\left(-\frac{x}{\sigma_u^2}\right), \quad P_y(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma_u^2}\right), \quad (1)$$

где σ_u^2 – дисперсия шума.

Функция распределения вероятностей $P_{y_{k_1,1}^i}(x)$ и плотность распределения вероятности $p_{y_{k_1,1}^i}(x)$ k_1 -й порядковой статистики в каждом i -м ($i = 0 \dots n-1$) «подокне» первого этапа сортировки имеет вид [6]:

$$p_{y_{k_1,1}^i}(x) = \frac{M}{n} \binom{\frac{M}{n}-1}{k_1-1} \left(P_y(x)\right)^{k_1-1} \left(1-P_y(x)\right)^{\frac{M}{n}-k_1} p_y(x). \quad (2)$$

После подстановки в (2) выражения (1) получим:

$$p_y(x) = \frac{k_1}{\sigma_u^2} \binom{\frac{M}{n}}{k_1} \times \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{\sigma_u^2}\right)\right)^{k_1-1} \left(\exp\left(-\frac{x}{\sigma_u^2}\right)\right)^{\frac{M}{n}-k_1+1}. \quad (3)$$

Функция распределения вероятности k_1 -й порядковой статистики имеет вид [6]:

$$P_{y_{k_1,1}}(x) = \sum_{j=k_1}^{M/n} \binom{M/n}{j} (P_y(x))^j (1 - P_y(x))^{M/n-j} \quad (4)$$

После подстановки в (4) выражения (1) получим:

$$P_{y_{k_1,1}}(x) = \sum_{j=k_1}^{M/n} \binom{M/n}{j} \left(1 - \exp\left(\frac{-x}{\sigma_u^2}\right)\right)^j \left(\exp\left(\frac{-x}{\sigma_u^2}\right)\right)^{M/n-j} \quad (5)$$

Плотность распределения вероятности k_2 -й порядковой статистики после второго этапа сортировки имеет вид:

$$p_{y_{k_2,2}}(x) = n \binom{n-1}{k_2-1} (P_{y_{k_1,1}}(x))^{k_2-1} (1 - P_{y_{k_1,1}}(x))^{n-k_2} p_{y_{k_1,1}}(x) \quad (6)$$

Выражение для вероятности ложной тревоги имеет вид [6]:

$$F(k_1, k_2) = \int_0^{\infty} \left(\int_{u'}^{\infty} p_{y_{k_1,1}}(x) dx \right) p_{y_{k_2,2}}(y) dy, \quad (7)$$

где u' – порог обнаружения.

Производя замену переменных $u' = \alpha y$ и подставляя в (7) выражения (2)-(6) выражение для вероятности ложной тревоги имеет вид:

$$F(k_1, k_2) = \frac{n \cdot k_1}{\sigma_u^2} \cdot \binom{n-1}{k_2-1} \cdot \binom{M/n}{k_1} \times \int_0^{\infty} \left(\exp\left(\frac{-y}{\sigma_u^2}\right) \right)^{\frac{M}{n} - k_1 + 1 + \alpha} \left(1 - \exp\left(\frac{-y}{\sigma_u^2}\right)\right)^{k_1-1} \times \left(\sum_{j=k_1}^{M/n} \binom{M/n}{j} \left(1 - \exp\left(\frac{-y}{\sigma_u^2}\right)\right)^j \left(\exp\left(\frac{-y}{\sigma_u^2}\right)\right)^{\frac{M}{n}-j} \right)^{k_2-1} \times \left(1 - \sum_{j=k_1}^{M/n} \binom{M/n}{j} \left(1 - \exp\left(\frac{-y}{\sigma_u^2}\right)\right)^j \left(\exp\left(\frac{-y}{\sigma_u^2}\right)\right)^{\frac{M}{n}-j} \right)^{n-k_2} dy \quad (8)$$

Применяя в выражение (8) разложение в соответствии с биномом Ньютона и формулы табличного интеграла 3.312(1) [8] можно показать, что выражение (8) не зависит от дисперсии шума σ_u^2 .

Воспользуемся математическим аппаратом численного интегрирования [9] при вычислении интеграла в выражении (8):

$$F(k_1, k_2) = \frac{n \cdot k_1}{\sigma_u^2} \binom{n-1}{k_2-1} \binom{M/n}{k_1} \frac{b-a}{m} \times \left\{ \frac{f\left(\frac{a}{1-a}\right) \frac{1}{(1-a)^2}}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f\left(\frac{a + \frac{i(b-a)}{m}}{1 - \left(a + \frac{i(b-a)}{m}\right)}\right) \frac{1}{\left(1 - \left(a + \frac{i(b-a)}{m}\right)\right)^2} \right\} \quad (9)$$

$$+ \frac{f\left(\frac{b}{1-b}\right) \frac{1}{(1-b)^2}}{2} \left. \right\},$$

где $m = 104$; $a = 0$; значение $b \approx 1$; функция $f(t)$ определяется по следующему выражению.

$$f(t) = \frac{n \cdot k_1}{\sigma_u^2} \binom{n-1}{k_2-1} \binom{M/n}{k_1} \times \left(\exp\left(\frac{-t}{\sigma_u^2}\right) \right)^{\frac{M}{n} - k_1 + 1 + \alpha} \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\sigma_u^2}\right)\right)^{k_1-1} \times \left(\sum_{j=k_1}^{M/n} \binom{M/n}{j} \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\sigma_u^2}\right)\right)^j \left(\exp\left(\frac{-t}{\sigma_u^2}\right)\right)^{\frac{M}{n}-j} \right)^{k_2-1} \times \left(1 - \sum_{j=k_1}^{M/n} \binom{M/n}{j} \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\sigma_u^2}\right)\right)^j \left(\exp\left(\frac{-t}{\sigma_u^2}\right)\right)^{\frac{M}{n}-j} \right)^{n-k_2} \quad (10)$$

Выражения (9), (10) могут быть использованы для вычисления вероятности ложной тревоги при заданных значениях M, n, k_1, k_2 , что позволяет определить, соответствует получаемая вероятность ложной тревоги $F(k_1, k_2)$ заданной $F_{зад}$ [9]. В случае, если равенство $F(k_1, k_2) = F_{зад}$ не выполняется, необходимо скорректировать значения параметров M, n, k_1, k_2 .

Рассмотрим пример вычисления $F(k_1, k_2)$ при $M = 16, n = 4, k_1 = 4, k_2 = 3$:

$$p_{y_{k_1,1}}(x) = \frac{4}{\sigma_u^2} \exp\left(\frac{-x}{\sigma_u^2}\right) \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-x}{\sigma_u^2}\right)\right)^3, \\ P_{y_{k_1,1}}(x) = \left(1 - \exp\left(\frac{-x}{\sigma_u^2}\right)\right)^4.$$

Плотность распределения вероятности k_2 -й порядковой статистики имеет вид:

$$p_{y_{k_2,2}}(x) = \frac{48}{\sigma_u^2} \exp\left(\frac{-x}{\sigma_u^2}\right) \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-x}{\sigma_u^2}\right)\right)^{11} - \frac{48}{\sigma_u^2} \exp\left(\frac{-x}{\sigma_u^2}\right) \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{-x}{\sigma_u^2}\right)\right)^{15}.$$

Вероятности ложной тревоги шума определяется выражением:

$$F = \frac{48}{\sigma_u^2} \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{-x}{\sigma_u^2}\right)^{\alpha+1} \left(1 - \exp\left(\frac{-x}{\sigma_u^2}\right)\right)^{11} dx - \frac{48}{\sigma_u^2} \int_0^{\infty} \exp\left(\frac{-x}{\sigma_u^2}\right)^{\alpha+1} \left(1 - \exp\left(\frac{-x}{\sigma_u^2}\right)\right)^{15} dx \quad (11)$$

Применение формулы 3.312(1) [8] и проводя соответствующие вычисления выражение (11) имеет вид:

$$F = 48 \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+1) \cdot \Gamma(12)}{\Gamma(\alpha+13)} - \frac{\Gamma(\alpha+1) \cdot \Gamma(16)}{\Gamma(\alpha+17)} \right\},$$

где $\Gamma(\bullet)$ – гамма функция.

Анализ вычислительной сложности ПС-ПУЛТ процессора

Оценку вычислительной сложности ПС-ПУЛТ процессора с несколькими этапами сортировки определим в предположении, что для сортировки используется алгоритм «пузырька», вычислительная сложность которого $O(n^2)$, где n – размер массива [11].

Вычислительная сложность алгоритма сортировки при объеме выборке M составляет $O(M^2)$ операций. Для ПС-ПУЛТ процессора с несколькими этапами сортировки вычислительная сложность составляет

$$O\left(n \cdot \left(\frac{M}{n}\right)^2 + (n)^2\right) \text{ операций.}$$

Уменьшение вычислительных затрат H ПС-ПУЛТ процессора с несколькими этапами сортировки по сравнению с известным ПС-ПУЛТ процессором описывается отношением:

$$H = \frac{M^2}{n \cdot \left(\frac{M}{n}\right)^2 + (n)^2}.$$

На рис. 2 показан выигрыш в числе вычислительных операций при различных значениях n .

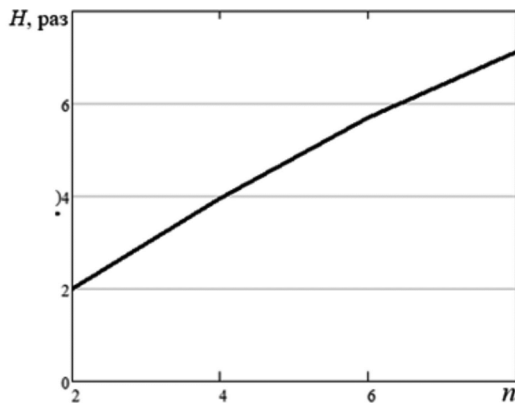
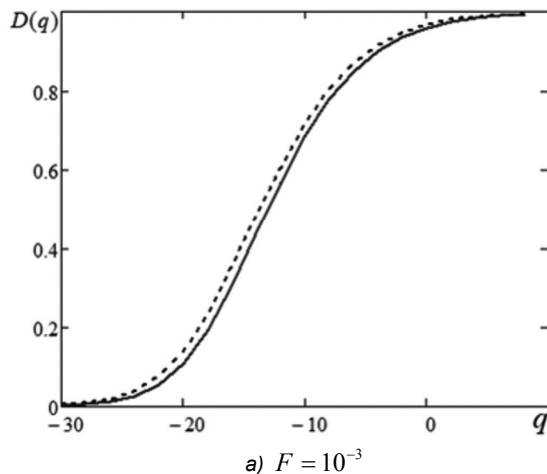


Рис. 2. Зависимость выигрыша в числе вычислительных операций

Анализ зависимости, представленной на рис. 2, показывает, что при увеличении числа n , то есть при увели-



а) $F = 10^{-3}$

чении числа «подокон» на первом этапе сортировки, выигрыш увеличивается и при $M = 64$, $n = 4$ равен 4 раза; при $n = 8$ и $n = 16$ выигрыш составляет 7 и 8 раз, соответственно.

Результаты моделирования для предлагаемого алгоритма

Рассмотрим результаты моделирования предлагаемого алгоритма вычисления параметров ПС-ПУЛТ процессора. Параметры моделирования:

- пачка импульсов со случайной амплитудой и фазой, число импульсов 256;
- «скользящее» окно одномерное $M = 64$;
- вероятность ложной тревоги на канала $F_{\text{зад}} = 10^{-3}, 10^{-5}$.
- число «подокон» $n = 4, 8, 16$;
- флуктуации амплитуды отражённого от цели сигнала соответствуют модели Сверлинга 1.

Параметры k_1, k_2 выбираются из выражения: $F(k_1, k_2) = F_{\text{зад}}$ и соответствуют:

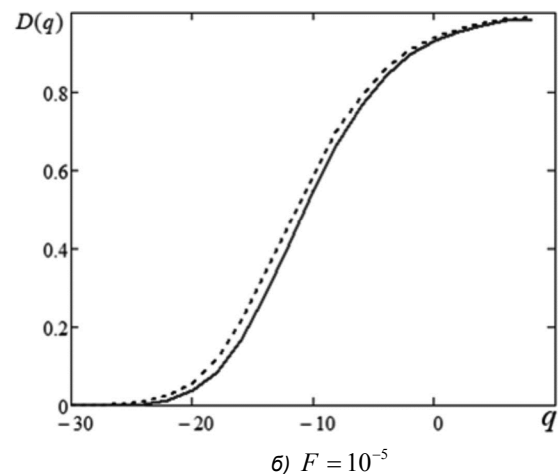
- при $n = 4$ вычисленные значения $k_1 = 12; k_2 = 2$;
- при $n = 8$ вычисленные значения $k_1 = 6; k_2 = 4$;
- при $n = 16$ вычисленные значения $k_1 = 4; k_2 = 4$.

На рис. 3-5. показаны характеристики обнаружения ПС-ПУЛТ процессора при значениях $n = 4, 8, 16$.

На рис. 3-5 сплошная линия соответствует характеристикам обнаружения ПС-ПУЛТ процессора с двумя этапами сортировки; пунктирная – известный ПС-ПУЛТ процессор. Анализ зависимостей показывает, что при $D = 0,9$ ПС-ПУЛТ процессора с двумя этапами сортировки проигрывает в пороговом отношении сигнал-шум известному алгоритму. Величина потерь в пороговом отношении сигнал-шум показана в табл. 1.

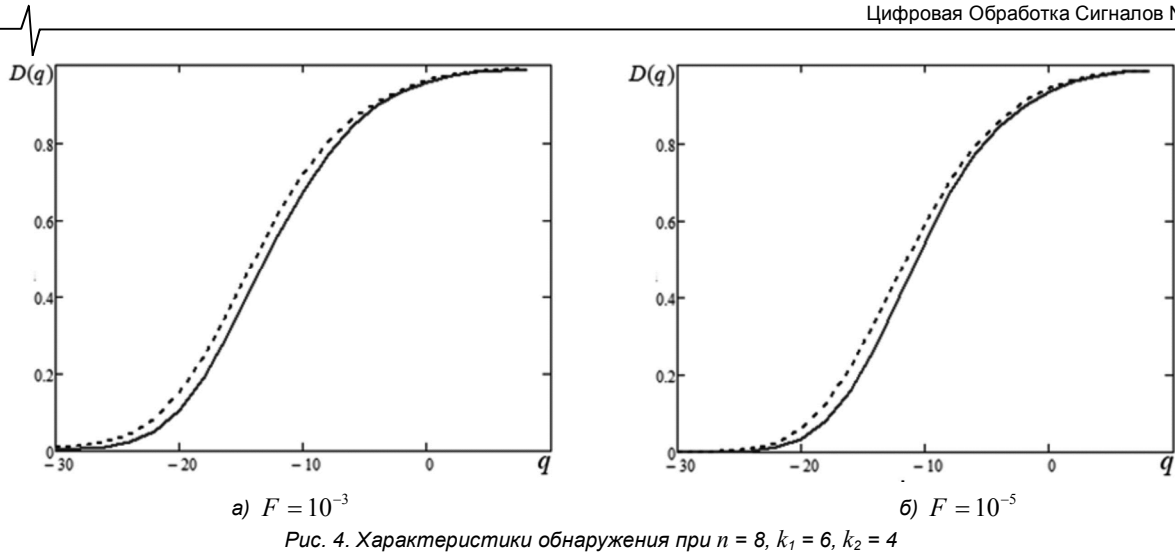
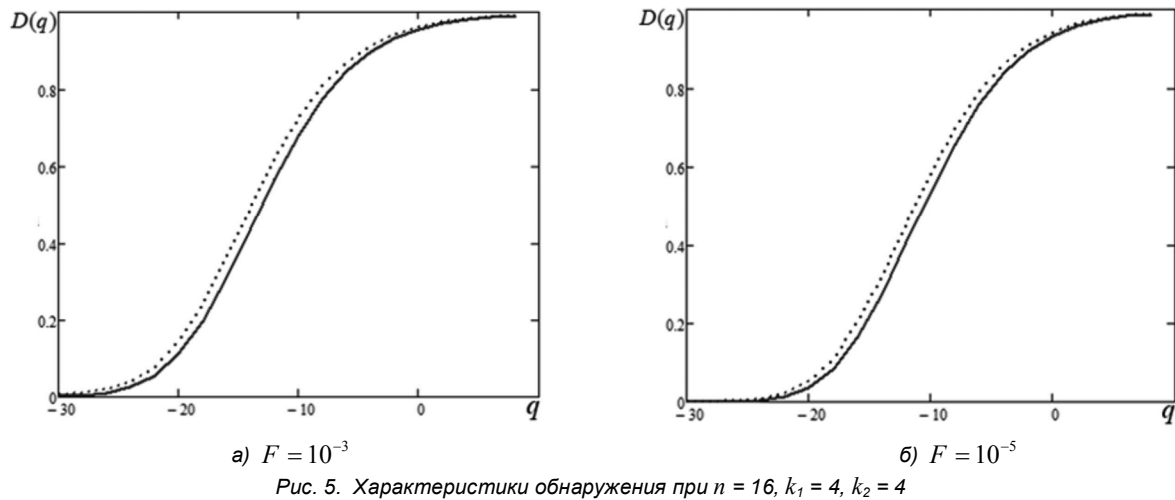
Таблица 1. Потери в пороговом отношении сигнал-шум, дБ

n, k_1, k_2	$F = 10^{-3}$	$F = 10^{-4}$	$F = 10^{-5}$
$n = 4, k_1 = 12, k_2 = 2$	0,675	0,659	0,692
$n = 8, k_1 = 4, k_2 = 8$	0,586	0,515	0,528
$n = 8, k_1 = 6, k_2 = 4$	0,927	0,857	0,925
$n = 16, k_1 = 4, k_2 = 4$	0,667	0,586	0,645



б) $F = 10^{-5}$

Рис. 3. Характеристики обнаружения при $n = 4, k_1 = 12, k_2 = 2$

Рис. 4. Характеристики обнаружения при $n = 8, k_1 = 6, k_2 = 4$ Рис. 5. Характеристики обнаружения при $n = 16, k_1 = 4, k_2 = 4$

Анализ данных табл. 1 показывает, что величина потеря в пороговом отношении сигнал-шум не превосходит 0,7 дБ в случаях: $n = 4, k_1 = 12, k_2 = 2$ и $n = 16, k_1 = 4, k_2 = 4$. Не превосходит 0,6 дБ в случае $n = 8, k_1 = 4, k_2 = 8$ и не превосходит 1 дБ в случае выбора $n = 8, k_1 = 6, k_2 = 4$.

Заключение

Таким образом, в данной работе рассмотрен алгоритм расчёта параметров ПС-ПУЛТ процессора с двумя этапами сортировки. Получено аналитическое выражение зависимости вероятности ложной тревоги и параметров алгоритма. Данная зависимость позволяет выбрать параметры ПС-ПУЛТ процессора с двумя этапами сортировки, которые обеспечивают заданное значение вероятности ложной тревоги. Результаты моделирования показывают, что ПС-ПУЛТ процессора с двумя этапами сортировки пригравает известному ПС-ПУЛТ процессору в пороговом отношении сигнал-шум от 0,5 дБ до 0,9 дБ. При этом обеспечивается выигрыш в числе вычислительных операций от 2 до 8 раз.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (FSSN-2020-0003).

Литература

1. Бакулев П.А. Радиолокационные системы. Учебник для ВУЗов. М.: Радиотехника. 2004. 320 с.

2. A. Richards Fundamentals of Radar Signal Processing. McGraw Hill Professional. 2005.

3. Бакулев П.А., Степин В.М. Методы и устройства селекции движущихся целей. М.: Радио и связь. 1986. 288 с.

4. Кошелев В.И. Параметры многоканального обнаружителя доплеровских сигналов. Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. 2001. №8. С. 18-20.

5. Кошелев В.И., Белокуров В.А., Горкин В.Н. Алгоритмы повышения точности измерения дальности в РЛС с квазипрерывным линейно-частотно-модулированным сигналом. Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. 2005. Выпуск 16. С. 18-20.

6. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. В трех книгах. Книга третья. М.: Сов. радио. 1976. 288 с.

7. Кошелев В.И., Белокуров В.А. Вычисление порога при межпериодном обнаружении малоразмерной цели. Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2011. Выпуск 38. С. 31-34.

8. I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik. Table of integrals, series, and products. Seventh edition. Academic Press. 2007. 1221 p.

9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: пособие для вузов. М.: Наука. Гл. Ред. физ.-мат. литературы. 1989. 432 с.

10. В.И. Кошелев, Д.Н. Козлов Адаптивный алгоритм обнаружения маневрирующей цели. Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. № 1. С. 38-41.

11. Biggar P., Gregg. Sorting in the presence of branch prediction and caches. Technical Report TCD-CS-2005-57, Department of Computer Science, University of Dublin, Trinity College, August 2005.