

УДК 004.056.3

# ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СИГНАЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТА

**Якимов В.Н., д.т.н., профессор Самарского государственного технического университета,**  
e-mail: yvnr@hotmail.com

## RECOVERY OF A DISCRETE TIME SIGNAL USING AN ORTHOGONAL POLYNOMIALS SYSTEM OF A DISCRETE ARGUMENT

**Yakimov V.N.**

The article discusses the development of mathematical software for recovery the numerical values of samples of a discrete sequence of a uniformly sampled continuous signal in time. The development was carried out on the basis of the approximation method and the construction of a basic polynomials system for a discrete argument. The basic polynomials system is constructed depending on the order of the approximating model, taking into account the fact that each subsequent polynomial must be orthogonal with the two previous polynomials. The resulting mathematical solution reduces the amount of computational procedures by half in relation to the number of sequence samples to be recovery. This is achieved due to the possibility of calculating estimates of the values of the samples simultaneously both forward and backward in the process of recovery the problem section of the sequence. The practical result was the development of algorithmic support. It is implemented as a functionally complete software module. This module was developed in accordance with regulatory requirements for the development of software components that affect the accuracy characteristics of computing procedures. The module is designed to operate in asynchronous control mode without interrupting the execution of the main application program that performs the current signal processing. Numerical experiments to evaluate the metrological and functional capabilities of the developed algorithmic support and software module were carried out using simulation modeling. The results of numerical experiments have shown that the recovery of the samples is carried out with a fairly low error.

**Key words:** discrete time signal, sampled sequence, signal recovery, approximation, polynomial.

**Ключевые слова:** сигнал дискретного времени, последовательность отсчетов, восстановление сигнала, аппроксимация, полином.

### Введение

В процессе цифровой обработки сигнала одной из актуальных задач является восстановление утраченных значений отсчетов его дискретной последовательности. В частности, решение такой задачи представляет особый интерес при обработке сигналов в радиолокации, вибродиагностике, системах беспроводной передачи данных, в ходе анализа речевых сигналов и т.п. [1-3].

Утрата значений отсчетов дискретной последовательности сигнала может произойти по техническим причинам их источников или средств принимающей стороны. Это также может быть обусловлено внешними воздействиями на сигнал при его передаче [4-6]. Эффект краткосрочного дрожания импульсов тактовой частоты синхронизирующих устройств может привести к неравномерности временной сетки формирования отсчетов на отдельных участках дискретной последовательности [7, 8]. В отдельных случаях преднамеренно осуществляется нерегулярное формирование дискретной последовательности [9-15]. Неравномерность представления сигнала в дискретном виде может иметь место в высокоскоростных многоканальных системах цифровой обработки сигналов. Это может происходить на

Рассмотрена разработка математического обеспечения для восстановления численных значений отсчетов дискретной последовательности равномерно дискретизированного непрерывного во времени сигнала. Разработка осуществлена на основе аппроксимационного метода и построения системы базисных полиномов дискретного аргумента. Система базисных полиномов строится в зависимости от порядка аппроксимирующей модели с учетом того, что каждый последующий полином должен быть ортогональным с двумя предыдущими полиномами. Полученное математическое решение сокращает объем вычислительных процедур в два раза по отношению к количеству подлежащих восстановлению отсчетов последовательности. Это достигается за счет возможности в процессе восстановления проблемного участка последовательности осуществлять вычисление оценок значений отсчетов одновременно как вперед, так и назад. Практическим результатом стала разработка алгоритмического обеспечения. Оно реализовано в виде функционально завершенного программного модуля. Данный модуль разработан в соответствии с нормативными требованиями, предъявляемыми к проектированию программных компонент, влияющих на точностные характеристики вычислительных процедур. Модуль предназначен для работы в режиме асинхронного управления без прерывания выполнения основной прикладной программы, осуществляющей обработку сигнала. Численные эксперименты по оценке метрологических и функциональных возможностей алгоритмического обеспечения и программного модуля проводились с использованием имитационного моделирования. Результаты экспериментов показали, что восстановление отсчетов осуществляется с достаточно низкой погрешностью.

участках объединения выборок, формируемых несколькими параллельно работающими низкоскоростными аналого-цифровыми преобразователями [16, 17].

Утрата значений отсчетов приводит к необходимости восстановления (реконструкции во времени) дискретной последовательности сигнала. В случае наличия не-большого числа утраченных отсчетов они могут быть заменены отсчетами с нулевыми или усредненными значениями. Это снижает вероятность грубых ошибок. Тем не менее, при анализе коротких выборок результирующая погрешность может превысить допустимую погрешность цифровой обработки сигнала. Прежде всего, это может отрицательно отразиться на погрешности от смешенности конечного результата. С целью обеспечения более эффективных результатов восстановления дискретной последовательности активно разрабатываются специальные методы [18-26]. В общем случае основу этих методов составляют частотно-временное преобразование или разложение во временные ряды. В первом случае восстановление сигнала основано на применении различных адаптивных ядер. Однако такой подход может негативно повлиять на форму спектрального представления анализируемого сигнала. Во втором случае восстановление дискретной последовательности осуществляется на основе аппроксимативного подхода. Он обеспечивает хорошую сходимость процедур восстановления во временной области. Однако вычислительная эффективность алгоритмов, реализующих данный подход, может снижаться с увеличением числа восстанавливаемых отсчетов. Следствием этого может стать снижение эффективности восстановления значений отсчетов в реальном режиме цифровой обработки сигнала.

Таким образом, актуальной задачей является разработка математического обеспечения, позволяющего реализовать алгоритмы с повышенной вычислительной эффективностью восстановления дискретных последовательностей сигналов. Это позволит расширить область применения таких алгоритмов в процессе цифровой обработки сигналов.

#### **Предлагаемый подход к восстановлению дискретной последовательности сигнала с использованием системы ортогональных полиномов дискретного аргумента**

Задачу восстановления дискретной последовательности отсчетов  $x_i$  будем решать исходя из того, что исходный непрерывный сигнал  $x(t)$  является стационарным или хотя бы квазистационарным. Выполнение условия квазистационарности позволяет учесть также те сигналы, для которых частотно-временные характеристики можно считать неизменными в пределах интервала времени их наблюдения.

Пусть дискретизация сигнала  $x(t)$  осуществлена с частотой заданной согласно теореме Котельникова. Допустим, что для  $i \in [0; \eta]$  и  $i \in [\eta + M + 1; N - 1]$  отсчеты  $x_i$  получены без искажения временной сетки, и их значения известны точно. Значения  $M$  отсчетов  $x_i$

для  $i \in [\eta + 1; \eta + M]$  образуют проблемный участок. Они могут быть искажены, утрачены или не соответствовать равномерной временной сетке. В любом случае в процессе обработки последовательности значения этих отсчетов должны быть восстановлены.

Будем восстанавливать значения отсчетов  $x_i$  для  $i \in [\eta + 1; \eta + M]$  по предыдущим  $i \in [\eta - L + 1; \eta]$  и последующим значениям отсчетов  $i \in [\eta + M + 1; \eta + M + L]$ , где значение  $L$  должно удовлетворять условиям  $\eta - L + 1 \geq 0$  и  $\eta + M + L \leq N - 1$ . Для вычисления оценок значений отсчетов исходной последовательности будем использовать модель:

$$\hat{x}_i = \sum_{v=0}^p a_v P_v(i), \quad (1)$$

где  $P_v(i)$  – полином порядка  $v$  дискретного аргумента  $i$ ,  $a_v$  – весовые коэффициенты;  $p$  – порядок модели.

Построение модели (1) осуществим на основе критерия минимума квадратической погрешности:

$$\delta_p = \sum_i (\hat{x}_i - x_i)^2 = \sum_i \left( \sum_{v=0}^p a_v P_v(i) - x_i \right)^2 \rightarrow \min, \quad (2)$$

где  $i \in [\eta - L + 1; \eta]$  и  $i \in [\eta + M + 1; \eta + M + L]$ .

Вычислим частные производные первого порядка  $\partial \delta_p / \partial a_n$ , где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, p$ , и приравняем их нулю. Тогда получаем, что  $\delta_p$  будет минимальной, если значения  $a_v$  будут находиться из решения системы уравнений:

$$\sum_{v=0}^p a_v \sum_i P_v(i) P_n(i) = \sum_i x_i P_n(i), \quad n = 0, 1, 2, \dots, p. \quad (3)$$

Будем использовать ортогональные полиномы, т.е. они будут удовлетворять условию:

$$\sum_i P_v(i) P_n(i) = 0, \text{ если } v \neq n.. \quad (4)$$

С учетом (4) из (3) получаем:

$$a_v = \frac{\sum_i x_i P_v(i)}{\sum_i P_v^2(i)}, \quad v = 0, 1, 2, \dots, p.. \quad (5)$$

Также с учетом (4) будем иметь:

$$\delta_p = \sum_i x_i^2 - \sum_{v=0}^p a_v^2 \sum_i P_v^2(i). \quad (6)$$

Ортогональные полиномы  $P_v(i)$  будем строить согласно следующему правилу:

$$\begin{cases} P_0(i) = 1; & P_1(i) = i - \alpha_1; \\ \dots \\ P_v(i) = (i - \alpha_v) P_{v-1}(i) - \lambda_{v-2} P_{v-2}(i), & \text{где } v = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (7)$$

Для полинома  $P_0(i) = 1$  будет выполняться следующее равенство:

$$P_0(i + \eta + M + 1) = P_0(\eta - i) = (-1)^0 P_0(\eta - i). \quad (8)$$

Значения величин  $\alpha_v$  и  $\lambda_{v-2}$  определим из (4). Это условие для полинома  $P_v(i)$  порядка  $v$  будет выполнено для всех  $n = 0, 1, 2, \dots, p$ , если оно будет выполнено

для  $n=v-1$  и  $n=v-2$ , т.е. полином  $P_v(i)$  должен быть ортогональным с двумя предыдущими.

Принимая во внимание, что  $P_0(i)=1$  имеем:

$$\sum_i P_1(i)P_0(i) = \sum_i (i - \alpha_1) = L(2\eta + M + 1 - 2\alpha_1) = 0. \quad (9)$$

Из (9) получаем:

$$\alpha_1 = (2\eta + M + 1) / 2. \quad (10)$$

Тогда полином первого порядка примет вид:

$$P_1(i) = i - (2\eta + M + 1) / 2. \quad (11)$$

Полинома первого порядка (11) обладает следующими свойствами:

$$P_1(\eta - i) = -(i + (M + 1) / 2) \text{ и}$$

$$P_1(i + \eta + M + 1) = (i + (M + 1) / 2). \quad (12)$$

Из (12) следует, что

$$P_1(i + \eta + M + 1) = (-1)^1 P_1(\eta - i). \quad (13)$$

Полином порядка  $v \geq 2$  должен быть ортогональным с полиномами, порядок которых равен  $v-2$  и  $v-1$ . Согласно (4) он должен удовлетворять условиям:

$$\sum_i P_v(i)P_{v-2}(i) = 0 \text{ и } \sum_i P_v(i)P_{v-1}(i) = 0. \quad (14)$$

Условия (14) с учетом (7) примут вид:

$$\sum_i (i - \alpha_v)P_{v-1}(i)P_{v-2}(i) - \lambda_{v-2} \sum_i P_{v-2}^2(i) = 0, \quad (15)$$

$$\sum_i (i - \alpha_v)P_{v-1}^2(i) - \lambda_{v-2} \sum_i P_{v-2}(i)P_{v-1}(i) = 0. \quad (16)$$

Полиномы  $P_{v-1}(i)$  и  $P_{v-2}(i)$  ортогональны между собой. Принимая это во внимание, а также то, что в (15) и (16)  $i \in [\eta - L + 1; \eta]$  и  $i \in [\eta + M + 1; \eta + M + L]$ , получаем соотношения для построения полиномов произвольного порядка:

$$\alpha_v = \frac{\sum_{i=0}^{L-1} ((\eta - i)P_{v-1}^2(\eta - i) + (i + \eta + M + 1)P_{v-1}^2(i + \eta + M + 1))}{\sum_{i=0}^{L-1} (P_{v-1}^2(\eta - i) + P_{v-1}^2(i + \eta + M + 1))}, \quad (17)$$

$$\lambda_{v-2} = \frac{\sum_{i=0}^{L-1} (P_{v-2}^2(\eta - i) + P_{v-2}^2(i + \eta + M + 1))}{\sum_{i=0}^{L-1} (P_{v-2}^2(\eta - i) + P_{v-2}^2(i + \eta + M + 1))}. \quad (18)$$

Для полинома второго порядка с учетом (8) и (13) получаем:

$$\alpha_2 = (2\eta + M + 1) / 2, \quad (19)$$

$$\lambda_0 = \frac{\sum_{i=0}^{L-1} P_1^2(i + \eta + M + 1)}{\sum_{i=0}^{L-1} P_0^2(i + \eta + M + 1)}. \quad (20)$$

Сопоставляя (10) и (19) между собой, приходим к выводу, что  $\alpha_2 = \alpha_1$ . Тогда с учетом (11) полином второго порядка будет иметь вид:

$$P_2(i) = P_1^2(i) - \lambda_0 P_0(i). \quad (21)$$

Исходя из (8) и (13) для полинома второго порядка будет справедливо соотношение:

$$P_2(i + \eta + M + 1) = (-1)^2 P_2(\eta - i). \quad (22)$$

Принимая во внимание (8), (13) и (22), для полинома третьего порядка будем иметь:

$$\alpha_3 = (2\eta + M + 1) / 2, \quad (23)$$

$$\lambda_1 = \frac{\sum_{i=0}^{L-1} P_2^2(i + \eta + M + 1)}{\sum_{i=0}^{L-1} P_1^2(i + \eta + M + 1)}. \quad (24)$$

Полином третьего порядка определяется соотношением:

$$P_3(i) = P_1(i)P_2(i) - \lambda_1 P_1(i). \quad (25)$$

Как и полиномы  $P_0(i)$ ,  $P_1(i)$  и  $P_2(i)$  полином третьего порядка обладает свойством:

$$P_3(i + \eta + M + 1) = (-1)^3 P_3(\eta - i). \quad (26)$$

Осуществляя процедуру определения ортогональных полиномов последующих порядков, получаем систему для их построения:

$$\begin{cases} P_0(i) = 1; & P_1(i) = i - (2\eta + M + 1) / 2; \\ \dots \\ P_v(i) = P_1(i)P_{v-1}(i) - \lambda_{v-2} P_{v-2}(i), & \text{где } v = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (27)$$

где

$$\lambda_{v-2} = A_{v-1} / A_{v-2}, \quad A_v = \sum_{i=0}^{L-1} P_v^2(i + \eta + M + 1). \quad (28)$$

Полином порядка  $v$  обладает свойством:

$$P_v(i + \eta + M + 1) = (-1)^v P_v(\eta - i). \quad (29)$$

Принимая во внимание (29), можно записать:

$$A_v = \sum_{i=0}^{L-1} P_v^2(\eta - i). \quad (30)$$

Теперь, после того как рассмотрена система построения ортогональных полиномов, вернемся к соотношениям (5) и (6). С учетом (27) получаем:

$$a_v = \frac{1}{2A_v} \sum_{i=0}^{L-1} (x_{i+\eta+M+1} + (-1)^v x_{\eta-i}) P_v(i + \eta + M + 1), \quad v = 0, 1, 2, \dots, p; \quad (31)$$

$$\delta_p = \sum_{i=0}^{L-1} (x_{\eta-i}^2 + x_{i+\eta+M+1}^2) - 2 \sum_{v=0}^p a_v^2 A_v. \quad (32)$$

Соотношение (31) определяет процедуру вычисления весовых коэффициентов  $a_v$  модели (1), а соотношение (32) определяет значение квадратической погрешности результатов восстановления в зависимости от порядка модели  $p$ .

Рассмотрим упрощение вычисления весовых коэффициентов  $a_v$ . Введем обозначение:

$$B_v(i) = P_v(i + \eta + M + 1). \quad (33)$$

Для вычисления этих полиномов будем иметь систему:

$$\begin{cases} B_0(i) = 1; & B_1(i) = i - (2\eta + M + 1) / 2; \\ \dots \\ B_v(i) = \phi_v(i)B_{v-1}(i) - (A_{v-1} / A_{v-2})B_{v-2}(i), & \text{где } v = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (34)$$

В (34) имеем:

$$A_v = \sum_{i=0}^{L-1} B_v^2(i). \quad (35)$$

Тогда (31) примет вид:

$$a_v = \frac{1}{2A_v} \sum_{i=0}^{L-1} (x_{i+\eta+M+1} + (-1)^v x_{\eta-i}) B_v(i), \\ v = 0, 1, 2, \dots, p. \quad (36)$$

Согласно модели (1) необходимо оценить значения  $x_i$  для  $i \in [\eta+1; \eta+M]$ . Отсюда следует, что эту модель можно представить в следующем виде:

$$\hat{x}_{\eta+i} = \sum_{v=0}^p a_v P_v(\eta+i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, M. \quad (37)$$

Введем обозначение:

$$D_v(i) = P_v(\eta+i). \quad (38)$$

Вычисление полиномов  $D_v(j)$  может быть осуществлено следующим образом:

$$\begin{cases} D_0(i) = 1; \quad D_1(i) = i - (M+1)/2; \\ \dots \\ D_v(i) = D_1(i)D_{v-1}(i) - (A_{v-1}/A_{v-2})D_{v-2}(i), \end{cases} \quad (39)$$

где  $v = 2, 3, \dots$

Тогда получаем:

$$\hat{x}_{\eta+i} = \sum_{v=0}^p a_v D_v(i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, M. \quad (40)$$

Для полиномов  $D_v(i)$  и  $B_v(i)$  справедливы соотношения:

$$\begin{cases} D_v(i) = (-1)^v B_v(-i); \\ D_v(i) = B_v(i-M-1); \\ D_v(i+M+1) = B_v(i); \\ D_v(M+1-i) = (-1)^v D_v(i). \end{cases} \quad (41)$$

Модель восстановления значений отсчетов  $\hat{x}_{\eta+i}$ , согласно (40), требует вычисления значений полинома  $D_v(j)$  для  $j = 1, 2, 3, \dots, M$ . Принимая во внимание (41) число таких вычислений можно уменьшить в два раза.

Сделаем тождественную замену  $i \equiv M+1-i$ . С учетом (41) получаем:

$$\hat{x}_{\eta+M+1-i} = \sum_{v=0}^p a_v (-1)^v D_v(i). \quad (42)$$

Рассмотрим (42) как результат суммирования промежуточных сумм для четных и нечетных значений индекса  $v$ . В соответствии с этим введем обозначения:

$$G(i) = \sum_v a_{2v} D_{2v}(i) \text{ и } Q(i) = \sum_v a_{2v+1} D_{2v+1}(i). \quad (43)$$

Будем вычислять  $G(i)$  и  $Q(i)$  для  $i = 1, 2, 3, \dots, L$ . При этом  $L = M/2$ , если  $M$  четное число. В противном случае  $L = [M/2]+1$ , где  $[M/2]$  целая часть результата  $M/2$ . Тогда (40) и (42) соответственно примут вид:

$$\hat{x}_{\eta+j} = G(j) + Q(j), \quad (44)$$

$$\hat{x}_{\eta+M+1-j} = G(j) - Q(j). \quad (45)$$

Согласно (44), вычисляем  $\hat{x}_{\eta+1}, \hat{x}_{\eta+2}, \dots, \hat{x}_{\eta+L}$ . В свою очередь  $\hat{x}_{\eta+L+1}, \hat{x}_{\eta+L+2}, \dots, \hat{x}_{\eta+M}$  вычисляем в соответствии с (45). Таким образом, получаем, что соотношения (44) и (45) сокращают объем вычислительных про-

цедур в два раза по сравнению с (37).

## Результаты численных экспериментов

На основе рассмотренной системы ортогональных полиномов  $P_v(i)$  и полученного решения для вычисления весовых коэффициентов  $a_v$ , с учетом соотношений (44) и (45), разработано алгоритмическое обеспечение для вычисления оценок утраченных значений отсчетов дискретной последовательности. Данное алгоритмическое обеспечение реализовано в виде программного модуля согласно нормативным требованиям, предъявляемым к разработке программных компонент, влияющих на точностные характеристики вычислительных процедур [27-29]. Модуль предназначен для использования в составе метрологически значимой части программного обеспечения цифровой обработки сигнала. Функциональным назначением модуля является вычисление оценок отсчетов в режиме асинхронного управления без прерывания выполнения основной прикладной программы. Численные эксперименты по исследованию функциональных возможностей модуля проводились на основе имитационного моделирования дискретной последовательности сигнала с проблемными участками отсчетов [30]. В качестве реализации исходного непрерывного сигнала использовалась модель следующего вида:

$$x(t) = \sum_{k=1}^K A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k). \quad (46)$$

В (46) значения амплитуд  $A_k$  и частот  $f_k$  задавались в пределах от нуля до единицы. Они интерпретировались как нормированные соответственно по отношению к наибольшей амплитуде и частоте гармоник, присутствующих в составе модели сигнала. Интерпретация частот и амплитуд как нормированных объясняется тем, что такой подход позволяет оценить возможности алгоритма восстановления в зависимости от соотношения их значений в составе сигнала. Значения начальных фаз  $\phi_k$  изменялись в пределах от  $-\pi$  до  $+\pi$  и задавались в соответствии с равномерным законом распределения.

Одна из реализаций модели сигнала содержала семь гармонических компонент, значения амплитуд, частот и начальных фаз которых приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения  $A_k$ ,  $f_k$  и  $\phi_k$  гармонических компонент

$k$	$A_k$	$f_k$	$\phi_k$
1	0,15	0,1	-1,185905
2	0,3	0,25	-1,210170
3	0,5	0,35	0,054345
4	1,0	0,5	-1,269063
5	0,7	0,75	0,986344
6	0,35	0,85	0,564374
7	0,1	1	-0,548928

В процессе проведения экспериментов, прежде всего, исследовалась способность алгоритма осуществлять восстановление значений отсчетов, когда формирование последовательности осуществлялось с предельно низкой частотой дискретизации. Для приведенного в табл. 1 гармонического состава модели сигнала наибольшую нормированную частоту равную единице

имеет компонента под номером семь. Согласно теореме Котельникова, предельно низкая частота дискретизации была равна  $F_s = 2f_5 = 2$ , т.е. интервал дискретизации был равен  $\Delta t = 0,5$ .

В частности, двадцать отсчетов последовательности с индексами  $i \in [322; 341]$  рассматривались в качестве утраченных. В соответствии с этим имеем  $\eta = 321$  и  $M = 20$ . На рис. 1 приведен фрагмент дискретной последовательности с учетом места нахождения участка этих отсчетов. В табл. 2 представлены результаты численных экспериментов по восстановлению проблемного участка. Порядок модели восстановления  $p$  был равен десяти и пятнадцати. Относительная погрешность восстановления значений отсчетов вычислялась согласно соотношению  $\delta_{\eta+m}^x = (\hat{x}_{\eta+m} - x_{\eta+m}) / x_{\eta+m}$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots, M$ . Ее значения находятся на достаточно низком уровне в пределах всего восстанавливаемого участка. Вместе с этим вычислялись среднеквадратическая погрешность

$$\delta_{\text{MSE}}^x = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\hat{x}_{\eta+m} - x_{\eta+m})^2} \quad \text{и средняя абсолютная}$$

погрешность  $\delta_{\text{MAE}}^x = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |\hat{x}_{\eta+m} - x_{\eta+m}|$ . Значения этих погрешностей также приведены в табл. 2. Они практически не превышают значения 0,01.

Таким образом, результаты численных экспериментов показывают, что практическая реализация разработанного математического обеспечения позволяет осу-

ществлять восстановление утраченных значений отсчетов дискретной последовательности сигнала с достаточно низкой погрешностью.

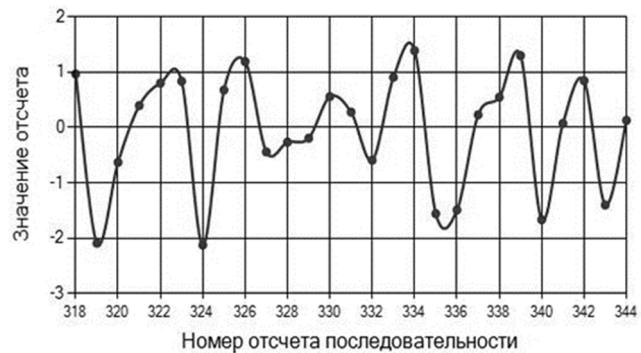


Рис. 1. Фрагмент последовательности с проблемным участком

### Заключение

В статье рассмотрена задача восстановления численных значений отсчетов на проблемных участках дискретной последовательности. Задача решалась исходя из того, что дискретная последовательность была получена в результате равномерной дискретизации непрерывного сигнала. Предполагается, что сигнал удовлетворяет условию стационарности или хотя бы должен быть квазистационарным на интервале времени его анализа. Разработка математического обеспечения для восстановления значений отсчетов сигнала осуществлена на основе аппроксимационного метода и постroe-

Таблица 2. Результаты восстановления значений отсчетов

m	$i = \eta + m$	$x_{\eta+m}$	Порядок модели			
			$p = 10$		$p = 15$	
			$\hat{x}_{\eta+m}$	$\delta_{\eta+m}^x$	$\hat{x}_{\eta+m}$	$\delta_{\eta+m}^x$
1	322	0,8017	0,8144	0,0159	0,8077	0,0075
2	323	0,8360	0,8227	-0,0159	0,8275	-0,0102
3	324	-2,1218	-2,1104	-0,0054	-2,1072	-0,0069
4	325	0,6767	0,6686	-0,0119	0,6640	-0,0187
5	326	1,1902	1,1886	-0,0013	1,1851	-0,0043
6	327	-0,4410	-0,4445	0,0079	-0,4470	0,0137
7	328	-0,2645	-0,2595	-0,0190	-0,2531	-0,0431
8	329	-0,1937	-0,1792	-0,0748	-0,1892	-0,0234
9	330	0,5578	0,5631	0,0096	0,5588	0,0018
10	331	0,2781	0,2700	-0,0291	0,2726	-0,0199
11	332	-0,5900	-0,5878	-0,0038	-0,5858	-0,0072
12	333	0,9066	0,9052	-0,0015	0,9048	-0,0019
13	334	1,3875	1,3903	0,0020	1,3883	0,0006
14	335	-1,5561	-1,5645	0,0054	-1,5612	0,0033
15	336	-1,4902	-1,4857	-0,0030	-1,4822	-0,0054
16	337	0,2288	0,2242	-0,0202	0,2235	-0,0233
17	338	0,5473	0,5552	0,0144	0,5492	0,0036
18	339	1,2982	1,2843	-0,0107	1,2870	-0,0087
19	340	-1,6635	-1,6566	-0,0042	-1,6505	-0,0078
20	341	0,0733	0,0716	-0,0233	0,0730	-0,0038
$\delta_{\text{MSE}}^x$			0,008104		0,007636	
$\delta_{\text{MAE}}^x$			0,007636		0,006353	

ния системы базисных полиномов. При этом построение системы базисных полиномов осуществляется в зависимости от порядка аппроксимирующей модели с учетом того, что каждый последующий полином должен быть ортогональным с двумя предыдущими полиномами. Полученное математическое решение сокращает объем вычислительных процедур в два раза за счет возможности в процессе восстановления проблемного участка вычислять оценки значений отсчетов одновременно как вперед, так и назад. Практическим результатом стала разработка алгоритмического обеспечения и его реализация в виде функционально завершенного программного модуля для вычисления оценок утраченных значений отсчетов дискретной последовательности. Модуль адаптирован для работы в режиме асинхронного управления в составе прикладного метрологически значимого программного обеспечения, осуществляющего цифровую обработку сигнала [31-34]. Численные эксперименты по оценке метрологических и функциональных возможностей разработанного алгоритмического обеспечения и программного модуля проводились с использованием имитационного моделирования. Результаты экспериментов показали, что восстановление отсчетов осуществляется с достаточно низкой погрешностью.

## Литература

1. Madisetti V.K. The Digital Signal Processing Handbook, Second edition: Digital Signal Processing Fundamentals. CRC Press, Taylor and Francis Group, 2010. 904 p.
2. Денисенко А.Н. Сигналы. Теоретическая радиотехника. Справочное пособие. М: Горячая линия-Телеком, 2005. 704 с.
3. Oppenheim A.V., Schafer R.W. Discrete-time signal processing: Third edition. Pearson Higher Education, 2010. 1108 р.
4. Khan N.A., Ali S. Robust Sparse Reconstruction of Signals with Gapped Missing Samples from Multi-Sensor Recordings. Digital Signal Processing. 2022, vol. 123. 103392.
5. Aceska R., Bouchot J.-L., Li S. Local Sparsity and Recovery of Fusion Frame Structured Signals. Signal Processing. 2020, vol. 174. 107615.
6. Stankovic L., Stankovic S., Amin M. Missing samples analysis in signals for applications to L-estimation and compressive sensing. Signal Processing. 2014, vol. 94, pp. 401-408.
7. Maymon S. Oppenheim A.V. Sinc Interpolation of Nonuniform Samples. IEEE Transactions on Signal Processing. 2011, vol. 59, no. 10, pp. 4745-4758.
8. Andras I., Dolinsky P., Michaeli L., Saliga J. A Time Domain Reconstruction Method of Randomly Sampled Frequency Sparse Signal. Measurement. 2018, vol. 127, pp. 68-77.
9. Bilinskis I. Digital Alias-free Signal Processing. Wiley, 2007. 454 p.
10. Wang P., Yanga H., Yea Z. 1-Bit Direction of Arrival Estimation Via Improved Complex-Valued Binary Iterative Hard Thresholding. Digital Signal Processing. 2022, vol. 120. 103265.
11. Guoa L.-B., Donga C.-X., Donga Y.-Y., Sunb T., Maoa Y. One-Bit LFM Signal Recovery: A consistency Algorithm With One-Sided Weighted Quadratic Penalty. Digital Signal Processing. 2022, vol. 127. 1– 03575.
12. Якимов В.Н., Машков А.В. Знаковый алгоритм анализа спектра амплитуд и восстановления гармонических составляющих сигналов в условиях присутствия некоррелированных фоновых шумов. Научное приборостроение. 2017. 27. № 2. С. 83-90.
13. Якимов В.Н. Математическое представление потоков дискретного знакового преобразования непрерывных сигналов. Вест. Самар. гос. техн. ун-та. Серия: Технические Науки. 2000. Вып. 8. С. 190-192.
14. Якимов В.Н. Обобщенная математическая модель двухуровневого знакового преобразования. Техника машиностроения. 2000. №4. С. 72-74.
15. Якимов В.Н. Цифровой комплексный статистический анализ на основе знакового представления случайных процессов. Известия самарского научного центра РАН. 2016. Т. 18. № 4(7). С. 1346-1353.
16. Choe C.-G., Pak J.-H., Rim .-S. Joint. Near-Isometry and Optimal Sparse Recovery: Nonuniform Recovery from Multi-Sensor Measurements. Signal Processing. 2023, vol. 208. 108980.
17. Liu N., Tao R., Wang R., Deng Y., Li N., Zhao S. Signal Reconstruction from Recurrent Samples in Fractional Fourier Domain and Its application in Multichannel SAR. Signal Processing. 2017, vol. 131, pp. 288-299.
18. Wang H., Yang S., Liu Y., Li Q. Compressive Sensing Reconstruction for Rolling Bearing Vibration Signal Based on Improved Iterative Soft Thresholding Algorithm. Measurement. 2023, vol. 210. 112528.
19. Sejdic E., Orovic I., Stankovic S. Compressive sensing meets time-frequency: An Overview of Recent Advances in Time-Frequency Processing of Sparse Signals. Digital Signal Processing. 2018, vol. 77, pp. 22-35.
20. Tang Q., Jiang Y., Xin J., Liao G., Zhou J., Yang X. A Novel Method for the Recovery of Continuous Missing Data Using Multivariate Variational Mode Decomposition and Fully Convolutional Networks. Measurement. 2023, vol. 220. 113366.
21. Khan N.A., Ali S. Reconstruction of Gapped Missing Samples Based on Instantaneous Frequency and Instantaneous Amplitude Estimation. Signal Processing. 2022, vol. 193. 108429.
22. Dokuchaev N. On Recovery of Discrete Time Signals from Their Periodic Subsequences. Signal Processing. 2019, vol. 162, pp. 180-188.
23. Annaby M.H., Al-Abdi I.A., Abou-Dina M.S., Ghaleb A.F. Regularized Sampling Reconstruction of Signals in the Linear Canonical Transform Domain. Signal Processing. 2022, vol. 198, 108569.
24. Yue C., Liang J., Qu B., Han Y., Zhu Y., Crisalle O.D. A Novel Multi-objective Optimization Algorithm for Sparse Signal Reconstruction. Signal Processing. 2020, vol. 167. 107292.
25. Якимов В.Н. Восстановление дискретной временной последовательности сигнала на основе локальной аппроксимации с использованием ряда Фурье по ортогональной системе тригонометрических функций. Информатика и автоматизация. 2022. Т. 21. № 5. С. 1016-1043.
26. Якимов В.Н. Восстановление отсчетов равномерно дискретизированного сигнала на основе авторегрессионных моделей прямого и обратного прогнозирования. В сборнике: Радиолокация, навигация, связь: Сборник трудов XXIX Международной научно-технической конференции. Воронежский государственный университет; АО «Концерн «Созвездие». – Воронеж: Издательский дом ВГУ. 2023. Т. 1. С. 51-57.
27. ГОСТ Р 8.883-2015 Государственная система обеспечения единства измерений. Программное обеспечение средств измерений. Алгоритмы обработки, хранения, защиты и передачи измерительной информации. Методы испытаний. Введ. 2016-03-01. М.: Стандартинформ, 2018. 19 с.
28. ГОСТ Р 51904-2002 Программное обеспечение встроенных систем. Общие требования к разработке и документированию. Введ. 2003-07-01. М.: Госстандарт России, 2005. 63 с.
29. ГОСТ 8.654-2015 Государственная система обеспечения единства измерений. Требования к программному обеспечению средств измерений. Основные положения. Введ. 2016-03-01. М.: Стандартинформ, 2015. 11 с.
30. ГОСТР 57700.22-2020 Компьютерные модели и моделирование. Классификация. Введ. 2021-06-01. М.: Стандартинформ, 2020. 7 с.
31. Yakimov V.N., Zaberzhinskij B.E., Mashkov A.V. Bukanova Yu.V. Multi-threaded Approach to Software High-speed Algorithms for Spectral Analysis of Multi-component Signals. Proceedings of IEEE XXI International Conference on Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP). 2019, pp. 698-701.
32. Якимов В.Н., Машков А.В., Желонкин А.В. Специализированное программное обеспечение измерительной системы для оперативного оценивания спектрального состава многокомпонентных процессов. Программные продукты и системы. 2019. № 1. С. 159-166.
33. Якимов В.Н., Горбачев О.В. Программное обеспечение системы измерения амплитудных спектров колебательных процессов. Программные продукты и системы. 2013. № 2. С. 6.
34. Якимов В.Н., Машков А.В., Желонкин А.В. Метрологически значимое программное обеспечение контрольно-измерительной системы для комплексного оперативного спектрального анализа на основе технологии распараллеливания процессорных вычислений. Промышленные АСУ и контроллеры. 2019. № 9. С. 25-29.