

## ОПТИМАЛЬНЫЙ КИХ ФИЛЬТР С ДРОБНОЙ ЗАДЕРЖКОЙ

*Андреев А.Г., к.т.н., доцент кафедры радиоэлектронных систем ИИФиРЭ ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет», e-mail: aandrejev@sfu-kras.ru*

*Сенченко А.А., старший преподаватель каф. Радиотехники ИИФиРЭ ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет», e-mail: asenchenko@sfu-kras.ru*

### OPTIMAL FRACTIONAL DELAY FIR FILTERS

*Andreev A.G., Senchenko A.A.*

*To model a receiver with antenna array impinging signals must be delayed for a value which is not multiple of signal sampling rate. This problem can be solved using finite impulse response filters. The article discusses a method for modeling and implementation of a wideband delay element. Solution accuracy is studied depending on filter order and coefficients calculation algorithms.*

**Key words:** fractional delay filters, FIR, optimal coefficients, antenna arrays, signal modelling, signal delay.

**Ключевые слова:** КИХ фильтр с дробной задержкой, оптимальные коэффициенты, антенные решетки, моделирование сигнала, задержка сигнала.

#### Введение

Существуют задачи, в которых требуется смоделировать сигнал на выходах антенной решетки, пришедший с произвольного направления. Одной из областей применения таких задач является отладка и моделирование адаптивных алгоритмов пространственной фильтрации помех [1, 2]. Фундаментальное свойство любой антенной решетки, которое требуется воспроизвести при создании её компьютерной модели, это задержка сигнала, возникающая из-за геометрической разности хода лучей и индивидуальная для каждого антенного элемента. Данная задержка зависит от направления прихода сигнала и может меняться, если источник перемещается.

Помимо озвученной задачи существуют и другие области, в которых необходимо осуществлять задержку сигнала на произвольную величину, например, в системах связи, в аудиосистемах, при сжатии сигналов, содержащих речь и т.д. [3].

Компьютерная модель антенной решетки работает с дискретизированными по времени сигналами. На вход модели поступают выборки сигнала, а с выходов модели должны идти копии входного сигнала, задержанные на величину разности хода лучей и не кратную периоду частоты дискретизации.

Существует несколько способов задержки цифрового сигнала. Один из наиболее простых заключается в кратном повышении частоты дискретизации, задержке полученного сигнала на необходимое число тактов и последующим понижением частоты дискретизации до прежнего уровня. Данный способ имеет два существенных недостатка: во-первых, задержка может принимать только дискретные значения, во-вторых, большие вычислительные затраты, так как требуется фильтрация сигнала на повышенной частоте дискретизации.

Второй способ основан на применении полиноми-

*Для создания моделей обработки сигнала в антенных решетках необходимо иметь возможность задерживать сигнал на произвольную величину, в том числе не кратную периоду дискретизации сигнала. Данная задача может быть решена с помощью КИХ фильтров с дробной задержкой. Приведен способ расчета оптимальных коэффициентов КИХ фильтра с дробной задержкой.*

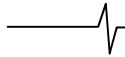
альной интерполяции [4] (фильтр Фарроу) и сводится к определению коэффициентов полинома, проходящего через выборки сигнала, и вычислению интерполированной выборки с нужной задержкой. К недостаткам данного метода относится наличие нелинейных искажений, большая погрешность интерполяции для более высокочастотных спектральных составляющих [5] и необходимость перерасчета коэффициентов полинома для каждой новой выборки. К достоинствам способа стоит отнести независимость коэффициентов интерполяции от требуемой величины задержки, что может быть важным для моделирования прохождения сигнала через антенную решетку.

Третий известный способ задержки сигнала на величину, не кратную частоте дискретизации, заключается в синтезе КИХ фильтра с равномерной АЧХ и линейной ФЧХ (то есть постоянным ГВЗ) в широкой полосе частот. Авторами данной работы был выбран этот способ, так как в нем отсутствуют нелинейные искажения сигнала, уровень частотных искажений может быть уменьшен до требуемого путем увеличения порядка КИХ фильтра, не требуется обработка сигнала на повышенной частоте дискретизации и, как следствие, меньшие вычислительные затраты, в сравнении с первым способом.

#### Постановка задачи

В соответствии с изложенным выше, требуется найти способ вычисления коэффициентов КИХ фильтра, с постоянной АЧХ и линейной ФЧХ в полосе пропускания, осуществляющего задержку широкополосного сигнала на величину, не кратную периоду дискретизации сигнала, то есть фильтра с дробной задержкой.

Задача задержки сигнала делится на два этапа: задержка сигнала на целое число тактов и задержка сиг-



нала на оставшуюся дробную часть. Таким образом, величина задержки может быть представлена следующим образом:

$$\tau = n + \tau_r, \tag{1}$$

где  $n$  – целая часть задержки;  $\tau_r$  – дробная часть задержки, обе величины выражены в тактах частоты дискретизации.

Так как речь в статье пойдет о реализации дробной задержки сигнала на основе КИХ фильтра, следует указать важную особенность данного способа. Частотные характеристики КИХ фильтра с дробной задержкой будут наиболее близкими к идеальным тогда, когда задержка в этом фильтре удовлетворяет условию:

$$\frac{(N-1)}{2} - 0,5 \leq \tau_\phi \leq \frac{(N-1)}{2} + 0,5, \tag{2}$$

где  $N$  – порядок фильтра, нечетное целое число;  $\tau_\phi$  – задержка сигнала в фильтре, выраженная в тактах. Следовательно, полная задержка в КИХ фильтре с дробной задержкой определяется выражением:

$$\tau_\phi = \frac{(N-1)}{2} + \tau_r, \tag{3}$$

где дробная часть задержки удовлетворяет условию  $|\tau_r| \leq 0,5$ . Действительно, дробная часть задержки может быть отрицательной, так как полная задержка  $\tau_\phi$  больше нуля. Расчет коэффициентов КИХ фильтра с дробной задержкой везде далее будет проводиться для  $\tau_r = 0,5$ , так как в этом случае отклонение АЧХ и ФЧХ фильтра от требуемых значений в полосе пропускания будет наибольшим в сравнении с другими значениями  $\tau_r$ .

### Синтез оптимального КИХ фильтра с дробной задержкой

Обозначим вектор-столбцом  $\mathbf{h}$  набор коэффициентов КИХ-фильтра с дробной задержкой:

$$\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_{N-1}]^T, \tag{4}$$

где  $N$  – порядок фильтра,  $( )^T$  – оператор транспонирования.

Тогда частотная характеристика фильтра будет определяться выражением:

$$H(\omega, \mathbf{h}) = e^{j\omega\tau} \mathbf{h}, \tag{5}$$

где  $\mathbf{e}(\omega) = [1, e^{j\omega}, e^{j2\omega}, \dots, e^{j(N-1)\omega}]^T$  – вектор-столбец комплексных экспонент,  $( )^H$  – операция транспонирования и комплексного сопряжения. Определим оптимальные коэффициенты КИХ фильтра с дробной задержкой по критерию минимума среднего квадрата ошибки:

$$e(\mathbf{h}) = \int_{\Omega} W(\omega) |E_c(\omega, \mathbf{h})|^2 d\omega, \tag{6}$$

где  $E_c(\omega, \mathbf{h})$  – комплексная функция ошибки:

$$E_c(\omega, \mathbf{h}) = H(\omega, \mathbf{h}) - D(\omega),$$

где  $D(\omega)$  – требуемая комплексная частотная характеристика.

В работе [6] показано, что ошибка, вычисленная по формуле (6), будет минимальна для коэффициентов:

$$\mathbf{h}_{opt} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}, \tag{7}$$

$$\mathbf{R} = \int_{\Omega} W(\omega) \mathbf{e}(\omega) \mathbf{e}^H(\omega) d\omega, \tag{8}$$

$$\mathbf{s} = \int_{\Omega} W(\omega) D(\omega) \mathbf{e}(\omega) d\omega. \tag{9}$$

В результате вычисления интеграла в формуле (8) получается квадратная матрица, а в формуле (9) – вектор-столбец. Чтобы вычислить их зададим весовую функцию в следующем виде:

$$W(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0 \\ 1, & 0 \leq \omega \leq \lambda, \\ 0, & \lambda < \omega \end{cases} \tag{10}$$

где  $\lambda = 2\pi f / f_s$  – нормированная граничная частота в диапазоне  $[0; \pi]$ ,  $f$  – верхняя частота полосы пропускания фильтра,  $f_s$  – частота дискретизации. Меняя нормированную частоту  $\lambda$  можно задавать частотный диапазон, в пределах которого необходимо минимизировать величину ошибки (6).

Для КИХ фильтра с дробной задержкой требуемая ЧХ  $D(\omega)$  определяется выражением [3]:

$$D(\omega) = e^{-j\omega\tau}, \tag{11}$$

где  $\tau$  – задержка сигнала, нормированная к периоду частоты дискретизации.

Подставив (10) и (11) в выражения (8) и (9), получим формулы для вычисления элементов матриц  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{s}$ :

$$R_{k,l} = 2 \frac{\sin[\lambda(k-l)]}{k-l} = 2\lambda \operatorname{sinc}[\lambda(k-l)], \tag{12}$$

$$s_k = 2 \frac{\sin[\lambda(k-\tau)]}{k-\tau} = 2\lambda \operatorname{sinc}[\lambda(k-\tau)]. \tag{13}$$

Как можно заметить, матрица, определяемая (12), является Тёплицевой матрицей, не зависящей от требуемой задержки  $\tau$ , а значит обратная матрица  $\mathbf{R}$  может быть вычислена заблаговременно и позже использована для расчетов коэффициентов КИХ фильтра с дробной задержкой.

### Результаты синтеза оптимальных КИХ фильтров

В качестве примера выполним синтез оптимального КИХ фильтра 21 порядка с полной задержкой  $\tau_\phi = 10,5$  тактов и полосой пропускания  $\lambda = 2\pi \cdot 0,4$  (т.е. средний квадрат ошибки будет минимизирован в полосе от 0 до 0,4 частоты дискретизации). В результате синтеза получим следующие коэффициенты:

0.000561	-0.001853	0.004446	-0.009012
0.016403	-0.027751	0.044799	-0.070917
0.114698	-0.208062	0.641471	0.622899
-0.190370	0.098659	-0.057108	0.033549
-0.019126	0.010230	-0.004940	0.002022
-0.000602			

На рис. 1. приведены частотные зависимости ошибок АЧХ и ГВЗ (отклонение частотных характеристик синтезированного фильтра от требуемой  $D(\omega)$ ).

На рис. 2 представлены зависимости максимальной ошибки АЧХ и ГВЗ в заданном при синтезе частотном диапазоне от порядка фильтра  $N$ . Представленные зависимости построены для двух нормированных граничных частот: сплошные линии соответствуют  $\lambda = 2\pi \cdot 0,40$ ,

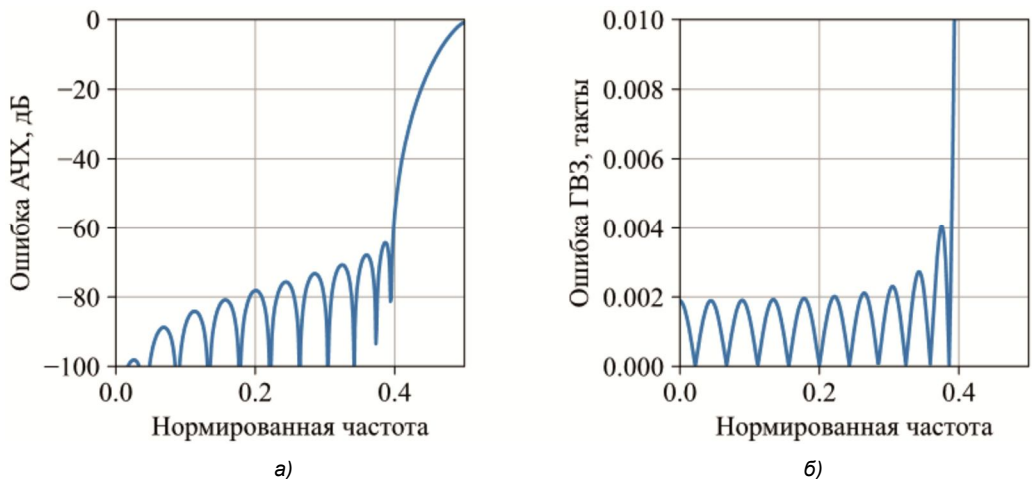


Рис. 1. Ошибка АЧХ и ГВЗ для фильтра 21 порядка с параметрами:  $\tau_{\phi} = 10,5$  тактов и полосой пропускания  $\lambda = 2\pi \cdot 0,4$

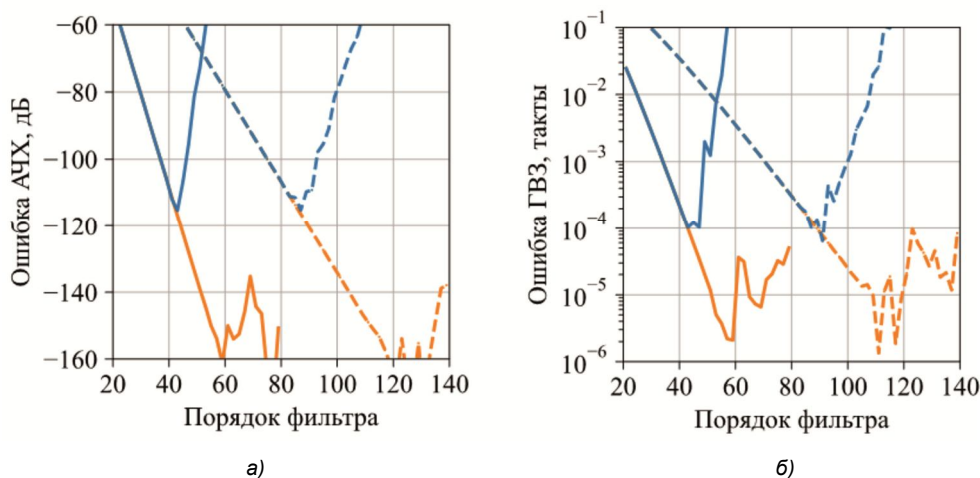


Рис. 2. Зависимости максимальной ошибки АЧХ (а) и ГВЗ (б) от порядка фильтра для разных методов вычисления оптимальных коэффициентов

пунктирные –  $\lambda = 2\pi \cdot 0,45$ . Графики получены с применением метода `MatrixXd::fullPivLu()` библиотеки `Eigen v3.4.90` (библиотека линейной алгебры, написанная на языке программирования C++). Метод позволяет вычислить как обратную матрицу, так и решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) без непосредственного вычисления обратной матрицы. В основе метода используется LU разложение с полным поворотом (LU decomposition with complete pivoting). В документации к библиотеке `Eigen` данный метод позиционируется как один из самых точных. Зависимость ошибок АЧХ и ГВЗ от порядка фильтра  $N$  при расчетах по формуле (7) (с вычислением обратной матрицы) показаны на рисунке синим цветом. Зависимость ошибок АЧХ и ГВЗ от порядка фильтра  $N$  при вычислении коэффициентов путем решения уравнения  $Rh_{\text{opt}} = s$  (без непосредственного вычисления обратной матрицы) показаны на рисунке оранжевым цветом. Как видно из графиков, предпочтительнее использовать методы решения СЛАУ без непосредственного вычисления обратной матрицы. При вычислении обратной матрицы не удастся получить ошибки АЧХ и ГВЗ меньше  $-115$  дБ и  $\sim 10^{-4}$  такта соответственно. При использовании методов без обращения матрицы порядок фильтра можно увеличивать, пока ошибки АЧХ и

ГВЗ не достигнут уровня  $-160$  дБ и  $\sim 2 \cdot 10^{-6}$  такта. Все расчеты проводились с использованием чисел с плавающей точкой двойной точности (размером 8 байт).

### Заключение

В статье получены и приведены формулы для вычисления оптимальных коэффициентов КИХ фильтра с дробной задержкой. В качестве критерия оптимальности использовался минимум среднего квадрата ошибки (6). Для получения малых ошибок АЧХ и ГВЗ необходимо синтезировать КИХ фильтры с высоким порядком, однако ограничиваясь вычислениями с числами с плавающей точкой двойной точности, не удастся получить ошибки ниже  $-160$  дБ и  $\sim 2 \cdot 10^{-6}$  такта соответственно. Для дальнейшего увеличения порядка фильтра и уменьшения величины ошибок АЧХ и ГВЗ синтезированных фильтров необходимо использовать специальные методы решения СЛАУ либо использовать в расчетах числа с большей точностью. Например, можно использовать библиотеку `GMP` [7], однако в этом случае время синтеза КИХ фильтра сильно увеличивается.

*Исследование выполнено в рамках государственного задания ФГАОУ ВО Сибирский федеральный университет (номер FSRZ-2023-0008).*

## Литература

1. Комплексная модель цифровой антенной решетки спутниковых радионавигационных систем на корпусе летательного аппарата / А.В. Ряполов, Д.А. Гредяев, О.В. Юрченко, Н.В. Фамбулов. Сбор. докл. V Междун. н.-техн. конф. Радиотехника, электроника и связь: Омск., 2019.

2. Сенченко А.А. LCMV алгоритм при воздействии имитационных помех. Перспективы развития фундаментальных наук: сборник трудов XVIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. В 7 томах. Том 7. / под ред. И.А. Курзиной, Г.А. Вороновой, Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2021. 110-113 с.

3. V. Valimaki, T.I. Laakso. Fractional Delay Filters-Design

and Applications.2001. 10.1007/978-1-4615-1229-5\_20.

4. Цифровая передискретизация сигналов на основе полиномиальной интерполяции. Фильтр Фарроу [Электронный ресурс]: [https://ru.dsplib.org/content/resampling\\_lagrange/resampling\\_lagrange.html](https://ru.dsplib.org/content/resampling_lagrange/resampling_lagrange.html), дата обращения 28.08.2023.

5. Оценка искажений при передискретизации цифрового сигнала с использованием фильтра Фарроу / М.И. Спажакин, В.Д. Репников, А.Б. Токарев. Вестник Воронежского государственного технического университета, 2013.

6. Algorithms for the Constrained Design of Digital Filters with Arbitrary Magnitude and Phase Responses, Mathias Lang, 1999.

7. The GNU Multiple Precision Arithmetic Library: <https://gmplib.org/>.



## Всероссийская конференция «СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ» (СТОС-2023)

12 – 13 декабря 2023 г. Россия, Москва

ALL-RUSSIAN CONFERENCE

"MODERN TECHNOLOGIES OF SIGNAL PROCESSING" (MTSP-2023)

Уважаемые коллеги!



**ПРИГЛАШАЕМ ВАС ПРИНЯТЬ УЧАСТИЕ В РАБОТЕ КОНФЕРЕНЦИИ**

### ОРГАНИЗАТОРЫ:

- Российское научно-техническое общество радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова
- Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН
- Московский технический университет связи и информатики
- Министерство образования и науки Российской Федерации

### ПРИ УЧАСТИИ:

- ОАО «Концерн радиостроения «Вега»
- ФГУП «НИИР»
- Балтийский федеральный университет им. И. Канта
- Владимирский государственный университет
- ОАО «Концерн «Созвездие»
- Московский энергетический институт
- Московский институт электронной техники
- Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
- Военная академия РВСН им. Петра Великого
- Тульский государственный университет
- Пензенский государственный университет
- Нижегородский технический госуниверситет им. Р.Е. Алексеева
- Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина
- Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. А.М. Бонч-Бруевича
- Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)
- Ульяновский государственный технический университет
- Ярославский государственный университет

### ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Председатель: академик РАН Сергей Аполлонович Никитов.

Заместитель Председателя: академик РАН Кузнецов Н.А.

Члены комитета: д.т.н, проф. Витязев В.В., д.т.н., проф. Вишневский В.М., д.т.н., проф. Джиган В.И., член-корр. РАН Дворкович А.В., д.ф.-м.н., проф. Миллер Б.М., д.т.н., проф. Рубинович Е.Я., д.ф.-м.н., проф. Семенович К.В., д.т.н., проф. Сергеев В.В., д.т.н. Чочиа П.А.

### ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ:

Председатель: д.т.н., профессор Артём Сергеевич Аджемов

Заместитель Председателя: д.т.н., профессор Сергеев В.А.

Члены Оргкомитета: доц. Алёшин В.С., проф. Брюханов Ю.А., проф. Васильев К.К., доц. Иванов А.П., проф. Калошин В.А., проф. Мамон Ю.И., проф. Пахотин В.А., проф. Постников И.И., доц. Самсонов Г.А., проф. Степанов С.Н., доц. Тычков А.Ю., проф. Цимбал В.А., проф. Чиров Д.С., проф. Ямпурин Н.П.

**Организация работы** в форме пленарных и проблемно-тематических заседаний. Пленарные доклады будут представлены по основным направлениям работы Конференции. Доклады, включенные в Программу конференции, будут опубликованы в Сборнике «Доклады Конференции» и размещены на сайте <http://www.rntores.ru/> в формате <pdf>. По опыту прошедших конференций, мероприятие оказалось очень эффективным местом общения для всех участников мероприятия: представителей науки и производства, заказчиков и разработчиков, потребителей и поставщиков, преподавателей и студентов, работодателей и соискателей, научно-технических издательств и читателей.