

## ТЕОРИЯ, МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОГИБАЮЩИХ ДВУМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ФИНИТНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ НА БАЗЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ С ВАРЬИРУЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

*Пономарева Н.В., к.т.н., доцент Севастопольского государственного университета, e-mail: yolkany@gmail.com*

## THEORY, METHODS AND ALGORITHMS FOR DETERMINING ENVELOPES OF TWO-DIMENSIONAL DISCRETE FINITE REAL SIGNALS ON THE BASIS OF FOURIER TRANSFORMS WITH VARYING PARAMETERS

*Ponomareva N.V.*

*The paper considers the theory, methods and algorithms for determining the envelopes of two-dimensional discrete finite real signals. The basics of the theory of two-dimensional discrete Fourier transform with variable parameters are briefly given. A generalization of the discrete Hilbert transform to the case of two-dimensional real signals is made; It is noted that the transition from one-dimensional to two-dimensional Hilbert transform of finite signals is not trivial. In this paper we present the algorithms for determining the envelopes of two-dimensional discrete finite real signals based on the 1) classical two-dimensional discrete Fourier transform, 2) two-dimensional discrete Fourier transform with variable parameters and 3) two-dimensional discrete Hilbert transform are presented. The theoretical results obtained in the article are confirmed by mathematical modeling. It is proved that not taking into account the type of envelope used in digital processing can lead to the loss of information about the properties and states of the investigated objects, phenomena and processes, and to errors.*

**Key words:** two-dimensional discrete Hilbert transform, two-dimensional discrete Fourier transform, two-dimensional discrete Fourier transform with varying parameters, two-dimensional signal envelope.

**Ключевые слова** двумерное дискретное преобразование Гильберта, двумерное дискретное преобразование Фурье, двумерное дискретное преобразование Фурье с варьируемыми параметрами, двумерная огибающая сигнала.

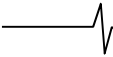
### Введение

Расширение приложений цифровой обработки сигналов (ЦОС), рост сложности задач, решаемых системами ЦОС, приводит к переходу от одномерной Фурье-обработки к двумерным методам и алгоритмам. Отметим, что этот переход далеко не тривиален, поскольку является не только количественным, а, прежде всего, качественным переходом. Сказанное в полной мере относится и к теории, методам и алгоритмам определения огибающих двумерных дискретных финитных действительных (ДФД) сигналов на основе дискретных преобразований Фурье.

Рассмотрим кратко основные методы и алгоритмы цифровой Фурье-обработки двумерных финитных сигналов, а также основные этапы развития теоретических основ этого вида обработки. Теоретические и практические вопросы Фурье-обработки двумерных дискретных финитных комплексных (2D ДФК) и действительных (2D ДФД) сигналов рассмотрены в работах [7-10]. В работе [6] изложены основы теории цифровой обработки 2D ДФК и 2D ДФД сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами. Двумерное дискретное преобразование Фурье (2D ДПФ) с варьируемыми параметрами (2D ДПФ-ВП), предложенное в работе [6], является обобщением классического 2D ДПФ и позволяет путем варьирования пара-

Рассмотрены основные методы и алгоритмы двумерной цифровой Фурье-обработки двумерных финитных сигналов, а также основные этапы развития теоретических основ этого вида обработки. Отмечается не тривиальность перехода от одномерной к двумерной Фурье-обработке финитных сигналов. Поскольку этот переход является в большей степени качественным, а не количественным переходом, рассмотрены теория, методы и алгоритмы определения огибающих двумерных дискретных финитных действительных сигналов на основе двумерных дискретных преобразований Фурье с варьируемыми параметрами. Кратко приведены основы теории двумерных дискретных унитарных преобразований Фурье с варьируемыми параметрами. Данные преобразования являются обобщением классического двумерного дискретного преобразования Фурье и позволяют путем варьирования параметров «управлять» свойствами преобразований Фурье. Приведены аксиоматические положения двумерной Фурье-обработке финитных сигналов. Рассмотрены алгоритмы вычисления классического двумерного дискретного преобразования Фурье и двумерных дискретных преобразований Фурье с варьируемыми параметрами, основанные на сепарабельности ядер этих преобразований. Дано обобщение дискретного преобразования Гильберта дискретных финитных действительных сигналов на двумерный случай. Отмечена нетривиальность такого обобщения, поскольку переход от одномерного к двумерному дискретному преобразованию Гильберта также является, прежде всего, не количественным, а качественным переходом. Даны алгоритмы определения огибающих двумерных дискретных финитных действительных сигналов на основе классического двумерного дискретного преобразования Фурье и двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами. Теоретические результаты, полученные в статье, подтверждены математическим моделированием. Доказано, что не принятие во внимание при цифровой Фурье-обработке вида используемой огибающей, может приводить к потере информации о свойствах и состояниях исследуемых объектов, явлений и процессов, а также досадным ошибкам.

метров «управлять» свойствами 2D ДПФ-ВП.



Анализ теории 2D Фурье-обработки 2D ДФК и 2D ДФД сигналов показал, что она (теория) базируется на следующих аксиоматических положениях [2, 5-6, 15-18]:

Определение 2D ДФК и 2D ДФД сигналов на конечной двумерной опорной области  $SA_{N_1 \times N_2}$ , которая трактуется как двумерный фундаментальный период  $SA_{N_1 \times N_2}$  (2D период)<sup>1</sup>. 2D период, в свою очередь, определяется горизонтальным и вертикальным периодами.

Определение сдвига двумерного дискретного сигнала в виде циклического сдвига, осуществляемого путем циклических перестановок его отсчетов на конечной двумерной опорной области  $SA_{N_1 \times N_2}$ .

Определение полной 2D базисной системы, состоящей из двумерных дискретных экспоненциальных функций (2D базисной системы 2D ДЭФ):

$$\begin{aligned} \text{def}_{N_1, N_2}(k_1, n_1, k_2, n_2) &= W_{N_1}^{k_1 n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 n_2} = \\ &= \left( \cos \frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1 - j \sin \frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1 \right) \times \\ &\left( \cos \frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2 - j \sin \frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2 \right) = \\ &= \cos \left( \frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1 + \frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2 \right) - j \sin \left( \frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1 + \frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2 \right); \end{aligned} \quad (1)$$

где  $W_{N_1}^{k_1 n_1} = \exp \left( -j \frac{2\pi}{N_1} k_1 n_1 \right)$ ;  $W_{N_2}^{k_2 n_2} = \exp \left( -j \frac{2\pi}{N_2} k_2 n_2 \right)$ ;

$k_1, k_2$  – пространственные частоты,  $n_1 = \overline{0, N_1 - 1}$ ,  $n_2 = \overline{0, N_2 - 1}$ ;  $k_1 = \overline{0, (N_1 - 1)}$ ,  $k_2 = \overline{0, (N_2 - 1)}$ .

В работах [5-6, 15, 19-27] на основе проведенного системного анализа свойств унитарного преобразования<sup>2</sup> 2D ДПФ – теоретической основы Фурье-обработки 2D ДФК и 2D ДФД сигналов, эффективность и результативность которого доказана временем, сделаны следующие важные выводы:

2D ДПФ можно интерпретировать как двумерный дискретный ряд Фурье, свойства которого во многом определяют свойства 2D ДПФ.

Свойства 2D ДПФ математически точны и не могут рассматриваться как аппроксимация свойств непрерывного преобразования Фурье (НПФ).

Ядра преобразования 2D ДПФ симметричны и разделимы (сепарабельны);

2D ДПФ может быть реализовано быстрыми алгоритмами.

Оценки, получаемые помощью 2D ДПФ, структурно устойчивы (робастны).

2D ДПФ в алгебраической форме задается следующим соотношением:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_1}^{k_1 n_1} \cdot W_{N_2}^{k_2 n_2}; \quad (2)$$

где  $k_1 = \overline{0, (N_1 - 1)}$ ,  $k_2 = \overline{0, (N_2 - 1)}$  – пространственные

частоты;  $x(n_1, n_2)$  – 2D ДФК или 2D ДФД сигнал,  $n_1 = \overline{0, N_1 - 1}$ ,  $n_2 = \overline{0, N_2 - 1}$ ;  $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2)$  – коэффициенты (бины) 2D ДПФ (векторный 2D пространственно-частотный спектр 2D ДФК или 2D ДФД сигнала  $x(n_1, n_2)$ ).

Учитывая свойство сепарабельности ядер 2D ДПФ, алгебраическая форма 2D ДПФ может быть представлена в виде:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2) = \frac{1}{N_1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{k_1 n_1} \left[ \frac{1}{N_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_2}^{k_2 n_2} \right]; \quad (3)$$

или в виде:

$$S_{N_1, N_2}(k_1, k_2) = \frac{1}{N_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_2}^{k_2 n_2} \left[ \frac{1}{N_1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_1, n_2) W_{N_1}^{k_1 n_1} \right]. \quad (4)$$

С математической точки зрения 2D ДФК или 2D ДФД сигнал  $x(n_1, n_2)$  – это двумерная последовательность конечной длины, являющаяся множеством комплексных или действительных чисел, определенных для упорядоченных пар целых чисел  $n_1$  и  $n_2$ , при  $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$ ;  $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$  [7]. 2D ДФК и 2D ДФД сигнал  $x(n_1, n_2)$  на прямоугольной пространственной опорной плоскости  $SA_{N_1 \times N_2}$ , при  $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$  и  $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$ , может быть представлен в виде матрицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{N_1 \times N_2} &= \\ &= \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N_2 - 1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} x(0,0) & x(0,1) & \dots & x(0, N_2 - 1) \\ x(1,0) & x(1,1) & \dots & x(1, N_2 - 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(N_1 - 1, 0) & x(N_1 - 1, 1) & \dots & x(N_1 - 1, N_2 - 1) \end{bmatrix} \end{matrix} \end{aligned} \quad (5)$$

С учетом свойства сепарабельности ядер 2D ДПФ возможна матричная форма 2D ДПФ [6, 15-16]:

$$\mathbf{S}_{N_1 \times N_2} = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \mathbf{F}_{N_1 \times N_1}^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{N_1 \times N_2} \cdot \mathbf{F}_{N_2 \times N_2}^{(1)}; \quad (6)$$

где  $\mathbf{S}_{N_1, N_2}$  – двумерный векторный пространственно-частотный спектр на опорной плоскости  $SA_{N_1 \times N_2}$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{N_1 \times N_2} &= \\ &= \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N_2 - 1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} S(0,0) & S(0,1) & \dots & S(0, N_2 - 1) \\ S(1,0) & S(1,1) & \dots & S(1, N_2 - 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S(N_1 - 1, 0) & S(N_1 - 1, 1) & \dots & S(N_1 - 1, N_2 - 1) \end{bmatrix} \end{matrix} \end{aligned} \quad (7)$$

<sup>1</sup> **Опорная область**  $SA_{N_1 \times N_2}$  (2D период) – это диапазон значений переменных  $n_1$  и  $n_2$ , для которого двумерная последовательность  $x(n_1, n_2)$  отлична от нуля. Более подробно понятие опорной области будет рассмотрено далее.

<sup>2</sup> **Линейное преобразование является унитарным преобразованием** – если его оператор обратим, а его ядро удовлетворяет условиям ортогональности.

$$\mathbf{F}_{N_2 \times N_2}^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N_2 - 1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (N_2 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_2}^{0 \cdot 0} & W_{N_2}^{0 \cdot 1} & \dots & W_{N_2}^{0 \cdot (N_2 - 1)} \\ W_{N_2}^{1 \cdot 0} & W_{N_2}^{1 \cdot 1} & \dots & W_{N_2}^{1 \cdot (N_2 - 1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot 0} & W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot 1} & \dots & W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot (N_2 - 1)} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot k_2 \quad (8)$$

$$\mathbf{F}_{N_1 \times N_1}^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N_1 - 1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_1}^{0 \cdot 0} & W_{N_1}^{0 \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{0 \cdot (N_1 - 1)} \\ W_{N_1}^{1 \cdot 0} & W_{N_1}^{1 \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{1 \cdot (N_1 - 1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N_1}^{(N_1 - 1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(N_1 - 1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(N_1 - 1) \cdot (N_1 - 1)} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot n_1 \quad (9)$$

Как и в случае алгебраической формы 2D ДПФ (3, 4), возможны два варианта выполнения действий в соотношении (6):

$$\mathbf{S}_{N_1 \times N_2} = \frac{1}{N_1} \mathbf{F}_{N_1 \times N_1}^{(2)} \cdot \frac{1}{N_2} [\mathbf{X}_{N_1 \times N_2} \cdot \mathbf{F}_{N_2 \times N_2}^{(1)}]; \quad (10)$$

или

$$\mathbf{S}_{N_1 \times N_2} = \left[ \frac{1}{N_1} \mathbf{F}_{N_1 \times N_1}^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{N_1 \times N_2} \right] \cdot \frac{1}{N_2} \mathbf{F}_{N_2 \times N_2}^{(1)}. \quad (11)$$

**Замечание 1.** Как известно 2D ДПФ связывает между собой две области: пространственную область и пространственно-частотную область. Для 2D ДПФ существует взаимосвязь результатов операций периодизации и дискретизации сигналов, проводимых в той или иной области. Процесс периодизации 2D сигнала в одной области приводит к дискретизации 2D спектра в другой области. И наоборот, процесс дискретизации 2D спектра в одной области приводит к периодизации 2D сигнала в другой области. Таким образом, 2D ДПФ периодически и дискретно как в пространственной области, так и пространственно – частотной области.

**Задача данной работы** – обобщение дискретного преобразования Гильберта финитных действительных сигналов на двумерный случай, разработка теории, методов и алгоритмов определения огибающих двумерных дискретных финитных действительных сигналов на базе преобразований Фурье с варьируемыми параметрами, проведение математического моделирования с целью подтверждения полученных в работе теоретических результатов.

### Двумерное дискретное преобразование Фурье с варьируемыми параметрами

Двумерное дискретное преобразование Фурье (2D ДПФ) с варьируемыми параметрами (2D ДПФ-ВП), предложенное в работе [6], является обобщением классического 2D ДПФ и позволяет путем варьирования параметров «управлять» свойствами 2D ДПФ-ВП. Базисная система 2D ДПФ-ВП состоит из двумерных дискрет-

ных экспоненциальных функций с варьируемыми параметрами (2D ДЭФ-ВП):

$$\text{def}_{N_1, N_2}(k_1, n_1, \theta_1, k_2, n_2, \theta_2) = W_{N_1}^{(k_1 + \theta_1)n_1} \times W_{N_2}^{(k_2 + \theta_2)n_2} = \quad (12)$$

$$= \times \left( \cos \frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1)n_1 - j \sin \frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1)n_1 \right) \times$$

$$= \left( \cos \frac{2\pi}{N_2} (k_2 + \theta_2)n_2 - j \sin \frac{2\pi}{N_2} (k_2 + \theta_2)n_2 \right) =$$

$$= \cos \left( \frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1)n_1 + \frac{2\pi}{N_2} (k_2 + \theta_2)n_2 \right) -$$

$$- j \sin \left( \frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1)n_1 + \frac{2\pi}{N_2} (k_2 + \theta_2)n_2 \right);$$

$$\text{где } W_{N_1}^{(k_1 + \theta_1)n_1} = \exp \left( -j \frac{2\pi}{N_1} (k_1 + \theta_1)n_1 \right); \quad W_{N_2}^{(k_2 + \theta_2)n_2} =$$

$$= \exp \left( -j \frac{2\pi}{N_2} (k_2 + \theta_2)n_2 \right);$$

$k_1, k_2$  – пространственные частоты,  $n_1 = \overline{0, N_1 - 1}$ ,  $n_2 = \overline{0, N_2 - 1}$ ;  $k_1 = \overline{0, (N_1 - 1)}$ ,  $k_2 = \overline{0, (N_2 - 1)}$ ;  $\theta_1, \theta_2$  – варьируемые параметры.

2D ДПФ-ВП в алгебраической форме задается следующим соотношением:

$$\mathbf{S}_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_1}^{(k_1 + \theta_1)n_1} \cdot W_{N_2}^{(k_2 + \theta_2)n_2}. \quad (13)$$

Учитывая свойство сепарабельности ядер 2D ДПФ-ВП, алгебраическая форма 2D ДПФ-ВП может быть представлена в виде:

$$\mathbf{S}_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N_1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} W_{N_1}^{(k_1 + \theta_1)n_1} \left[ \frac{1}{N_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) W_{N_2}^{(k_2 + \theta_2)n_2} \right], \quad (14)$$

или в виде:

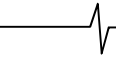
$$\mathbf{S}_{N_1, N_2}(k_1, k_2, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{N_2} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} W_{N_2}^{(k_2 + \theta_2)n_2} \left[ \frac{1}{N_1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_1, n_2) W_{N_1}^{(k_1 + \theta_1)n_1} \right]. \quad (15)$$

Отметим, что значения параметров  $\theta_1 = 0$  и  $\theta_2 = 0$  2D ДПФ-ВП переходит в классическое 2D ДПФ.

С учетом свойства сепарабельности ядер 2D ДПФ-ВП матричная форма 2D ДПФ-ВП может быть представлена в виде:

$$\mathbf{S}_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2} = \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \mathbf{F}_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{N_1 \times N_2} \cdot \mathbf{F}_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)}; \text{ где } \quad (16)$$

$$\mathbf{F}_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N_1 - 1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (N_1 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_1}^{(0 + \theta_1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(0 + \theta_1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(0 + \theta_1) \cdot (N_1 - 1)} \\ W_{N_1}^{(1 + \theta_1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(1 + \theta_1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(1 + \theta_1) \cdot (N_1 - 1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N_1}^{(N_1 - 1 + \theta_1) \cdot 0} & W_{N_1}^{(N_1 - 1 + \theta_1) \cdot 1} & \dots & W_{N_1}^{(N_1 - 1 + \theta_1) \cdot (N_1 - 1)} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot n_1$$



$$\mathbf{F}_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)} =$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & (N_2 - 1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ (N_2 - 1) \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_{N_2}^{0 \cdot (0 + \theta_2)} & W_{N_2}^{0 \cdot (1 + \theta_2)} & \dots & W_{N_2}^{0 \cdot (N_2 - 1 + \theta_2)} \\ W_{N_2}^{1 \cdot (0 + \theta_2)} & W_{N_2}^{1 \cdot (1 + \theta_2)} & \dots & W_{N_2}^{1 \cdot (N_2 - 1 + \theta_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot (0 + \theta_2)} & W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot (1 + \theta_2)} & \dots & W_{N_2}^{(N_2 - 1) \cdot (N_2 - 1 + \theta_2)} \end{bmatrix} \end{matrix} \cdot k_2$$

Аналогично выражениям (14) и (15) возможны две последовательности выполнения соответствующих матричных умножений:

$$\mathbf{S}_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2} = \frac{1}{N_1} \mathbf{F}_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} \cdot \frac{1}{N_2} [\mathbf{X}_{N_1 \times N_2} \cdot \mathbf{F}_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)}]; \quad (17)$$

или

$$\mathbf{S}_{N_1 \times N_2, \theta_1, \theta_2} = \left[ \frac{1}{N_1} \mathbf{F}_{N_1 \times N_1, \theta_1}^{(2)} \cdot \mathbf{X}_{N_1 \times N_2} \right] \cdot \frac{1}{N_2} \mathbf{F}_{N_2 \times N_2, \theta_2}^{(1)}. \quad (18)$$

### Двумерное дискретное преобразование Гильберта двумерных дискретных финитных действительных сигналов

Существует два равноправных вида временного описания одномерных дискретных финитных действительных сигналов (1D ДФД сигналов) [1, 2, 11, 12, 13]:

– описание 1D ДФД сигналов посредством мгновенных параметров:

$$x(n) = A(n) \cdot \cos[\Phi(n)]; \quad (19)$$

где  $A(n)$  – мгновенная амплитуда дискретного сигнала  $x(n)$ ;  $\Phi(n)$  – полная фаза дискретного сигнала  $x(n)$ .

– описание 1D ДФД сигналов посредством спектральных составляющих сигнала<sup>3</sup>:

$$x(n) = \sum_m A_m \cos(2\pi f_m n + \phi_m); \quad (20)$$

где  $A_m$  – амплитуда  $m$  гармонической компоненты сигнала  $x(n)$ ;  $f_m$  – частота  $m$  гармонической компоненты сигнала  $x(n)$ ;  $\phi_m$  – начальная фаза  $m$  гармонической компоненты сигнала  $x(n)$ .

Представление 1D ДФД сигнала в виде некоторого комплексного сигнала:

$$y(n) = x(n) + jx_{\mathfrak{H}}(n); \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (21)$$

(если определить некоторый оператор  $\mathfrak{H}$ , преобразующий  $x(n)$  в  $x_{\mathfrak{H}}(n)$ ), позволяет однозначно определить мгновенную амплитуду  $A(n)$  (огibaющую) и мгновенную фазу  $\Phi(n)$  сигнала (21) согласно соотношений:

$$A(n) = \sqrt{x^2(n) + x_{\mathfrak{H}}^2(n)}; \quad \Phi(n) = \arctg\left(\frac{x_{\mathfrak{H}}(n)}{x(n)}\right). \quad (22)$$

Однако, чтобы теория, созданная на основе пред-

ставлении сигнала в виде (21) допускала понятную физическую интерпретацию, оператор  $\mathfrak{H}$ <sup>4</sup> должен соответствовать определенным требованиям.

В работах [2, 11, 12, 13] доказано, что единственным линейным оператором, удовлетворяющим перечисленным в сноске 4 основным требованиям (а также ряду других [13]), является оператор Гильберта  $\mathfrak{H}$ . Выражение (21) и (22), в случае применения оператора Гильберта, преобразуется к виду:

$$y_{AC}(n) = x(n) + jx_{\mathfrak{H}}(n); \quad n = \overline{0, N-1}; \quad (23)$$

$$A(n) = \sqrt{x^2(n) + x_{\mathfrak{H}}^2(n)}; \quad \Phi(n) = \arctg\left(\frac{x_{\mathfrak{H}}(n)}{x(n)}\right); \quad (24)$$

где соотношение (23) задает одномерный дискретный аналитический (гильбертовский) сигнал<sup>5</sup>, а соотношение (24) задает гильбертовскую огibaющую –  $A(n)$ .

Отметим существенный недостаток преобразования Гильберта. Данное преобразование является лишь асимптотически локальным преобразованием.

Теоретические и практические вопросы одномерного дискретного преобразования Гильберта<sup>6</sup> (1D ДПГ) одномерных дискретных финитных действительных сигналов (1D ДФД сигналов) достаточно подробно рассмотрены в работах [2-5, 11-14]. Поэтому на вопросах 1D ДПГ будем останавливаться лишь по мере необходимости.

Рассмотрим обобщение одномерного ДПГ на двумерный случай. Заметим, что переход от 1D ДПГ к двумерному дискретному преобразованию Гильберта (2D ДПГ) не тривиален, поскольку является не только количественным, а, прежде всего, качественным переходом. 2D ДПГ позволяет сформировать из 2D ДФД  $x(n_1, n_2)$ ,

$n_1 = \overline{0, N_1 - 1}$ ,  $n_2 = \overline{0, N_2 - 1}$ , новый 2D ДФД сигнал  $x_{\mathfrak{H}}(n_1, n_2)$ ,  $n_1 = \overline{0, N_1 - 1}$ ,  $n_2 = \overline{0, N_2 - 1}$ . 2D Фурье-спектр сигнала  $x_{\mathfrak{H}}(n_1, n_2)$  сдвинут по фазе относительно 2D Фурье-спектра сигнала  $x(n_1, n_2)$  на  $\pi/2$  (на 90°) на отрицательных двумерных частотах. 2D Фурье-спектр сигнала  $x_{\mathfrak{H}}(n_1, n_2)$  сдвинут по фазе относительно 2D Фурье-спектра сигнала  $x(n_1, n_2)$  на  $-\pi/2$  (на  $-90^\circ$ ) на положительных двумерных частотах.

2D ДФК сигнал  $y_{AC}(n_1, n_2)$ , является двумерным дискретным аналитическим (2D ДА (гильбертовским))

<sup>4</sup> Основные требования к оператору  $\mathfrak{H}$ : малые изменения сигнала  $x(n)$  должны приводить к малым изменениям мгновенных параметров; мгновенная фаза и мгновенная частота сигнала  $x(n)$  не должны изменяться при изменении мощности сигнала  $x(n)$  при неизменной его форме; параметры гармонического сигнала должны соответствовать их классическим определениям.

<sup>5</sup> В отечественной литературе некоторые авторы совершенно справедливо предпочитают называть аналитический сигнал (15) «гильбертовским сигналом» (см., например, работы [13, 18]). Действительно, аналитический комплексный сигнал вовсе не обязательно должен быть гильбертовским [18]. Для того, чтобы ДФК сигнал (15) являлся гильбертовским необходимо и достаточно, чтобы его спектр Фурье был равен нулю на отрицательных частотах.

<sup>6</sup> Давид Гильберт – великий немецкий математик (1862 – 1943), в честь которого названо это преобразование.

<sup>3</sup> В работе [13] справедливо утверждается, что вплоть до середины 30-х годов прошлого столетия теория радиосвязи развивалась (как это не покажется удивительным) без использования спектральных представлений сигналов.

сигналом и определяется следующим соотношением:

$$y_{AC}(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) + jx_3(n_1, n_2); \quad n_1 = \overline{0, N_1 - 1}, \\ n_2 = \overline{0, N_2 - 1}. \quad (25)$$

Обобщение выражений (24) на 2D ДФД сигналы определяется соотношениями:

$$A(n_1, n_2) = \sqrt{x^2(n_1, n_2) + x_3^2(n_1, n_2)}; \\ \Phi(n_1, n_2) = \arctg\left(\frac{x(n_1, n_2)}{x_3(n_1, n_2)}\right). \quad (26)$$

где  $A(n_1, n_2)$  – огибающая 2D ДФД сигнала  $x(n_1, n_2)$ ;  $\Phi(n_1, n_2)$  – мгновенная фаза сигнала  $x(n_1, n_2)$ .

Отметим, что переход в ЦОС от 2D ДФД сигналов к 2D гильбертовским (аналитическим) сигналам, повышает как эффективность, так и результативность многих операций двумерной Фурье-обработки 2D ДФД сигналов.

2D Фурье-спектр 2D ДА сигнала  $y_{AC}(n_1, n_2)$  равен нулю на отрицательных двумерных пространственных частотах. Рассмотрим пример иллюстрирующий это свойство 2D Фурье-спектр 2D ДА сигнала  $y_{AC}(n_1, n_2)$ . В качестве 2D ДФД сигнала выберем 2D действительную косинусоиду:

$$x(n_1, n_2) = \cos\left(\frac{2\pi}{N_1}k_1n_1 + \frac{2\pi}{N_2}k_2n_2\right), \quad n_1 = \overline{0, N_1 - 1}, \\ n_2 = \overline{0, N_2 - 1}. \quad (27)$$

с параметрами:  $k_1 = 2$ ;  $k_2 = 3$ ;  $N_1 = 8$ ;  $N_2 = 8$ .

Согласно определению 2D ДПГ 2D ДФД сигнал  $x_3(n_1, n_2)$  представляет собой действительную синусоиду:

$$x_3(n_1, n_2) = \sin\left(\frac{2\pi}{N_1}k_1n_1 + \frac{2\pi}{N_2}k_2n_2\right), \quad n_1 = \overline{0, N_1 - 1}, \\ n_2 = \overline{0, N_2 - 1}. \quad (28)$$

с параметрами:  $k_1 = 2$ ;  $k_2 = 3$ ;  $N_1 = 8$ ;  $N_2 = 8$ .

В силу того, что 2D ДФД сигнал (27) является четной функцией:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{N_1}k_1(-n_1) + \frac{2\pi}{N_2}k_2(-n_2)\right) = \\ \cos\left(\frac{2\pi}{N_1}k_1n_1 + \frac{2\pi}{N_2}k_2n_2\right); \quad (29)$$

а 2D ДФД сигнал (28) – нечетной функцией:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{N_1}k_1(-n_1) + \frac{2\pi}{N_2}k_2(-n_2)\right) = \\ = -\sin\left(\frac{2\pi}{N_1}k_1n_1 + \frac{2\pi}{N_2}k_2n_2\right); \quad (30)$$

то их 2D спектры Фурье имеют соответственно чисто действительный и чисто мнимый характер.

Таким образом, 2D спектр Фурье  $S_{N_1 \times N_2, 0, 0}$  двумерного аналитического сигнала  $y_{AC}(n_1, n_2)$ :

$$y_{AC}(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) + jx_3(n_1, n_2) = \\ = \cos\left(\frac{2\pi}{N_1}k_1n_1 + \frac{2\pi}{N_2}k_2n_2\right) + \\ + j\sin\left(\frac{2\pi}{N_1}k_1n_1 + \frac{2\pi}{N_2}k_2n_2\right); \quad (31)$$

где  $k_1 = 2$ ;  $k_2 = 3$ ;  $N_1 = 8$ ;  $N_2 = 8$ ;

на положительной двумерной частоте  $(k_1, k_2) = (2, 3)$  действителен и равен единице, а на других положительных и отрицательных двумерных частотах равен нулю (рис. 1).

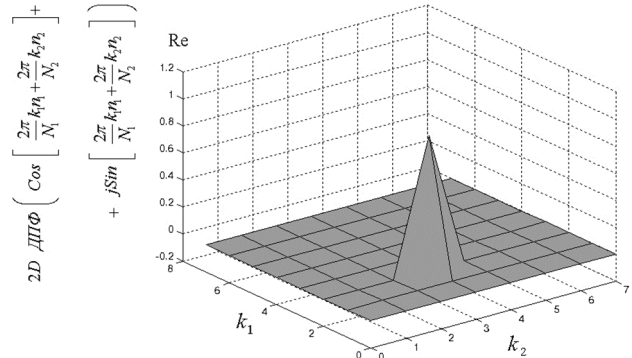


Рис. 1. Двумерный спектр Фурье аналитического сигнала (27)

На рис. 2 приведен 2D ДФД сигнал  $x(n_1, n_2) = \cos\left(\frac{2\pi}{N_1}k_1n_1 + \frac{2\pi}{N_2}k_2n_2\right)$ ,  $n_1 = \overline{0, N_1 - 1}$ ,  $n_2 = \overline{0, N_2 - 1}$  с параметрами:  $k_1 = 2$ ;  $k_2 = 3$ ;  $N_1 = 64$ ;  $N_2 = 32$  и его огибающая

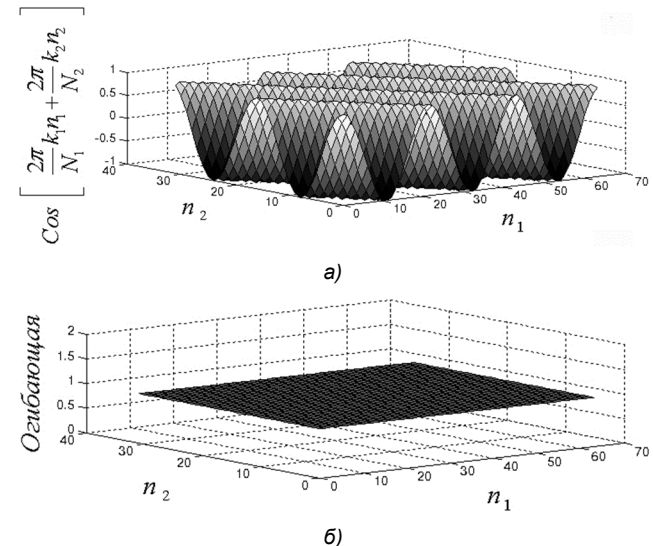


Рис. 2. Двумерный дискретный финитный сигнал – а; его огибающая – б

**Теория, методы и алгоритмы определения огибающих двумерных дискретных финитных действительных сигналов на базе дискретных преобразований Фурье с варьируемыми параметрами**

Коэффициенты (бины) 2D ДПФ 2D ДФД сигналов  $S_{N_1, N_2}(k_1, k_2)$  (2) обладают свойством комплексной со-

пряженности (эрмитовой симметрии). Если изобразить комплексно-сопряженную симметрию комплексных чисел условно в виде стрелок, то комплексно-сопряженная симметрия бинов векторного 2D пространственно-частотного спектра 2D ДФД сигнала  $x(n_1, n_2)$  (табл. 5) может быть представлена в общем виде рис. 3.

$S_{N_1 N_2}(0, 0)$	←	$S_{N_1 N_2}(0, N_2/2)$	→
↑	↖	↑	↗
$S_{N_1 N_2}(N_1/2, 0)$	←	$S_{N_1 N_2}(N_1/2, N_2/2)$	→
↓	↖	↓	↗

Рис. 3. Комплексно-сопряженная симметрия (эрмитова симметрия) бинов 2D ДПФ 2D ДФД сигналов

2D ДФД сигналы, в случае применения 2D ДПФ, обладают еще одним свойством. Периодическое продолжение 2D ДФД сигнала в пространственной области остается действительным сигналом. Напомним, что 2D ДПФ-ВП (14, 15, 16) при значениях параметров  $\theta_1 = 0$  и  $\theta_2 = 0$  тождественно классическому 2D ДПФ.

Коэффициенты (бины) 2D ДПФ-ВП при значениях параметров  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/2$  2D ДФД сигналов также обладают свойством комплексной сопряженности (эрмитовой симметрии). Комплексно-сопряженная симметрия бинов 2D ДПФ-ВП при значениях параметров  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/2$  2D ДФД сигнала  $x(n_1, n_2)$  (таблица 5), представлена в общем виде рис. 4.

	0	$\frac{N_2}{2}$	$N_2$
0	A ↖	B ↗	
$\frac{N_1}{2}$	C ↖	D ↗	
$N_1$			

Рис. 4. Эрмитова симметрия коэффициентов двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами  $S_{N_1 \times N_2, 1/2, 1/2}^{k_1, k_2}$

2D ДФД сигналы, в случае применения 2D ДПФ-ВП при значениях параметров  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/2$ , обладают, как и в случае применения 2D ДПФ, следующим свойством. Периодическое продолжение 2D ДФД сигнала в пространственной области является действительным сигналом.

Существует два основных подхода к формированию одномерного преобразования Гильберта: цифровая

фильтрация (осуществляемая БИХ-фильтрами<sup>7</sup> и КИХ-фильтрами<sup>8</sup>) и спектральный анализ на основе ДПФ.

Анализ достоинств и недостатков определения огибающих 1D ДФД сигналов на базе цифровой фильтрации достаточно подробно дан в работах [4, 5, 14, 17, 29-31]. Поэтому на данных методах формирования 1D ДПГ подобно останавливаться не будем. Отметим лишь основной вывод из указанного выше анализа. При решении задачи формирования 1D ДПГ эффективность и результативность методов цифровой фильтрации, как правило, ниже методов спектрального анализа на основе ДПФ.

Идея определения огибающих 2D ДФД на базе 2D ДПФ или на базе 2D ДПФ-П при значении параметров  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/2$  может показаться простой. Но следует подчеркнуть, что это может показаться только после того, как на нее (на идею) указали.

Идея определения огибающих 2D ДФД сигналов на базе 2D ДПФ или на базе 2D ДПФ-ВП при значении параметров  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/2$  заключается в следующем.

2D ДПФ и 2D ДПФ-ВП при значении параметров  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/2$  2D ДФД сигналов обладают эрмитовой симметрией (рис. 3, рис. 4). Обнуляя соответствующие пространственно-частотные спектры на отрицательных пространственных частотах, мы получаем пространственно-частотные спектры соответствующих 2D ДА сигналов (25). Реализуя обратное 2D ДПФ или обратное 2D ДПФ-ВП при значении параметров  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/2$  соответствующих спектров 2D ДА сигналов, мы получаем соответствующие 2D ДА сигналы (25) в пространственной области. На действительной части соответствующего 2D ДА сигнала –  $y_{AC}(n_1, n_2)$  получим соответствующий исходный 2D ДФД сигнал –  $x(n_1, n_2)$ , а на мнимой части соответствующего 2D ДА сигнала –  $y_{AC}(n_1, n_2)$ , соответствующий сигнал 2D ДПГ –  $x_3(n_1, n_2)$  (25). И наконец, согласно выражению (26), вычисляем  $A(n_1, n_2)$  – огибающую 2D ДФД сигнала  $x(n_1, n_2)$  в соответствующем базисе: 2D ДЭФ или 2D ДЭФ-ВП.

На рис. 5 и 6 приведены алгоритмы определения 2D ДА сигналов на основе 2D ДПФ и 2D ДПФ-ВП соответственно.

Алгоритмами определения ДПГ на основе 2D ДПФ или 2D ДПФ-ВП при значении параметров  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/2$ , возможно получение различных видов гильбертовских (аналитических) сигналов (см. сноску 4). Выбор двумерного дискретного преобразования Фурье (классического или с варьируемыми параметрами) позволяет генерировать, по крайней мере, два вида двумерных гильбертовских (аналитических) сигналов.

<sup>7</sup> БИХ-фильтр – цифровой фильтр с импульсной характеристикой бесконечной длины.

<sup>8</sup> КИХ-фильтр – цифровой фильтр с импульсной характеристикой конечной длины.

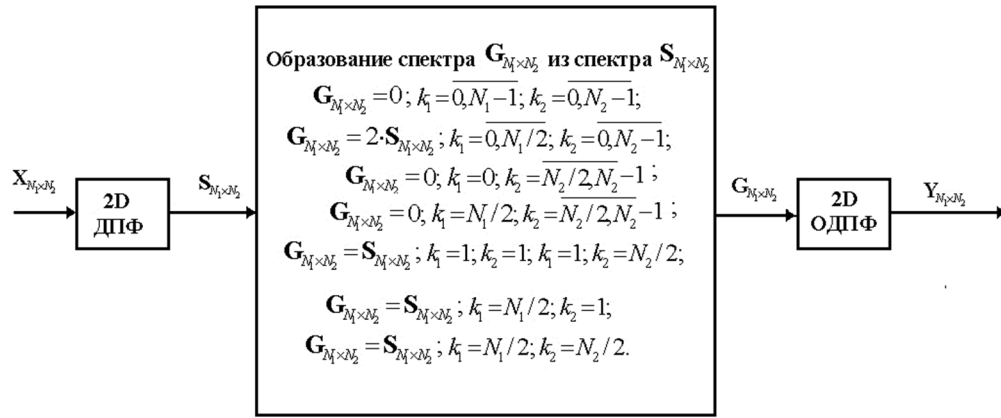
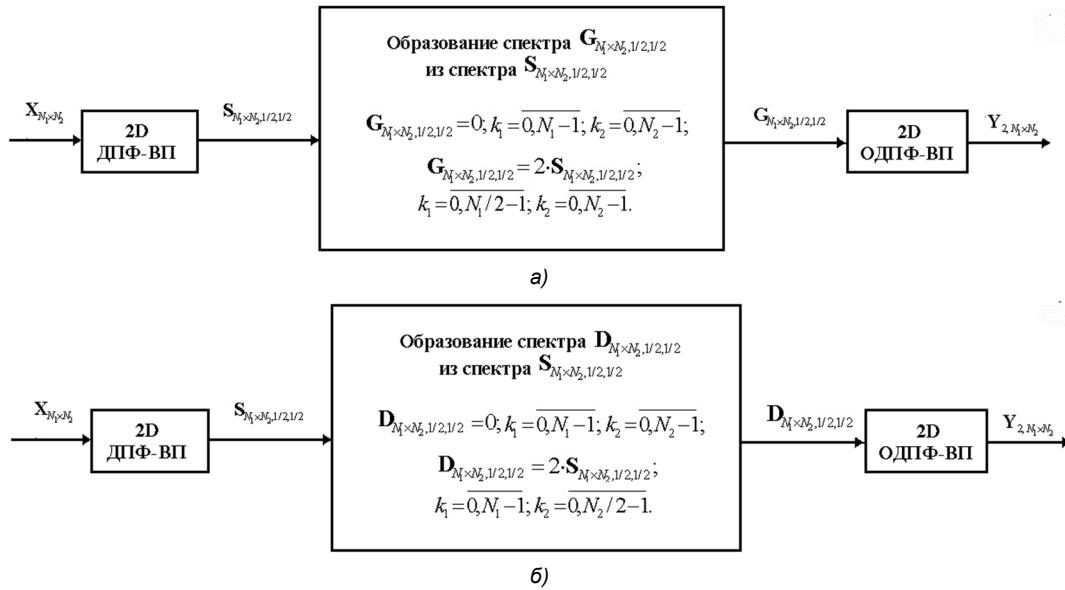


Рис. 5. Алгоритм определения двумерного дискретного аналитического сигнала на основе 2D ДПФ

Рис. 6. Два алгоритма определения двумерного дискретного аналитического сигнала на основе 2D ДПФ-ВП при значениях параметров  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/2$ **Вид 1 двумерного дискретного гильбертовского сигнала.**

Двумерный дискретный гильбертовский сигнал (2D ДГС) первого вида получается алгоритмом определения 2D ДПГ области на основе 2D ДПФ:

$$x_{ГС, 2D ДПФ}(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) + jx_{\Sigma, 2D ДПФ}(n_1, n_2); \quad (32)$$

где  $x_{ГС, 2D ДПФ}(n_1, n_2)$  – 2D ДГС, полученный алгоритмом определения ДПГ в пространственно-частотной области на основе 2D ДПФ;  $x_{\Sigma, 2D ДПФ}(n_1, n_2)$  – новый 2D ДФД сигнал (2D ДПГ сигнала  $x(n_1, n_2)$ ), Фурье-спектр которого сдвинут по фазе относительно Фурье-спектра  $x(n_1, n_2)$  на  $\pi/2$ .

**Вид 2 двумерного дискретного гильбертовского сигнала.**

Двумерный дискретный гильбертовский сигнал (2D ДГС) второго вида получается алгоритмом определения 2D ДПГ на основе 2D ДПФ-ВП, при значении параметров  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/2$ :

$$\begin{aligned} x_{ГС, 2D ДПФ, 1/2, 1/2}(n_1, n_2) = \\ = x(n_1, n_2) + jx_{\Sigma, 2D ДПФ, 1/2, 1/2}(n_1, n_2); \end{aligned} \quad (33)$$

где  $x_{ГС, 2D ДПФ, 1/2, 1/2}(n_1, n_2)$  – 2D ДГС, полученный алго-

ритмом определения ДПГ в пространственно-частотной области на основе 2D ДПФ-ВП, при значении параметров  $\theta_1 = 1/2$  и  $\theta_2 = 1/2$ ;  $x_{\Sigma, 2D ДПФ, 1/2, 1/2}(n_1, n_2)$  – новый 2D ДФД сигнал (2D ДПГ сигнала  $x(n_1, n_2)$ ), Фурье-спектр которого сдвинут по фазе относительно Фурье-спектра  $x(n_1, n_2)$  на  $\pi/2$ .

Для генерации огибающих двух 2D ДФД тестовых сигналов выберем два произведения двух двумерных косинусоид:

**Первый тестовый 2D ДФД сигнал:**

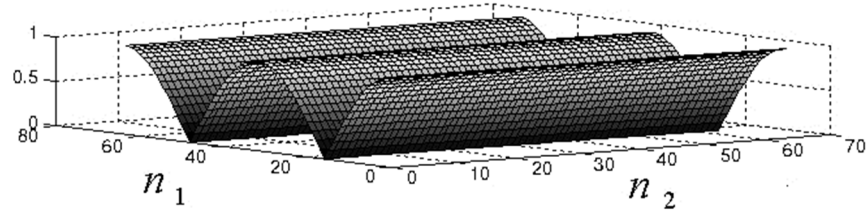
$$\begin{aligned} x(n_1, n_2) &= \cos\left(\frac{2\pi}{N} m_1 n_1 + \frac{2\pi}{N} m_2 n_2\right) \cdot \\ &\cos\left(\frac{2\pi}{N} m_3 n_1 + \frac{2\pi}{N} m_4 n_2\right); \end{aligned} \quad (34)$$

где  $n_1, n_2 = 0, N-1$ ;  $N = 64$ ;  $m_1 = 1$ ;  $m_3 = 8$ ;  $m_2 = m_4 = 0$ .

**Второй тестовый 2D ДФД сигнал:**

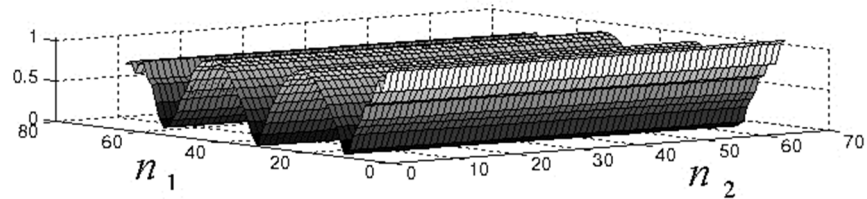
$$\begin{aligned} x(n_1, n_2) &= \cos\left(\frac{2\pi}{N} (m_1 + 1/2) n_1 + \frac{2\pi}{N} m_2 n_2\right) \cdot \\ &\cos\left(\frac{2\pi}{N} m_3 n_1 + \frac{2\pi}{N} m_4 n_2\right); \end{aligned} \quad (35)$$

Огибающая первого тестового 2D ДФД сигнала, полученная методом 2D ДПФ



а)

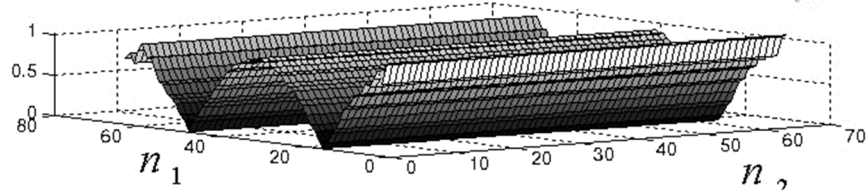
Огибающая второго тестового 2D ДФД сигнала, полученная методом 2D ДПФ



б)

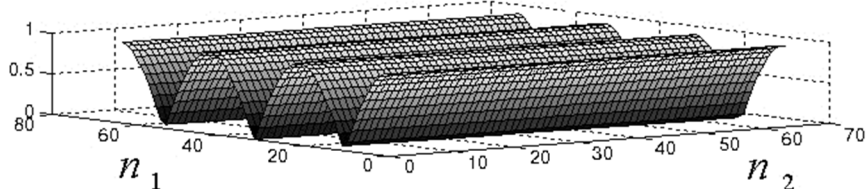
Рис. 7. Огибающие первого – а, второго – б, тестовых 2D ДФД сигналов, полученные на основе первого вида 2D ДГС

Огибающая первого тестового 2D ДФД сигнала, полученная методом 2D ДПФ-ВП



а)

Огибающая второго тестового 2D ДФД сигнала, полученная методом 2D ДПФ-ВП



б)

Рис. 8. Огибающие первого – а, второго – б, тестовых 2D ДФД сигналов, полученные на основе второго вида 2D ДГС

где  $n_1, n_2 = \overline{0, N-1}$ ;  $N = 64$ ;  $m_1 = 1$ ;  $m_3 = 8$ ;  $m_2 = m_4 = 0$ .

На рис. 7 приведены огибающие двух тестовых 2D ДФД сигналов, полученные на основе первого вида 2D ДГС.

На рис. 8 приведены огибающие двух тестовых 2D ДФД сигналов, полученные на основе второго вида 2D ДГС

Анализ теоретических огибающих и огибающих, полученных экспериментальным путем позволяет сделать следующие выводы.

1. Согласованность базисов применяемого 2D ДПФ-ВП со структурой 2D исследуемых ДФД сигналов крайне важна, поскольку позволяет получить меньшие абсолютные и относительные погрешности определения огибающих, вплоть до нулевых. В чем легко убедиться, сравнив соответственно рис. 7 а с 8 а, 7 б с 8 б.

2. Огибающие различных 2D ДФД сигналов имеют (в зависимости от вида 2D ДГС) существенные различия лишь на концах интервала определения последних.

#### Заключение

1. В статье проведено обобщение дискретного преобразования Гильберта финитных двумерных действительных сигналов на базе двумерного классического преобразований Фурье.

2. Разработана теория, методы и алгоритмы определения огибающих двумерных дискретных финитных двумерных действительных сигналов на базе преобразований Фурье с варьируемыми параметрами.

3. Из методов определения огибающих двумерных дискретных финитных действительных сигналов (реализация дискретных преобразователей Гильберта в пространственной области двумерными КИХ и БИХ-



фильтрациями, комплексной фильтрацией), методы, основанные на классическом 2D ДПФ и ДПФ-ВП при параметрах  $1/2, 1/2$ , являются самыми точными.

4. Теоретические результаты, полученные в статье, подтверждены математическим моделированием, проиллюстрированы на двух тестовых 2D ДВД сигналах двух видов 2D ДГС.

5. Не принятие во внимание при цифровой Фурье-обработке вида используемой огибающей может приводить к потере информации о свойствах и состояниях исследуемых объектов, явлений и процессов, а также досадным ошибкам.

### Литература

1. Пономарева О.В. Основы теории дискретных косвенных измерений параметров сигналов. Ижевск: Издательство ИжГТУ. 2016. 172 с.
2. Пономарева О.В. Развитие теории и разработка методов и алгоритмов цифровой обработки информационных сигналов в параметрических базисах Фурье: дис... д-ра техн. наук: 05.13.01. Ижевск, 2016. 357 с.
3. Пономарев В.А., Пономарева О.В., Пономарева Н.В. Метод быстрого вычисления дискретного преобразования Гильберта в частотной области. Современные информационные и электронные технологии, 2014. № 15. С. 183-184.
4. Пономарева Н.В., Пономарева О.В., Хворенков В.В. Определение огибающей ангармонического дискретного сигнала на основе преобразования Гильберта в частотной области. Интеллектуальные системы в производстве. 2018. Т. 16. № 1. С. 33-40
5. Ponomareva Olga, Ponomarev Alexey, Smirnova Natalia. Hilbert envelope extraction from real discrete finite signals considering the nonlocality of Hilbert transform. 22<sup>th</sup> International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA 2020. 22. 2020. С. 9213286.
6. Пономарев А.В. Основы теории двумерной цифровой обработки сигналов в базисах Фурье с варьируемыми параметрами. Цифровая обработка сигналов. 2019. № 2, С. 12-20.
7. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Перевод с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.
8. Dudgeon D.E. Multidimensional Digital Signal Processing Prentice Hall, 1995. 406 p.
9. Прэтт У. Цифровая обработка изображений: В 2-х книгах. Перевод с англ. М.: Мир, 1982. 790 с.
10. Gonzalez R.C., Woods R.E. Digital Image Processing, 4<sup>th</sup> Ed. Published by Pearson. 2018. 1168 p.
11. Вакман Д.Е. Об определении понятий амплитуды, фазы и мгновенной частоты сигнала. Радиотехника и электроника, 1972. № 5. С. 973-978.
12. Ванштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983. 288 с.
13. Финк Л.М. Сигналы. Помехи. Ошибки. М.: Радио и связь, 1984. 256 с.
14. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов / 2-е изд., пер. с англ. М.: ООО «Бином-Пресс». 2006. 636 с.
15. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Theoretical foundations of digital vector Fourier analysis of two-dimensional signals padded with zero samples. Informationsno-upravliaiushchie sistemy [Information and Control Systems], 2021, no. 1, pp. 55-65. DOI:10.31799/1684-8853-2021-1-55- 65
16. Пономарев А.В. Двумерная обработка сигналов в дискретных базисах Фурье. Интеллектуальные системы в производстве. 2019. Т.17. №1. С. 71-77.
17. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Перевод с англ. М.: Мир. 1978. 839 с.
18. Трахтман А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию. А.М.Трахтман. М.: Сов. радио. 1972. 352 с.
19. Alexey V. Ponomarev Systems Analysis of Discrete Two-Dimensional Signal Processing in Fourier Bases. Springer Nature Switzerland AG 2020 M. Favorskaya and L.C. Jain (eds.), Advances in Signal Processing, Intelligent Systems Reference Library 184. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6_7)
20. Olga V. Ponomareva, Alexey V. Ponomarev and Natalya V. Smirnova Sliding Spatial Frequency Processing of Discrete Signals. Springer Nature.Switzerland AG 2020. M. Favorskaya and L.C. Jain (eds.), Advances in Signal Processing, Intelligent Systems Reference Library 184, [https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6_8).
21. Olga V. Ponomareva, Alexey V. Ponomarev and Natalya V. Smirnova Interpolation of Real and Complex Discrete Signals in the Spatial Domain. Springer Nature Switzerland AG 2020.M. Favorskaya and L.C. Jain (eds.), Advances in Signal Processing, Intelligent Systems Reference Library 184, [https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-40312-6_9)
22. Ponomareva O., Ponomarev A., Smirnova N. Complex-Conjugate Symmetry of Coefficients of Two-Dimensional Discrete Fourier Transform with Variable Parameters of Real Signals 2022 24<sup>th</sup> International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA 2022.
23. Ponomareva O., Ponomarev A., Smirnova N. Methods for Increasing Speed of Two-Dimensional Discrete Fourier Transform of 2D Finite Discrete Signals 2022 24<sup>th</sup> International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA 2022.
24. Ponomarev A., Ponomareva O., Smirnova N. 2D Discrete Fast Fourier Transform with variable parameters. 2022 24<sup>th</sup> International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA 2022.
25. Ponomarev A., Ponomareva O., Smirnova N. Evolution of One-Dimensional and Two-Dimensional Discrete Fourier Transform 2022 24<sup>th</sup> International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA 2022.
26. Ponomarev A., Ponomareva O., Smirnova N. Fast Algorithms for Two-Dimensional Discrete Fourier Transform of Vibroacoustic Signals in Solving Problems of Control and Technical Condition of Machines and Mechanisms 2022 International Conference on Dynamics and Vibroacoustics of Machines, DVM 2022.
27. Ponomarev A., Ponomareva O., Smirnova N. Two-Dimensional Discrete Fourier Transform with Variable Parameters in Solving Fundamental Problems of Dynamics and Vibrodiagnostics of Machines. 2022 International Conference on Dynamics and Vibroacoustics of Machines, DVM 2022.
28. Ponomareva O.V., Ponomarev A.V. Theoretical Foundations of digital Vector Fourier Analysis of two-dimensional Signals Padded with Zero Samples. Information and Control Systems. 2021. № 1 (110). 55-64 pp.
29. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Смирнова Н.В. Алгоритмы прямого и обратного параметрического быстрого преобразования Фурье. Информационные технологии. 2022. Т. 28. № 1. С. 9-19.
30. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Двумерные быстрые преобразования Фурье с варьируемыми параметрами. Цифровая обработка сигналов. 2022. № 3. С. 3-13.
31. Пономарева О.В., Пономарев А.В., Пономарева Н.В. Перекрестная комплексно-сопряженная симметрия коэффициентов двумерного дискретного преобразования Фурье с варьируемыми параметрами действительных сигналов. Цифровая обработка сигналов. 2022. № 4. С. 3-12.