

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ АДАПТИВНОГО МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИГНАЛОВ НА ЭМПИРИЧЕСКИЕ МОДЫ

*Егоров В.В., д.т.н., старший научный сотрудник, заведующий кафедрой Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения*

*Клионский Д.М., к.т.н., доцент, доцент кафедры математического обеспечения и применения ЭВМ СПбГЭТУ «ЛЭТИ», e-mail: klio2003@list.ru*

## SOME ASPECTS OF APPLYING THE ADAPTIVE TECHNIQUE OF EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION OF NON-STATIONARY SIGNALS

*Egorov V.V., Klionskiy D.M.*

*The present paper discusses the issues of adaptive empirical mode decomposition. We represent the modified empirical mode decomposition method that allows us to eliminate decomposition redundancy. The properties of empirical modes are studied. We represent the results of comparing the empirical mode decomposition, Fourier analysis, and wavelet analysis. Some experimental data are shown that deal with studying harmonic signals. The classification of empirical modes is introduced and we suggest the technique of selecting informative components based on information criteria.*

**Key words:** empirical mode decomposition, modified empirical mode decomposition, informative components, information criteria, classification of components.

**Ключевые слова:** разложение на эмпирические моды, декомпозиция, модифицированный метод декомпозиции на эмпирические моды, информативные компоненты, информационные критерии.

### Введение

Обработка и анализ нестационарных сигналов являются неотъемлемой частью таких, например, направлений как речевые технологии, гидроакустика, обработка вибрационных сигналов, геофизические и биомедицинские исследования и пр. Для повышения точности и достоверности анализа этих сигналов желательно использовать специальные подходы и методы, обладающие свойством *адаптивности* к рассматриваемому сигналу.

Из известных на сегодняшний день методов указанному свойству адаптивности наиболее полно соответствует *дискретное вейвлет-преобразование* на основе схемы диадического (двоичного) банка фильтров [1-5]. Для данного преобразования существуют отработанный математический аппарат, в том числе быстрые вычислительные алгоритмы [2-4].

В силу особенностей конструирования вейвлет-базиса на основе масштабных растяжений и сдвигов материнской вейвлет-функции вдоль временной оси появляется возможность *адаптивно*, с учетом свойств гладкости текущего сегмента данных, обрабатывать сигналы путем достаточно точного учета временных особенностей. На рис. 1 представлен пример нестационарного сигнала с локальными временными особенностями.

Следует отметить, что проблемой, порой затрудняющей эффективное практическое применение вейвлет-преобразования, является большое многообразие вейвлетов и неочевидность выбора конкретного вей-

*Рассмотрены вопросы адаптивной декомпозиции сигналов на основе разложения на эмпирические моды. Представлен модифицированный метод декомпозиции на эмпирические моды, позволяющий устранить избыточность в разложении. Исследуются свойства эмпирических мод. Представлены сравнительные характеристики методов декомпозиции на эмпирические моды, анализа Фурье и вейвлет-анализа. Приведены некоторые экспериментальные данные по исследованию гармонических сигналов. Также вводится классификация эмпирических мод и предлагается способ отбора информативных компонент в разложении на основе информационных критериев.*

лета (его типа, длины вейвлет-фильтра) для решения поставленной задачи, в том случае, когда нет формализованных или эмпирических критериев выбора вейвлет-базиса.

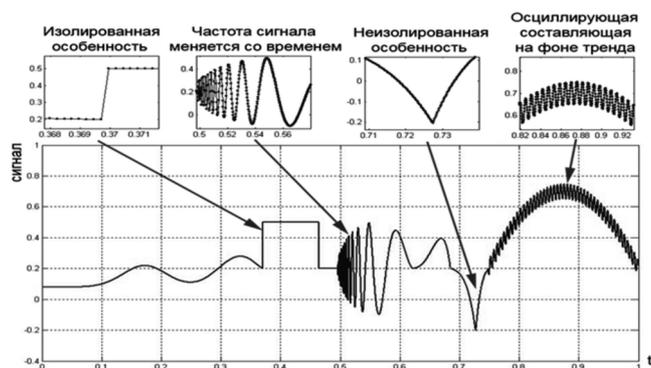


Рис. 1. Пример нестационарного сигнала с локальными особенностями

В статье рассматривается адаптивный мультимасштабный метод обработки и анализа сигналов посредством использования системы функций, называемый *декомпозицией на эмпирические моды (ДЭМ)* [6-11]. Обладая свойствами, подобными вейвлет-разложению, ДЭМ не требует априорного выбора базиса. Таким образом, разложение с использованием такого рода системы

функций проводится с учетом *локальных особенностей* (экстремумы и нули сигнала) и *структуры* конкретного сигнала. При этом структура исследуемого сигнала характеризуется наличием в нем трех основных типов компонент – шумовых, трендовых и компонент-шаблонов. Мультимасштабность подхода состоит в представлении исходного сигнала набором компонент с разным временным масштабом (временным разрешением).

Ниже представлены следующие основные положения статьи:

Рассмотрены особенности класса функций, называемых эмпирическими модами, а также некоторые теоретические и практические аспекты метода ДЭМ;

Представлены этапы разложения сигнала по методу ДЭМ и выполнено сравнение анализа Фурье, ДЭМ и вейвлет-анализа;

Предложена модификация алгоритма ДЭМ, которая позволяет избежать избыточности в разложении и выделить информативные компоненты;

Предложена обобщенная классификация эмпирических мод с учетом их физического смысла и появления в разложении сигнала;

Разработан метод отбора информативных компонент в разложении с использованием информационных критериев и предложенной автором классификации эмпирических мод.

### Понятие эмпирической моды

*Эмпирическая мода (ЭМ)*, называемая также *внутренней модовой функцией*, является особым типом математических функций [6, 7, 10]. ЭМ – функция, заданная дискретно или непрерывно на интервале существования сигнала. Имеет, в общем случае, произвольную аналитическую запись, но при этом удовлетворяет *двум необходимым условиям*:

1) общее число максимумов и минимумов такой функции должно быть либо равно числу нулей функции, либо отличаться от числа нулей по модулю не более, чем на единицу. Таким образом,

$$N_{\max} + N_{\min} = N_{\text{zero}} \pm 1 \text{ или } N_{\max} + N_{\min} = N_{\text{zero}}, \quad (1)$$

где  $N_{\max}$ ,  $N_{\min}$ ,  $N_{\text{zero}}$  – число максимумов, минимумов и нулей функции соответственно.

2) *локальное (мгновенное) среднее значение ЭМ*, определяемое в виде полусуммы двух *огibaющих* – верхней, полученной путем интерполяции найденных локальных максимумов, и нижней, полученной интерполяцией найденных локальных минимумов, – должно быть меньше или равно заранее определенного порогового значения  $\eta$ . Указанное пороговое значение зависит от машинной точности  $\varepsilon$  и погрешностей, связанных с получением, преобразованием и передачей сигнальной информации. Аналитически вышеуказанное условие записывается в виде:

$$m(k) = \frac{U(k) + L(k)}{2} \leq \eta, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (2)$$

где  $k$  – дискретное нормированное время (номер отсчета сигнала);  $m(k)$  – локальное среднее значение,

$U(k)$  и  $L(k)$  – значения верхней и нижней *огibaющих* сигнала в  $k$ -й дискретный момент времени;  $N$  – общее количество отсчетов на длительности сигнала (длина сигнала);  $\eta$  – некоторый порог, принятый обработчиком-экспертом и обычно имеющий близкие к нулю значения.

Огibaющие  $U(k)$  и  $L(k)$  подчиняются следующему соотношению:

$$U(k) \geq c(k); \quad L(k) \leq c(k); \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (3)$$

где  $c(k)$  – ЭМ.

Условие равенства нулю локального среднего накладывает ограничения на симметрию *огibaющих* относительно оси абсцисс. Для реальных сигналов соотношение между *огibaющими* имеет вид:

$$U(k) = -L(k) \pm \gamma, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (4)$$

где  $\gamma \geq 0$  – некоторая малая константа, связанная с вычислительной точностью.

Из выражений (2) и (4) следует, что константы  $\gamma$  и  $\eta$  аналитически связаны.

Условие равенства нулю локального среднего значения можно также записать в виде:

$$m(k) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{k-\varepsilon/2}^{k+\varepsilon/2} c(r) dr = 0, \quad (5)$$

где  $r$  – переменная, представляющая собой аналоговое время; величина  $\varepsilon$  может варьироваться и определяет диапазон, в пределах которого среднее значение ЭМ равно нулю.

Необходимо отметить, что существуют альтернативные методы определения локального среднего значения в окрестности некоторой точки. В одном из них [7] для вычислений используется интегральная функция вида:

$$m_{\delta} [f(x)] = \frac{1}{\delta} \int_{x_{\delta}} f(y) dy, \quad (6)$$

где  $m_{\delta} [f(x)]$  – локальное среднее,  $f(x)$  – функция, для которой вычисляется локальное среднее,  $r_3(k)$  представляет собой  $\delta$  – окрестность точки с абсциссой  $x$ ,

$$\text{задаваемую как } \left[ x - \frac{\delta}{2}; x + \frac{\delta}{2} \right].$$

Функция, удовлетворяющая первому, но не удовлетворяющая второму приведенному выше условию, является так называемой «слабой» ЭМ (*англ.* – weak intrinsic mode function). «Слабая» ЭМ имеет суммарное число максимумов  $N_{\max}$  и минимумов  $N_{\min}$  равное числу нулей  $N_{\text{zero}}$  или отличающееся от числа нулей на  $\pm 1$ , но при этом может обладать несимметричными верхней и нижней *огibaющими*.

На рис. 2 приведены примеры функций, относящихся к классу ЭМ. Здесь цифрой 1 обозначена верхняя *огibaющая* функции, цифрой 2 – нижняя *огibaющая*, цифрой 3 – локальное (мгновенное) среднее, определенное как полусумма обеих *огibaющих*, 4 – ЭМ, для которой построены *огibaющие* 1 и 2.

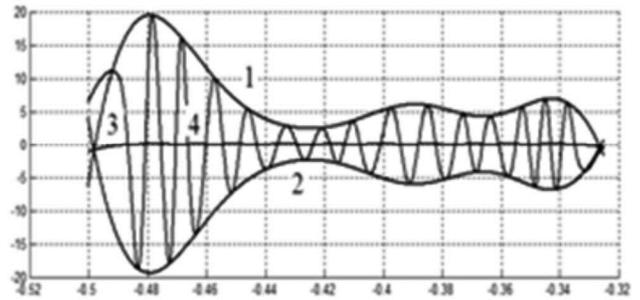
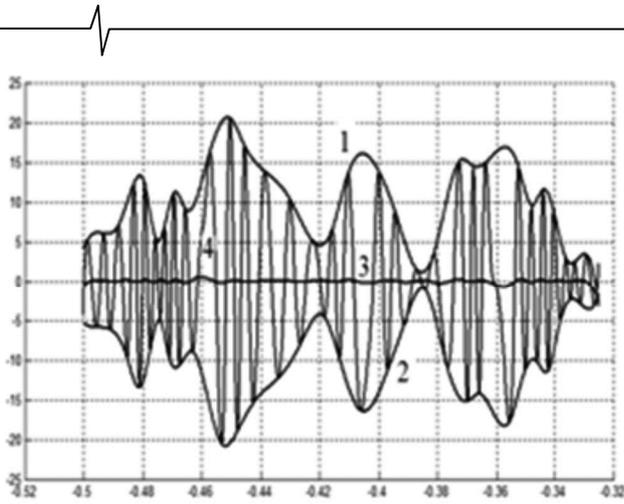


Рис. 2. Примеры ЭМ с иллюстрацией огибающих и их полусуммы

Ниже, в качестве примера, приведены два аналитических выражения для ЭМ, представляющих собой амплитудно-модулированные функции с экспоненциальными огибающими:

- 1)  $s(t) = e^{\varepsilon \cos(t)} \sin(\varepsilon \sin(t))$ .
- 2)  $s(t) = e^{-\varepsilon t} \cos(\omega_0 t)$ .

#### Метод декомпозиции на эмпирические моды

При реализации метода ДЭМ базисные функции-компоненты *извлекаются* непосредственно из исходного сигнала, следовательно, такой базис всегда *уникален, апостериорен* и *адаптивен* [7-10]. В силу отсутствия необходимости выбора априорного базиса для проведения разложения сигнала, данный метод можно отнести к *непараметрическим* методам обработки и анализа данных. Кроме того, метод ДЭМ ориентирован на так называемую *нелинейную обработку данных*, направленную на поиск нелинейных статистических связей. При этом метод ДЭМ более эффективен, чем методы классического корреляционного и спектрального анализа сигналов, ориентированные на поиск линейных закономерностей в сигналах.

Применительно к ДЭМ термин «адаптивность» имеет иной смысл, чем в его классической трактовке в цифровой обработке сигналов, где имеет место понятие «адаптивный фильтр» [12-14]. *Адаптивный* фильтр – нелинейная система с обратной связью, параметры которой *подстраиваются* к сигналу с заранее неопределенной статистической моделью в процессе его обработки. Адаптивность применительно к методу ДЭМ заключается в его приспособлении к локальным особенностям и свойствам данных.

ДЭМ представляет собой математически вложенный итерационный процесс, причем число внешних итераций можно заранее аналитически определить [6] с достаточно высокой точностью, а число внутренних итераций определяется на основе специальных критериев [6, 7].

При реализации алгоритма ДЭМ используются численные методы и алгоритмы теории многочленов, линейной алгебры, математического анализа и т.д.

Сигналы содержат в себе локальные особенности, отражающие их природу и структуру, а метод ДЭМ адаптивно учитывает эти особенности в разложении сигнала. Структура локальных особенностей может

быть представлена на разных масштабах (уровнях разложения) и с различной вычислительной точностью.

В случае разложения произвольного дискретного сигнала по базису Фурье и вейвлет-базису используется следующее выражение:

$$c(k) = \sum_i c_i f_{i\text{det}}(k), \quad (7)$$

где  $c(k)$  – исходный сигнал;  $k$  – номер отсчета (дискретное нормированное время);  $c_i$  –  $i$ -й коэффициент разложения по базису;  $f_{i\text{det}}(k)$  –  $i$ -я детерминированная априорно известная базисная функция.

В общем случае, отдельные компоненты  $f_{i\text{det}}(k)$  сигнала  $s(k)$  могут исключаться из рассмотрения при его восстановлении в соответствии с выражением (7). Причиной является, например, удаление (после идентификации) шумовых компонент в сигнале либо выделение тренда, который анализируется отдельно.

Для ДЭМ выражение декомпозиции сигнала может быть представлено в виде:

$$s(k) = \sum_i b_i f_i(k), \quad (8)$$

где  $b_i$  –  $i$ -й коэффициент разложения на основе ДЭМ;  $f_i(k)$  –  $i$ -я априорно неизвестная функция, извлекаемая из исходного сигнала  $s(k)$ .

Как отмечено выше, в данном случае базисные функции формируются *апостериорно*, что является преимуществом с точки зрения учета индивидуальных свойств сигналов.

Из выражения (8) следует, что ДЭМ наиболее эффективно применять для обработки *многокомпонентных* сигналов, состоящих из конечного аддитивного набора разномасштабных компонент различной физической природы, занимающих различные частотные полосы. Под разномасштабностью компонент подразумевается их различное разрешение по времени, и именно она определяет целесообразность мультимасштабного подхода к их обработке и анализу.

Широкое использование гармонических функций, базисных вейвлетов и ЭМ делает целесообразным сравнение их свойств. В табл. 1 представлены некоторые сравнительные характеристики методов анализа Фурье, ДЭМ и вейвлет-анализа.

Таблица 1. Сравнение анализа Фурье, ДЭМ и вейвлет-анализа

Характеристика	Анализ Фурье	ДЭМ	Вейвлет-анализ
Обработка нестационарных сигналов	-	+	+
Визуализация частотно-временного об- раза сигнала	+	+	+
Способность локализации особенностей сигнала	+	+	+
Наличие компактного носителя	+	+	+
Наличие аналитического представления	+	+	+
Происхождение базисных функций	априорно известны	апостериорно известны	априорно известны
Сходимость	+	строго не доказана (подтвер- ждена опытным путем [6-8])	+
Наличие быстрых вычислительных алго- ритмов	+	+	+

**Алгоритм декомпозиции сигнала**

*Шаг 1.* Рассматривается так называемый *текущий остаток*  $r_p(k)$ . Здесь  $r_1(k)$  – первый остаток, который совпадает с исходным сигналом  $s(k)$ . Определяются его локальные экстремумы и формируются два конечных набора:

$$\{M_i\}, i = 1, 2, 3, \dots; \{m_i\}, i = 1, 2, 3, \dots;$$

где  $\{M_i\}$  и  $\{m_i\}$  – множество максимумов и минимумов соответственно.

Далее по найденным экстремумам строятся две огибающие посредством интерполяции кубическими сплайнами локальных максимумов и локальных минимумов:

$$U_i(k) = f_U(M_i, k), k = 0, \dots, N - 1; \tag{10}$$

$$L_j(k) = f_L(m_j, k), k = 0, \dots, N - 1; \tag{11}$$

где  $U_i(k)$  и  $L_j(k)$  – верхняя и нижняя огибающие, построенные соответственно по найденным в (9) локальным максимумам и минимумам с помощью сплайн-интерполяции;  $j$  – номер итерации отсеивания.

Затем определяется полусумма двух огибающих (локальное среднее значение, зависящее от времени) по выражению (12):

$$e_j(k) = 0.5(U_j(k) + L_j(k)), \tag{12}$$

и выполняется переход к шагу 2.

*Шаг 2.* Найденное среднее значение вычитается из текущего остатка согласно выражению (13), и полученный результат  $h_j(k)$  оказывается кандидатом на то, чтобы стать очередной ЭМ:

$$\begin{cases} h_1(k) = r_p(k); \\ h_j(k) = h_{j-1}(k) - e_j(k), j > 1. \end{cases} \tag{13}$$

Для перехода к шагу 3 необходимо проверить два аналитических условия отнесения функции к классу ЭМ, приведенные выше. Если оба условия выполняются, то осуществляется переход к шагу 3. Если хотя бы одно из них нарушено, то осуществляется возврат к шагу 1, при этом в качестве текущего остатка выступает полученный на втором шаге результат. Так реализуется *процесс отсеивания*, который может быть записан в следующем виде:

$$\begin{cases} h_{j+1}(k) = h_j(k) - e_j(k), j \geq 1; \\ \dots \\ c_p(k) = h_{iter_p}(k), \end{cases} \tag{14}$$

где  $e_j(k)$  – среднее значение функции на  $j$ -й итерации процесса отсеивания;  $h_j(k)$  – текущий результат на  $j$ -й итерации отсеивания;  $iter_p$  – общее число итераций отсеивания для  $p$ -й ЭМ.

На итерации с номером  $iter_p$  процесс извлечения  $p$ -й ЭМ прекращается и выполняется переход к шагу 3.

*Шаг 3.* После извлечения ЭМ в ее окончательном виде осуществляется ее вычитание из текущего остатка для формирования нового (то есть для обновления остатка):

$$r_{p+1}(k) = r_p(k) - c_p(k), p > 1, \tag{15}$$

где  $c_p(k)$  – полученная ЭМ;  $r_p(k)$  – текущий остаток;

$r_{p+1}(k)$  – новый остаток.

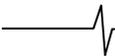
*Шаг 4.* Осуществляется переход к шагу 1, где в качестве функции, из которой будут извлекаться ЭМ с более высокими номерами, то есть в качестве текущего выступит остаток, полученный на третьем шаге алгоритма, то есть  $r_{p+1}(k)$ .

Представленный выше алгоритм назовем алгоритмом *классической ДЭМ*.

**Модификация алгоритма ДЭМ**

В классическом алгоритме ДЭМ применяются кубические сплайны в качестве средства интерполяции обеих огибающих. Кубические сплайны гарантируют сравнительно невысокую вычислительную сложность, по сравнению со сплайнами более высоких порядков. При этом кубические сплайны являются гладкими функциями.

Несмотря на это, при реализации классического алгоритма ДЭМ возможно возникновение ошибок в определении местоположения экстремумов в соотношениях (9)-(11). Неточное определения их местоположения может привести к тому, что в разложении получится *избыточность*. Она может проявиться в том, что будут извлечены дополнительные компоненты, не имеющие физического смысла и связанные с неточным нахождением



экстремальных точек. В связи с этим предлагается модификация алгоритма ДЭМ, который более точно определит экстремумы и позволит избавиться от избыточности.

Очевидно, максимальная ошибка  $e_{\max}$  определения экстремума составляет половину интервала дискретизации:

$$e_{\max} = T/2, \quad (16)$$

где  $T$  – интервал (период) дискретизации.

С учетом вышесказанного, предлагается новый метод определения экстремумов с использованием *квадратичной интерполяции*, описываемый следующим алгоритмом:

**Шаг 1.** Выбираются три первых отсчета исходного сигнала  $s(k)$ ;

**Шаг 2.** По данным трем отсчетам строится квадратичный полином вида  $ak^2 + bk + c$ , где  $a, b, c$  – коэффициенты, подлежащие определению. Для их нахождения необходимо решить систему из трех уравнений с тремя неизвестными;

**Шаг 3.** Если коэффициент при старшей степени полинома отличен от нуля ( $a \neq 0$ ), то среди трех точек есть экстремум, который располагается посередине. Найденная точка соответствует последовательности из

трех точек. Координата экстремума уточненным способом определяется как координата вершины квадратичной параболы;

**Шаг 4.** Если коэффициент при старшей степени равен нулю, то все три отсчета лежат на одной прямой с положительным или отрицательным наклоном, и среди них нет экстремума. Далее необходимо на одну точку сдвинуть скользящее окно, включающее в себя в исходном варианте первые три точки, среди которых ищут экстремальную.

Затем шаги 1-4 повторяются.

На рис. 3 приведен пример модификации ДЭМ гармонического сигнала с извлечением одной гармоники (рис. 3, а) и трех гармоник (рис. 3, б).

Из графиков на рис. 3 следует, что в разложении гармонического сигнала, состоящего из одной гармоники, появляется одна ЭМ. Соответственно при декомпозиции мультигармонического сигнала из трех гармоник формируются три компоненты, каждая из которых соответствует одной гармонике, то есть одной ЭМ. Следует отметить, что при разложении сигнала (рис. 3, б) гармоники появляются в соответствии с их частотами и представлением ДЭМ как банка фильтров. В этом случае при использовании классического алгоритма ДЭМ формируется разложение вышеуказанных сигналов, представленное на рис. 4.

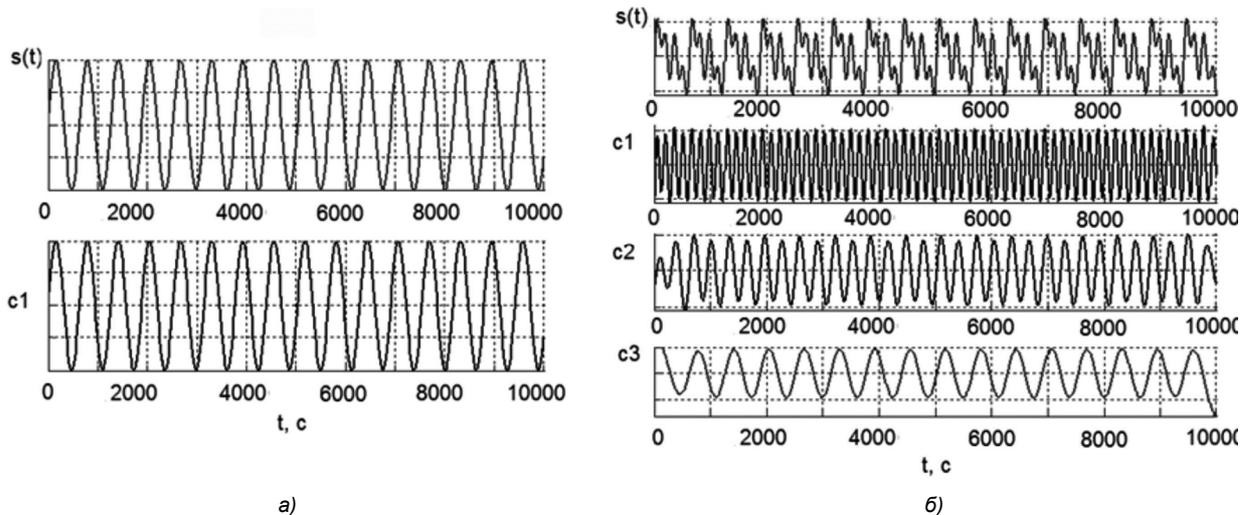


Рис. 3. Пример модификации ДЭМ гармонического сигнала: а – с извлечением одной ЭМ; б – с извлечением 3-х ЭМ

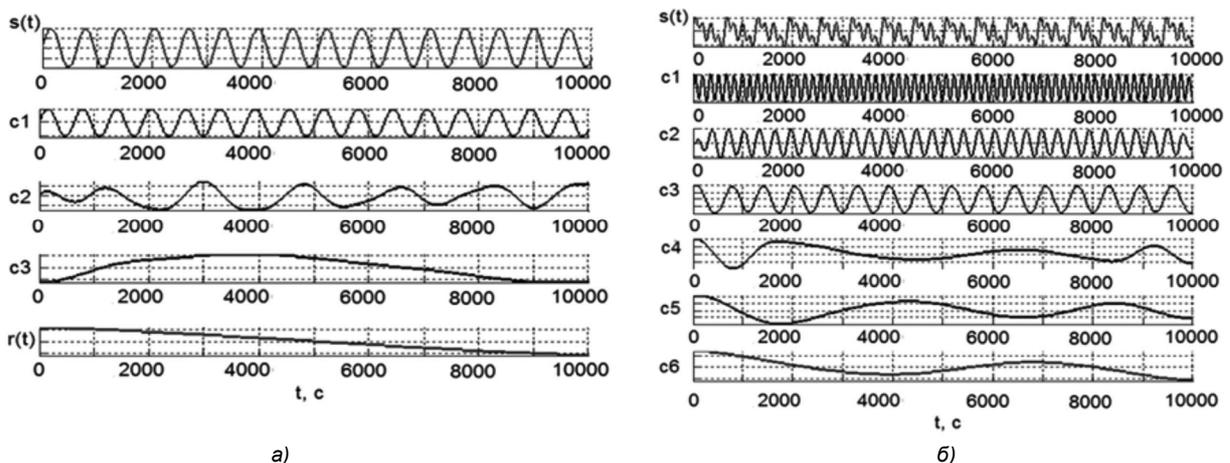


Рис. 4. Пример классической ДЭМ гармонического сигнала: а – с извлечением одной ЭМ; б – с извлечением 3-х ЭМ

В рассматриваемом эксперименте при разложении монокомпонентного сигнала (рис. 4, а) получается четыре компоненты. При этом три последних компоненты не имеют физического смысла, и их появление объясняется ошибками в точности определения экстремумов на каждом уровне разложения. Аналогично на рис. 4, б компоненты 4-я, 5-я и 6-я также не имеют физического смысла и появляются за счет избыточности разложения.

Таким образом, приведенные примеры иллюстрируют преимущество предложенной модификации по сравнению с классическим алгоритмом ДЭМ, заключающееся в отсутствии избыточности в разложении.

### Классификация эмпирических мод и отбор информативных составляющих в разложении

При решении задач предварительной обработки сигналов (очистка от шума, выделение тренда и пр.) и анализа структуры сигналов с помощью метода ДЭМ необходима предварительная классификация всех извлеченных из сигнала ЭМ. Применительно к методу ДЭМ данная задача ранее не рассматривалась.

В рамках поставленной задачи, для произвольного сигнала все ЭМ могут быть разбиты на две категории:

- 1) *основные ЭМ*;
- 2) *трендовые ЭМ*, включая *компенсирующие* и *истинные трендовые ЭМ*.

Основные ЭМ в разложении отражают структуру и особенности конкретного сигнала. К их числу относятся шумовые ЭМ и ЭМ-шаблоны. Появление шумовых ЭМ в разложении собственно и объясняется наличием в исходном сигнале шума, а ЭМ-шаблоны связаны непосредственно с полезным сигналом и входящими в него компонентами, несущими информацию об исходном сигнале. Введенное здесь понятие «ЭМ-шаблон» описывает некоторую функцию, характерную для данного типа сигналов, например, любую из элементарных гармоник мультигармонического сигнала. В качестве другого примера можно рассмотреть аддитивную смесь ЛЧМ-сигнала, элементарной гармоник и шума, где ЛЧМ-сигнал и гармоника – суть эмпирические моды.

Трендовые ЭМ являются медленно меняющимися функциями, характеризующими изменение во времени локального среднего значения сигнала. Среди них, согласно введенной выше классификации, можно выделить *истинные трендовые ЭМ*, описывающие динамику среднего значения, и так называемые *компенсирующие ЭМ*, которые могут возникать в разложении в том случае, когда тренд в сигнале отсутствует. Истинные трендовые ЭМ появляются, например, при разложении суммы гармонического сигнала и полиномиального тренда. Результат несовершенства самого алгоритма ДЭМ, критериев остановки процесса отсеивания, неточностей вычислений в рамках предлагаемых здесь обозначений является причиной появления компенсирующих ЭМ в разложении сигнала.

Компенсирующие ЭМ создают избыточность в разложении, т.к. проведенные автором экспериментальные вычисления показывают, что в сумме они дают функ-

цию, очень близкую к нулю, то есть компенсируют друг друга. Одной из наиболее типичных причин появления компенсирующих ЭМ являются побочные эффекты интерполяции огибающих, такие как появление «всплесков», сильные осцилляции вблизи концов сигнала (краевые эффекты). Для частичного преодоления вышеперечисленных проблем существуют специальные методы, такие, например, как подавление краевых эффектов с помощью зеркального отображения экстремумов, наиболее близко расположенных к границам сигнала; тестирование различных критериев остановки процесса отсеивания; уточнение местоположения экстремумов для построения огибающих.

На практике часто возникают ситуации, когда необходимо идентифицировать *информативные* компоненты сигнала. Разложение сигнала может интерпретироваться как построение его математической модели в виде конечного набора ЭМ и результирующего неразлагаемого остатка. При этом номер ЭМ представляет собой *порядок* искомой математической модели  $p$ . Вторым фактором, влияющим на оптимальный выбор порядка, выступает дисперсия  $D$  сигнала ошибки, определенного как разность исходного сигнала и тех ЭМ, что входят в модель.

По аналогии с известными параметрическими методами спектрального оценивания для нахождения порядка модели предлагается применить *информационные критерии* (ИК). В общем случае целый ряд ИК можно записать в следующем обобщенном виде:

$$IC(p, N, D) = N \ln D + g(p, N), \quad (17)$$

где  $IC(\dots)$  – информационный критерий;  $N$  – число отсчетов в сигнале;  $p$  – порядок модели;  $D$  – дисперсия ошибки аппроксимации сигнала математической моделью;  $g(p, N)$  – некоторая функция двух переменных  $p$  и  $N$ . На основании выражения (17) был получен и широко используется набор ИК [15]. В качестве примера может быть приведен критерий Акаике:

$$\alpha = 0.1 \quad (18)$$

При использовании критерия Акаике оптимальным считается то значение порядка, которое доставляет *минимум* выражению (18):

$$p_{opt} = \arg \min_p AIC(p, N, D), \quad p = p_{min}, \dots, p_{max}, \quad (19)$$

где  $p_{min}$ ,  $p_{max}$  – соответственно минимально и максимально возможные значения порядка модели. Обычно в отсутствие других априорных сведений полагается  $p_{min} = 1$ , величина  $p_{max}$  определяется исходя из конкретной задачи более сложными способами [15].

В качестве экспериментального примера рассмотрим мультигармонический сигнал, состоящий из трех элементарных гармоник, в смеси с гауссовским шумом (рис. 5).

Среднеквадратическое отклонение шума установлено равным 0.3. Частоты гармоник образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. При разложении сигнала было получено 11 компонент. В соответствии с [16], медианная оценка СКО шума по первой ЭМ составляет 0.2876.

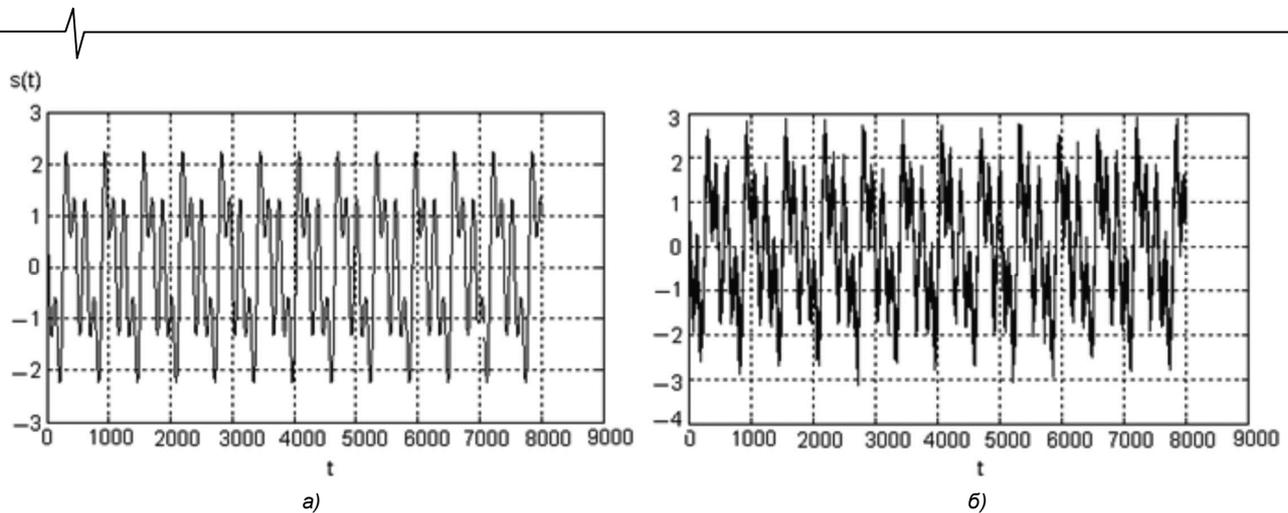


Рис. 5. Мультигармонический сигнал (слева) и его копия с аддитивным гауссовским шумом (справа)

При заданных условиях зависимость критерия Акаике от порядка модели приобретает вид, показанный на рис. 6.

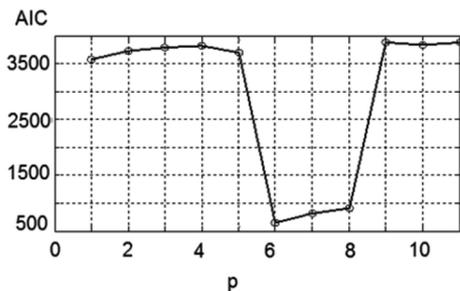


Рис. 6. Зависимость значений критерия АИС от порядка модели  $p$

Нумерация ЭМ в данном примере ведется в порядке возрастания от высокочастотных к низкочастотным компонентам. Компонента 1 на рис. 6 соответствует самой первой компоненте в разложении, компонента 2 – второй и т.д. Представленный метод дает возможность выбора порога для установления категории ЭМ (шумовые, трендовые, ЭМ-шаблоны).

На графике можно видеть три характерные точки, соответствующие 6-й, 7-й, 8-й элементарным гармоникам, значения критерия АИС для которых существенно меньше, чем для всех остальных. Это объясняется малой дисперсией ошибки аппроксимации исходного сигнала любой из этих трех гармоник. Остальные компоненты соответствуют либо *шумовым* (с 1-й по 5-ю), либо *компенсирующим* (с 9-й по 11-ю) ЭМ. Для них соответствующая дисперсия ошибки велика и велико значение критерия Акаике. Для случая, показанного на рис. 6, можно ввести некоторое пороговое значение. В этом случае те ЭМ, для которых значение критерия меньше порога, будут отнесены к *ЭМ-шаблонам*, а остальные – либо к *шумовым*, либо к *компенсирующим* (в более общем случае – к *трендовым*).

### Заключение

В статье рассмотрены свойства класса функций, называемых эмпирическими модами. Представлен метод декомпозиции на эмпирические моды. Показано, что метод ДЭМ обладает свойством адаптивности, что, в свою очередь, повышает точность анализа и обработки сигналов. Показано, что данные функции имеют важное значение при реализации метода ДЭМ.

Разработана новая модификация метода ДЭМ, позволяющая избежать избыточности в разложении сигнала. Введена классификация ЭМ и предложен способ отбора информативных компонент в разложении на основе информационных критериев.

### Литература

1. К. Чуи Введение в вейвлеты; пер. с англ. М.: Мир. 2001. 412 с.
2. С. Малла Вейвлеты в обработке сигналов; пер. с англ. М.: Мир, 2005. 671 с.
3. Смоленцев Н.К. Вейвлет-анализ в Matlab / 3-е изд. М.: ДМК Пресс, 2010. 448 с.
4. Орешко Н.И., Геппенер В.В., Клионский Д.М. Применение гармонических вейвлетов в задачах обработки осциллирующих сигналов. Цифровая обработка сигналов. 2012. № 2. С. 6-15.
5. Клионский Д.М., Орешко Н.И., Геппенер В.В. Оценка спектральной плотности телеметрических данных на основе теории вейвлетов. Цифровая обработка сигналов и ее применения – DSPA'2011: тез. докл. 13-й Междунар. конф., г. Москва, 30 марта – 1 апр. 2011 г. 2011. С. 123-127.
6. Huang N.E., et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for non-linear and non-stationary time series analysis. Proc. Royal Soc. London. 1998, vol. 454, pp. 903-995.
7. Huang N.E., Shen S.S.P. Hilbert-Huang Transform and Its Applications. World Scientific, 2005. 350 p.
8. Клионский Д.М., Орешко Н.И., Геппенер В.В. Декомпозиция на эмпирические моды и ее использование при анализе дробного броуновского движения. Цифровая Обработка Сигналов. 2008. № 3. С. 37-45.
9. P. Flandrin, G. Rilling, P. Gonsalves Empirical mode decomposition as a filter bank. IEEE Signal Processing Letters. 2004, vol. 11, no. 2, pp. 112-114.
10. N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long A new view of nonlinear water waves: the Hilbert spectrum / Annu. Rev. Fluid Mech. 1999, vol. 31, pp. 417-457.
11. Мясникова Н.В., Берестень М.П. Разложение на эмпирические моды на основе дифференцирования и интегрирования. Цифровая Обработка Сигналов. 2016. № 1. С. 20-23.
12. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов : учеб. пособие / 3-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011. 768 с.
13. Джиган В.И. Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы. М.: Техносфера, 2013, 529 с.
14. Солонина А.И., Клионский Д.М., Меркучева Т.В., Перов С.Н. Цифровая обработка сигналов и Matlab. СПб.: изд. БХВ-Петербург, 2013, 512 с.
15. Stoica, P. Spectral Analysis of Signals / P. Stoica, R. Moses. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2005. 427 p.
16. Хьюбер, Дж. Робастность в статистике. пер. с англ. Дж. Хьюбер. М.: Мир. 1984. 304 с.