

УДК 621.372.54

КИХ-ФИЛЬТР С ДРОБНОЙ ЗАДЕРЖКОЙ НА ОСНОВЕ ОКОННЫХ ФУНКЦИЙ

Андреев А.Г., к.т.н., доцент кафедры радиозлектронных систем ИИФирЭ ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет», e-mail: aandrejev@sfu-kras.ru

Сенченко А.А., старший преподаватель каф. Радиотехники ИИФирЭ ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет», e-mail: asenchenko@sfu-kras.ru

WINDOW-BASED FRACTIONAL DELAY FIR FILTERS DESIGN

Andreev A.G., Senchenko A.A.

To model a receiver with antenna array impinging signals must be delayed for a value which is not multiple of signal sampling rate. This problem can be solved using finite impulse response filters. Article shows that filter coefficients close to optimal can be obtained by applying window functions. This significantly reduces computational complexity compared to optimal solution.

Key words: fractional delay filters, FIR, optimal coefficients, window function, Kaiser window, Dolph–Chebyshev window, Gaussian window, Hann window, antenna arrays, signal modelling, signal delay.

Ключевые слова: КИХ-фильтр с дробной задержкой, оптимальные коэффициенты, весовые функции, окно Кайзера, окно Дольф-Чебышева, окно Гаусса, окно Ханна, антенные решетки, моделирование сигнала, задержка сигнала.

Введение

Для разработки адаптивных алгоритмов пространственной фильтрации сигналов используется компьютерное моделирование. Одной из задач моделирования является имитация сигнала на выходе антенных элементов антенной решетки. Для этого требуется иметь возможность задерживать сигнал на произвольную задержку, как правило, не кратную частоте дискретизации сигнала. Если требуемая задержка не кратна частоте дискретизации сигнала, то будем называть её дробной.

Существуют различные способы задержки сигнала на дробную величину задержки. Вот некоторые из них:

Повышение частоты дискретизации сигнала, его задержка на целое число тактов на повышенной частоте и понижение частоты дискретизации до начального уровня. Основным недостатком данного способа является возможность задавать только кратные периоду повышенной частоты дискретизации задержки, повышенные требования к вычислительным ресурсам и, как следствие, низкая скорость моделирования.

Фильтр Фарроу на основе полиномиальной интерполяции сигнала. Использование метода приводит к нелинейным искажениям, что в ряде случаев является существенным недостатком.

Третий способ заключается в использовании КИХ-фильтров с дробной задержкой. В этом методе требуется синтезировать КИХ-фильтр с постоянной АЧХ и линейной ФЧХ (т.е. с постоянной ГВЗ) в требуемой полосе частот.

Для задач моделирования прохождения сигнала через антенные решетки наилучшим образом подходит

Для создания моделей обработки сигнала в антенных решетках необходимо иметь возможность задерживать сигнал на произвольную величину, в том числе не кратную периоду дискретизации сигнала. Данная задача может быть решена с помощью КИХ-фильтров с дробной задержкой. В статье приведен способ синтеза КИХ-фильтров с дробной задержкой на основе оконных функций. Разработана модель для оценки величины ошибки ЧХ синтезированных фильтров с целью их сравнения. Показано, что с применением оконных функций могут быть получены результаты, близкие к оптимальным.

применение КИХ-фильтров с дробной задержкой. Такие фильтры позволяют задать любую произвольную задержку, не внося нелинейные искажения, менее требовательны к вычислительным ресурсам, чем задержка сигнала на повышенной частоте дискретизации.

В статье [1] приведён способ расчета оптимальных коэффициентов КИХ-фильтра с дробной задержкой по критерию минимума среднего квадрата ошибки:

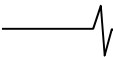
$$\mathbf{h}_{opt} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}, \quad (1)$$

$$R_{k,l} = 2 \frac{\sin[\lambda(k-l)]}{k-l} = 2\lambda \operatorname{sinc}[\lambda(k-l)], \quad (2)$$

$$s_k = 2 \frac{\sin[\lambda(k-\tau)]}{k-\tau} = 2\lambda \operatorname{sinc}[\lambda(k-\tau)], \quad (3)$$

где $R_{k,j}$ – элементы матрицы \mathbf{R} и s_k – элементы вектора \mathbf{s} формулы (1), $\lambda = 2\pi f / f_s$ – нормированная частота в диапазоне $[0; \pi]$, f – верхняя частота полосы пропускания фильтра, f_s – частота дискретизации, τ – требуемая задержка, не кратная частоте дискретизации. Матрица \mathbf{R} имеет размер $N \times N$ элементов, а вектор-столбец \mathbf{s} состоит из N строк, где N – порядок КИХ-фильтра. Рекомендуется выбирать задержку τ таким образом, чтобы она отличалась от величины $T_s(N-1)/2$ не более, чем на половину такта ($T_s = 1/f_s$ – период дискретизации сигнала).

Применение оптимального решения (1) имеет высокую вычислительную сложность, особенно для больших порядков КИХ-фильтров (десятки, сотни и более коэффициентов). В то же время, синтез КИХ-фильтра мето-



дом оконного взвешивания лишен данного недостатка. Проведем исследование характеристик КИХ-фильтров, синтезируемых двумя различными методами: оптимальным и методом оконного взвешивания.

Постановка задачи

Задержка сигнала может быть представлена суммой целой и дробной части:

$$\tau = n + \tau_r, \quad (4)$$

где n – целая часть задержки; $|\tau_r| \leq 0,5$ – дробная часть задержки. Обе величины выражены в тактах частоты дискретизации.

Для получения частотных характеристик, наиболее близких к идеальным, задержка в КИХ-фильтре с дробной задержкой должна удовлетворять условию:

$$\frac{(N-1)}{2} - 0,5 \leq \tau_\phi \leq \frac{(N-1)}{2} + 0,5, \quad (5)$$

где N – порядок фильтра, нечетное целое число; τ_ϕ – задержка сигнала в фильтре, выраженная в тактах. Следовательно, полная задержка в КИХ фильтре с дробной задержкой определяется выражением:

$$\tau_\phi = \frac{(N-1)}{2} + \tau_r. \quad (6)$$

Совсем не обязательно, чтобы задержки τ и τ_ϕ были равны. Если $\tau_\phi \leq \tau$, то можно дополнительно задержать входной сигнал на целое число тактов. В обратном случае, когда $\tau_\phi > \tau$, излишнюю задержку можно компенсировать дополнительной задержкой в других местах алгоритма обработки сигнала.

Отклонение АЧХ и ГВЗ от идеальных значений будут максимальны для максимально возможной дробной задержки $\tau_r = 0,5$. По этой причине расчет коэффициентов КИХ-фильтра с дробной задержкой везде далее будет проводиться для $\tau_r = 0,5$.

Проведем сравнение точности воспроизведения дробной задержки оптимальным КИХ-фильтром и фильтрами, синтезированными с применением оконных функций.

Весовая функция оптимального КИХ-фильтра с дробной задержкой

В работах [2, 3] приводится формула для расчета коэффициентов идеального фильтра с дробной задержкой:

$$h_{ид}(n) = \sin c(n - \tau), \quad (7)$$

где n – целое число, соответствующее индексу коэффициента идеального фильтра. Идеальный фильтр с дробной задержкой является нереализуемым, так как содержит бесконечное число коэффициентов, в том числе с отрицательными индексами.

Для известных коэффициентов идеального и оптимального КИХ-фильтров с дробной задержкой определим оконную функцию $w_{онм}(n)$:

$$w_{онм}(n) = \frac{h_{ном}(n)}{h_{ид}(n)}, \quad (8)$$

где n – индекс коэффициента, удовлетворяющий условию $0 \leq n < N$. Для оптимального КИХ фильтра 21 по-

рядка с задержкой 10,5 такта и $\lambda = 2\pi \cdot 0,4$ весовая функция представлена на рис. 1.

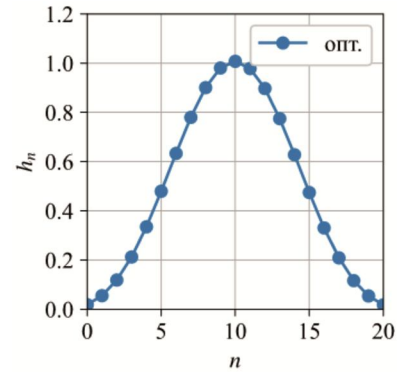


Рис. 1. Оптимальная весовая функция для $N = 21$, $\tau = 10,5$, $\lambda = 2\pi \cdot 0,4$

Известные весовые функции для КИХ фильтра с дробной задержкой

Из известных весовых функций наиболее близкими по форме к оптимальной являются три весовые функции: это весовые функции Кайзера, Дольф-Чебышева и Гаусса.

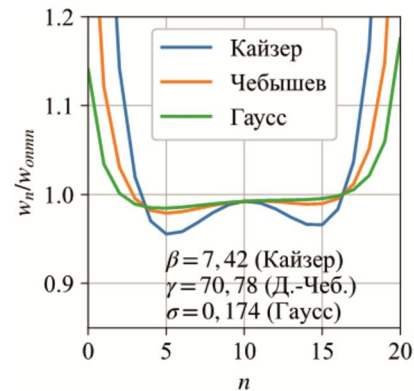


Рис. 2. Отношение разных весовых функций к оптимальной

На рис. 2 приведены графики отношения каждой из трех оконных функций к оптимальной. Указанные значения параметров оконных функций соответствуют минимуму суммы квадратов отклонений выбранного окна от оптимального:

$$err = \sum_{i=0}^{N-1} (w_i - w_{онм i})^2, \quad (9)$$

где err – минимизируемая ошибка, $w_{онм i}$ – коэффициенты оптимального весового окна (8), w_i – коэффициенты одного из выбранных весовых окон.

В работе [4] предлагается использовать окно Ханна для расчета коэффициентов КИХ-фильтра с дробной задержкой. В этой же работе предлагается смещать оконную функцию на величину дробной части задержки, в результате получаем формулу:

$$w_H(n, C, \tau_w) = C + (1 - C) \cos \left(\frac{2\pi}{N} \left(n - \left[\frac{N}{2} \right]_{цц} - \tau_w \right) \right), \quad (10)$$

где $C = 0,5$, $n = 0, 1, \dots, (N-1)$, $[\cdot]_{цц}$ – оператор взятия целой части, τ_w – величина смещения окна, равная дробной части задержки.

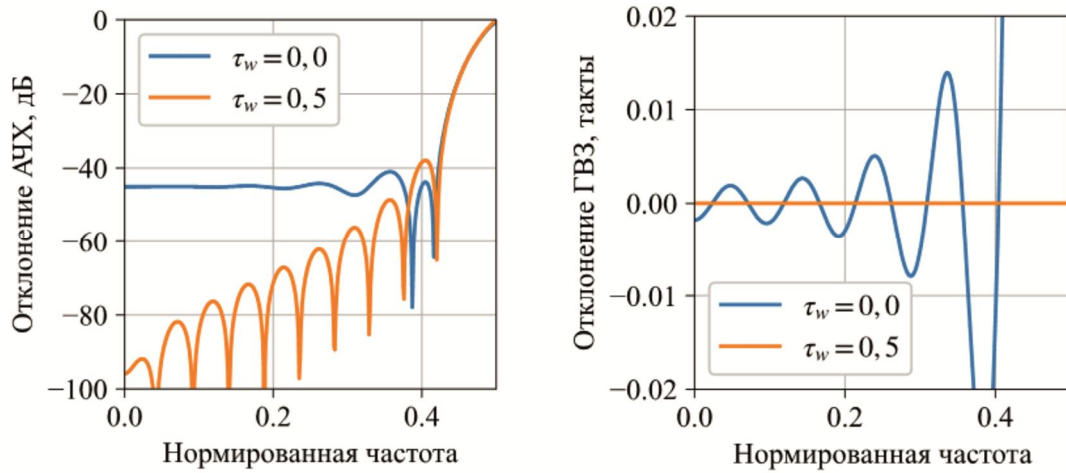


Рис. 3. Ошибка по АЧХ и ГВЗ для рассчитанного КИХ фильтра с использованием смещенного ($\tau_w = 0,5$) и не смещенного ($\tau_w = 0,0$) окна Ханна

На рис. 3 приведена величина ошибки АЧХ и ГВЗ для рассчитанного КИХ-фильтра с дробной задержкой с применением не смещенного ($\tau_w = 0,0$) и смещенного ($\tau_w = 0,5$) окна Ханна. Смещение окна позволяет существенно уменьшить отклонение частотной характеристики полученного КИХ-фильтра от желаемой формы. Также необходимо отметить, что применение окна Ханна (10) с $C = 0,5$ для дробной части задержки $\tau_r = 0,5$ дает идеально ровную ГВЗ с нулевой ошибкой. Для других значений задержки τ_r : и параметра C ГВЗ отклоняется от желаемой формы и ошибка становится ненулевой. Меняя параметр окна C можно уменьшать ошибку по АЧХ, но при этом будет увеличиваться ошибка по ГВЗ, из чего следует, что должно существовать некоторое оптимальное значение параметра C , при котором задержанный в таком фильтре сигнал будет минимально отличаться от реального случая (т.е. получит минимальные частотные искажения).

Получив существенное улучшение характеристик КИХ-фильтра путем простого внесения дробной части задержки в оконную функцию Ханна, были соответствующим образом изменены три другие оконные функции. Приведем формулы для смещенных окон Гаусса, Кайзера и Дольф-Чебышева соответственно:

$$w_G(n, \sigma, \tau_w) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{n-N/2-\tau_w}{(N+1)\sigma} \right)^2}, \quad (11)$$

$$w_K(n, \beta, \tau_w) = \frac{I_0(\beta \sqrt{1-a_n^2})}{I_0(\beta)}, \quad (12)$$

$$a_n = \frac{n-k-\tau_w}{k}, \quad k = \frac{N+1}{2},$$

$$w_{Ch}(n, \gamma, \tau_w) = 10^{\gamma/20} + 2 \sum_{i=0}^m [C_N(\beta \cos(a_i)) \cos(2a_i(n-m-d-\tau_w))], \quad (13)$$

где $n = 1, 2, \dots, N$; $m = N/2 - 1$, $d = 0,5$, если N четно и $m = (N-1)/2$, $d = 0,0$ если N нечетно;

$$\beta = ch(arcch(10^{\gamma/20}) \div (N-1)), \quad a_i = \pi \frac{i+1}{N+1}, \quad C_n(x) -$$

полином Чебышева:

$$C_n(x) = \begin{cases} \cos(n \arccos(x)), & |x| \leq 1, \\ \cosh(n \operatorname{arcch}(x)), & |x| > 1. \end{cases} \quad (14)$$

Для получения наилучших результатов для окна Ханна необходимо брать коэффициенты с индексами с 0 по $N-1$, а в формулах (11)–(13) с индексами 1 по N . Подобный вывод был сделан при сравнении формы окон (11)–(13) с оптимальным окном. Кроме того, действительного коэффициента с нулевым индексом при $\tau_r > 0$ для окна Кайзера не существует, так как подкоренное выражение становится меньше нуля. Введение смещения окна на величину дробной части задержки приводит к сильному уменьшению ошибки по АЧХ для всех окон, кроме окна Дольф-Чебышева (рис. 4). На окно Дольф-Чебышева подобная модификация тоже оказывает положительное влияние, но в меньшей степени.

Сравнение частотных характеристик КИХ фильтров с разными параметрами окон не позволяет понять, какой из фильтров дает наилучшие результаты. В связи с этим была построена модель, описание и результаты работы которой приведены далее.

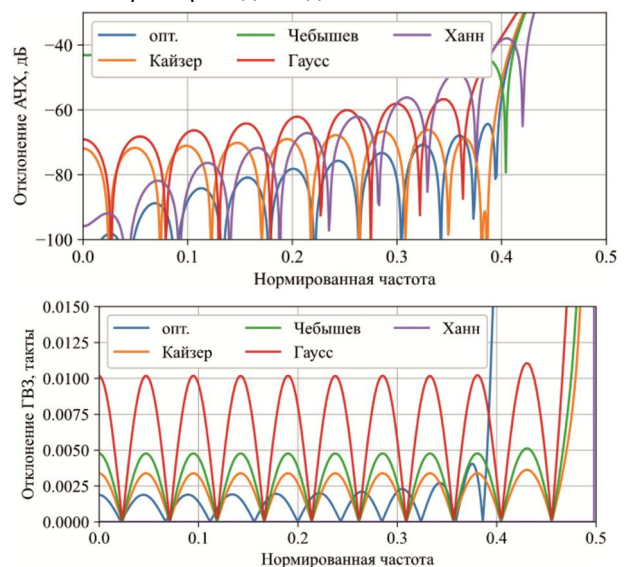


Рис. 4. Ошибка по АЧХ и ГВЗ для рассчитанного КИХ фильтра с дробной задержкой с использованием разных окон

Моделирование

Целью моделирования является определение весовой функции, наилучшим образом воспроизводящей требуемый КИХ-фильтр с дробной задержкой.

Во время моделирования полоса пропускания фильтров задавалась равной $\lambda = 2\pi \cdot 0,4$.

Для выполнения моделирования сформируем сигнал, представляющий собой нормальный белый шум, пропущенный через ограничивающий ФНЧ, созданный на основе КИХ-фильтра со следующими параметрами: 2001 порядок, полоса среза 0,4, окно Кайзера, $\beta = 22$. Такой ФНЧ обладает очень крутым срезом и плоской АЧХ во всей полосе пропускания.

Для получения «эталонного» задержанного сигнала рассчитаем оптимальный КИХ фильтр с дробной задержкой 201 порядка. Отклонение по АЧХ и ГВЗ полученного фильтра и, для сравнения, рассчитанного ранее оптимального фильтра 21 порядка приведены на рис. 5. Как следует из расчетов, полученные АЧХ и ФЧХ для фильтра 201 порядка совпадают с идеальными с погрешностью, не превышающей цену младшего разряда чисел с плавающей точкой с двойной точностью

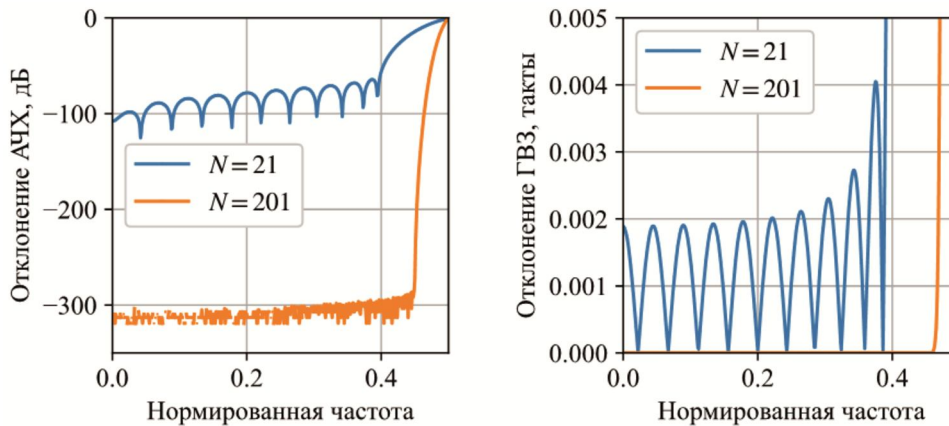


Рис. 5. Отклонение АЧХ (слева) и ГВЗ (справа) от идеальных значений для оптимальных КИХ с порядками 21 и 201



Рис. 6. Структурная схема модели

Таблица 1. Результаты моделирования величины ошибки формирования сигнала для КИХ с дробной задержкой $\tau_r = 0,5$

Вид фильтра	Параметр окна	Величина ошибки, 10^{-3} ед.	
		Несмещенное окно	Смещенное окно на $\tau_w = 0,5$
Оптимальный, 21 порядок	-	-	0,22
Весовое окно Кайзера	7,424	7,14	0,40
	7,400	7,12	0,40
Весовое окно Дольф-Чебышева	70,795	7,32	7,22
	45,500	5,25	5,17
Весовое окно Гаусса	0,174	8,18	2,04
	0,180	7,79	1,99
Весовое окно Ханна	0,500	5,77	1,99
	0,520	5,35	1,48

(8 байт double).

В качестве меры ошибки выбрана сумма квадратов разностей всех выборок эталонного и исследуемого сигналов. Структурная схема модели приведена на рис. 6. Оптимальный КИХ-фильтр 201 порядка формирует эталонный задержанный сигнал, с которым будет сравниваться сигнал исследуемого фильтра. В роли исследуемого фильтра выступали: оптимальный КИХ-фильтра 21 порядка (для получения оценки минимально возможной ошибки), а также четыре КИХ-фильтра, синтезированные с применением описанных выше оконных функций. Так как фильтры разного порядка имеют различную задержку (разница в целое число тактов), то перед вычитанием сигнал нижнего фильтра дополнительно задерживался на необходимое число тактов.

Результаты моделирования сведены в табл. 1. Для каждой модели формировался КИХ-фильтр с дробной задержкой, равной $\tau_r = 0,5$. Для каждой оконной функции моделирование проводилось для четырех сочетаний: с двумя разными параметрами окна и для смещенного и несмещенного окна. Параметр окна из верхних строк был подобран по формуле (9) (кроме окна Ханна, для

него значение параметра C было выбрано в соответствии со статьей [5]), а из нижней строки подобран вручную так, чтобы обеспечить минимум ошибки на выходе модели. Как следует из результатов моделирования, эти величины, как правило, незначительно отличаются. Оценки получены путем усреднения по нескольким десяткам запусков каждой модели, при каждом запуске формировалось 10^6 выборок.

Как видно из результатов, наиболее близкие к оптимальным коэффициенты позволяет получить окно Кайзера со смещением, равным величине дробной задержки. При дробной задержке $\tau_r = 0,5$ ошибка для КИХ с окном Кайзера дает примерно в два раза большую погрешность, чем оптимальный фильтр того же порядка. В качестве альтернативы окну Кайзера можно использовать более простое в вычислительном плане окно Ханна с параметром $C = 0,52$, в этом случае проигрыш по величине ошибки увеличится приблизительно в семь раз.

Заключение

В статье рассмотрены вопросы синтеза КИХ-фильтров с дробной задержкой на основе оконных функций. Приведено описание модели и методика, с помощью которой можно сравнивать результаты синтеза КИХ-фильтров разными методами. Показано, что наиболее близкие к оптимальным коэффициенты позволяет получить смещенное окно Кайзера (12), умноженное на коэффициенты идеального КИХ-фильтра с дробной задержкой (7):

$$h_K(n) = \text{sinc} \left(n - \left[\frac{N}{2} \right]_{\text{цел}} - \tau_r \right) w_K(n+1, \beta, \tau_r), \quad (15)$$

где τ_r – дробная часть задержки τ , выраженная в тактах частоты дискретизации, $\beta = 7,12$ для нормированной полосы пропускания 0,4, $n = 0, 1, \dots, (N-1)$, N – порядок фильтра.

Исследование выполнено в рамках государственного задания ФГАОУ ВО Сибирский федеральный университет (номер FSRZ-2023-0008).

Литература

1. Андреев А.Г., Сенченко А.А. Оптимальный КИХ-фильтр с дробной задержкой. Цифровая обработка сигналов. 2023. № 3. С. 74-77.
2. V. Valimaki, T.I. Laakso. Fractional Delay Filters-Design and Applications. 2001. 10.1007/978-1-4615-1229-5_20.
3. V. Valimaki, T. I. Laakso, «Principles of fractional delay filters», 2000 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Proceedings (Cat. No.00CH37100), 2000, pp. 3870-3873 vol.6, doi: 10.1109/ICASSP.2000.860248.
4. A. Yardim, G. D. Cain, P. Henry. Optimal two-term offset windowing for fractional delay / Electronics letters, Vol 32, No. 6, 1996, p.526-527.
5. G.D. Cain, A. Yardim, P. Henry, Offset windowing for FIR fractional-sample delay/1995 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Detroit, MI, USA, 1995, pp. 1276-1279, vol. 2, doi: 10.1109/ICASSP.1995.480472.
6. The GNU Multiple Precision Arithmetic Library: <https://gmplib.org/>.

НОВЫЕ КНИГИ

Витязев В.В., Волченков В.А., Овинников А.А., Лихобабин Е.А.

Цифровая обработка сигналов: Учебное издание для вузов, М.: Изд-во «Горячая линия-Телеком», 2023 г. 188 с.: ил.

Рекомендовано Научно-методическим советом ФГБОУ ВО «Рязанский государственный Радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина» в качестве учебного пособия для студентов обучающихся по программе высшего образования по направлениям 11.03.01 – «Радиотехника» и 11.03.02 – «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», магистров по 09.04.04 – «Программная инженерия» и специалистов по специальности 12.05.01 – «Электронные и оптико-электронные приборы и системы специального назначения».

Изложены общие принципы цифровой обработки сигналов. Основное внимание уделено проектированию цифровых фильтров в классе КИХ- и БИХ-цепей. Приводятся теоретические сведения, касающиеся характеристик фильтров, приводятся подробные примеры их проектирования и анализа их характеристик. Рассматриваются инструменты моделирования прохождения сигналов через цифровые фильтры в среде SimInTech. Использование среды SimInTech для проектирования цифровых фильтров и моделирования прохож-

дения сигналов через них отличает данное учебное издание от имеющейся учебной литературы в данной области.

Для студентов, обучающихся по направлениям 11.03.01 – «Радиотехника» и 11.03.02 – «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и специальности 12.05.01 – «Электронные и оптико-электронные приборы и системы специального назначения», и магистрантов, обучающихся по направлению 09.04.04 – «Программная инженерия», может представлять интерес для специалистов.

