

ОБЗОР МОДИФИКАЦИЙ МЕТОДА ВЫБОРКИ ПО ЗНАЧИМОСТИ КОУЛА ПРИМЕНЕНИЕ К МПП-КОДАМ

Нектов А.Р., разработчик ООО «Лаборатория Сфера», город Рязань, e-mail: nektov.a.r@labsphera.ru

Овinnиков А.А., к.т.н., доцент кафедры Телекоммуникаций и основ радиотехники Рязанского государственного радиотехнического университета, e-mail: ovinnikov.a.a@tor.rsreu.ru

A REVIEW OF MODIFICATIONS OF COLE'S IMPORTANCE SAMPLING METHOD APPLIED TO LDPC

Nektov A.R., Ovinnikov A.A.

The paper describes the main parameters of LDPC, a decoder based on the belief propagation algorithm, and classifies sets of pseudo-code words that have a significant impact on the performance of these codes in the region of large SNR values. It describes the Cole's method used to improve the convergence of the process of modeling the noise immunity assessment of LDPC, which consists of three stages: searching for sets of traps and low-weight code words, assessing the degree of influence of each of them on the calculation of code characteristics, and using significance sampling to estimate the frame and bit error rate. In conclusion, the paper considers various modifications of the chosen approach to assessing the performance of LDPC, which are aimed at improving the accuracy of estimating the probability of errors and reducing computational costs compared to the original Cole's method.

Key words: LDPC, trapping sets, importance sampling, Cole's method.

Ключевые слова: МПП-коды, множества ловушек, выборка по значимости, метод Коула.

Введение

Коды с малой плотностью проверок на четность (МПП или Low-Density Parity-Check, LDPC) широко используются в системах связи, включая Wi-Fi, 5G и волоконно-оптические линии связи, а также в устройствах хранения данных. Современные стандарты накладывают очень жесткие требования на вероятность битовой ошибки, которая в некоторых случаях может достигать значений порядка 10^{-17} на бит. Для верификации синтезированных кодовых конструкций в рабочем диапазоне отношений сигнал-шум (ОСШ или Signal-to-Noise Ratio, SNR) следует выполнять долговременное моделирование, чаще всего по методу Монте-Карло, т.к. до сегодняшнего дня отсутствует возможность выполнить аналитический расчет частоты ошибок МПП-кодов для фиксированного ОСШ. Ввиду того, что точность оценивания вероятности ошибки при таком способе напрямую зависит от количества проводимых экспериментов, время до получения результата может составлять месяцы и даже годы, при условии использования высокопроизводительных вычислительных систем. При снижении числа пропускаемых через канал связи кодовых слов возрастает дисперсия оценок вероятностей ошибки декодирования, что может привести к потере смысла верификации как такового. Поэтому целесообразно переходить к таким статистическим методам моделирования, которые благодаря качественной априорной информации позволяют получать существенное ускорение в оценке интересующих показателей по сравнению с классическим подходом. На практике для МПП-кодов широкое применение нашел один из мето-

дется описание основных параметров МПП-кодов, декодера на базе алгоритма распространения доверия, а также классификация множеств псевдо-кодовых слов, которые оказывают существенное влияние на производительность этих кодов в области больших значений ОСШ. Приводится описание метода Коула, применяемого для улучшения сходимости процесса моделирования оценки помехоустойчивости МПП-кодов, который состоит из трех этапов: поиска множеств ловушек и кодовых слов малого веса, оценки степени влияния каждого из них на расчет характеристик кода и применения выборки по значимости для оценки частоты пакетной и битовой ошибок. В завершении работы рассмотрены различные модификации выбранного подхода к оценке производительности МПП-кодов, которые направлены на улучшение точности оценивания вероятности ошибок и снижение вычислительных затрат по сравнению с исходным методом Коула.

дом уменьшения дисперсии – выборка по значимости (ВЗ или Importance Sampling, IS). Его отличительной особенностью является способность значительно повысить точность оценок вероятности ошибки для редких, но важных событий, которые далее будут подробно рассмотрены в настоящей работе.

Коды с малой плотностью проверок на четность

Коды с малой плотностью проверок на четность – линейные блочные коды, кодирование которых осуществляется перемножением вектора информационного сообщения длиной k на порождающую матрицу \mathbf{G} размером $k \times n$, в результате чего получается вектор \mathbf{x} длиной n , а скорость кодирования составляет $R = k / n$. При декодировании применяется проверочная матрица \mathbf{H} размером $(n - k) \times n$, которая связана с порождающей матрицей выражением $\mathbf{GH}^T = [0]$, где $[0]$ – нулевая матрица. Процедура декодирования считается успеш-

ной, если произведение $\mathbf{x}\mathbf{H}^T$, называемое синдромом, равно нулю.

Основное отличие этих кодов от обычных блочных заключается в том, что их проверочные матрицы \mathbf{H} являются разреженными, т.е. количество единиц в них значительно меньше нулей.

Коды МПП удобно представлять графом Таннера, где каждая j -я строка представляется проверочным узлом c_j , а каждый i -й столбец – переменным узлом v_i . Если элемент матрицы \mathbf{H} равен единице, то проверочный и переменный узлы, соответствующие номерам строки и столбца этого элемента, соединяются, образуя ребро графа. Степень d_v переменного и d_c проверочного узлов определяются количеством соединений с ними или же количеством единиц в столбце и строке проверочной матрицы соответственно. Если все узлы одного типа имеют одинаковые степени, то проверочная матрица и соответствующий МПП-код являются регулярными, в противном случае – нерегулярными.

Например, $\{2,4\}$ – регулярная матрица:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Граф Таннера для этой матрицы представлен на рис. 1.

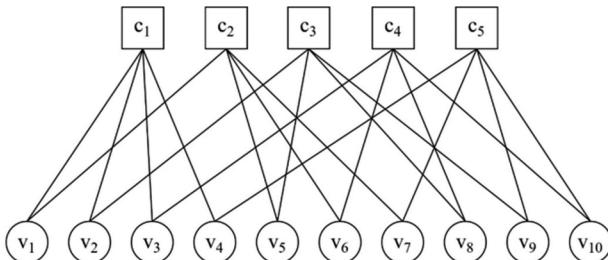


Рис. 1. Граф Таннера для $\{2,4\}$ -регулярной \mathbf{H} матрицы

Так как количество единиц одинаково для всех столбцов или строк, то код является регулярным. Обозначение $\{2,4\}$ подразумевает, что в каждом столбце проверочной матрицы по 2 единицы, а в каждой строке по 4, т.е. $d_v = 2$ и $d_c = 4$. Также граф Таннера характеризуется наличием циклов (замкнутых маршрутов, в которых каждое ребро встречается не более одного раза). Длина наименьшего цикла является обхватом графа и обозначается как g .

Декодирование МПП-кодов

Один из распространенных алгоритмов, используемых для декодирования МПП-кодов – алгоритм распространения доверия (АРД, или Belief Propagation, BP, или Message Passing Algorithm, MPA), суть которого в том, что полученные из канала логарифмические отношения правдоподобия (ЛОП или log-likelihood ratio, LLR), рассчитываемые по формуле (1) как L_i и показывающие, какая из гипотез (i -й бит равен 0 или 1) более вероятна (L_i больше или меньше 0 соответственно), итеративно пересыпаются между проверочными и переменными

узлами. Под пересылкой подразумеваются некоторые математические операции, в результате которых происходит обновление ЛОП.

$$L_i = \ln \frac{\Pr(x_i = 0)}{\Pr(x_i = 1)}, \quad (1)$$

где $\Pr(x_i = 0)$ – вероятность того, что i -й элемент вектора \mathbf{x} равен 0.

На этапе инициализации АРД создается матрица \mathbf{Lq} , которая получается путем поэлементного перемножения вектора входных данных $\mathbf{Lc} = L_{ch}\mathbf{y}$ на каждую строку матрицы \mathbf{H} . Коэффициент L_{ch} определяется каналом связи и видом модуляции; \mathbf{y} – вектор данных, поступающих с канала. Например, в случае канала с аддитивным белым гауссовским шумом (АБГШ или Additive White Gaussian Noise, AWGN) и двоичной фазовой модуляции $\mathbf{Lc} = 2\mathbf{y} / \sigma^2$, т.е. $L_{ch} = 2 / \sigma^2$, где σ^2 – дисперсия нормального шума в канале АБГШ.

Передача сообщений ЛОП от переменных узлов к проверочным осуществляется путем обновления матрицы \mathbf{Lr} , элементы которой вычисляются по выражению (2).

$$Lr_{ji} = 2 \tanh^{-1} \left(\prod_{V_j \setminus i} \tanh \left(Lq_{ij} / 2 \right) \right), \quad (2)$$

где V_j – множество переменных узлов, соединенных с j -м проверочным узлом; $V_j \setminus i$ – это множество V_j без i -го элемента. Т.е. перемножение происходит по всем ненулевым элементам j -й строки матрицы \mathbf{Lq} за исключением i -го элемента.

После по выражению (3) следует обновить ЛОП-данные, по которым будут приняты жесткие решения.

$$LQ_i = \sum_{C_i} Lr_{ji} + Lc_i, \quad (3)$$

где C_i – множество проверочных узлов, соединенных с i -м переменным узлом.

Если $LQ_i > 0$, то $\hat{x}_i = 0$, в противном случае $\hat{x}_i = 1$.

Сообщения ЛОП от проверочных узлов к переменным передаются с помощью обновления (4) матрицы \mathbf{Lq} .

$$Lq_{ij} = \sum_{C_i \setminus j} Lr_{ji} + Lc_i, \quad (4)$$

где $C_i \setminus j$ – это множество C_i без j -го элемента.

Проиллюстрируем на рис. 2 и 3 передачу сообщений между узлами графа Таннера, изображенного на рис. 1.

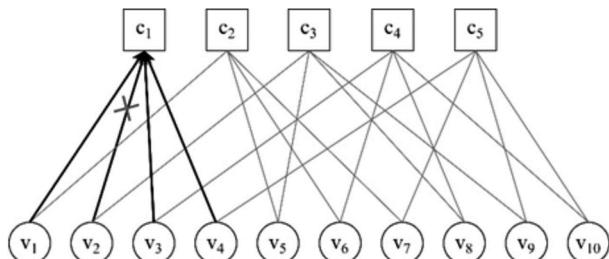


Рис. 2. Передача сообщения Lr_{12}

Итерации происходят до тех пор, пока не будет получен синдром $\hat{\mathbf{x}}\mathbf{H}^T$, состоящий из всех нулей, или будет достигнуто максимальное количество итераций.

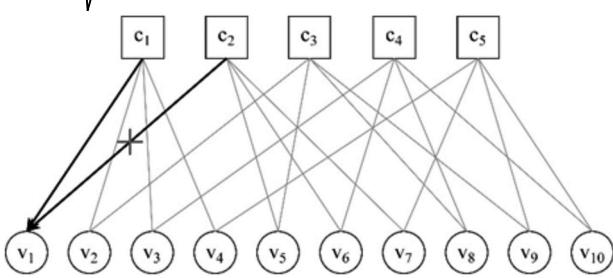


Рис. 3. Передача сообщения Lq_{12}

Множества ловушек

На производительность МПП-кодов с итеративным декодированием значительное влияние оказывают псевдо-кодовые слова, классификация которых отображена на рис. 4.



Рис. 4. Классификация псевдо-кодовых слов

Множества остановок (МО или Stopping Set, SS) главным образом рассматриваются в двоичном симметричном канале со стиранием (ДСКС или Binary Erasure Channel, BEC) [1]. Анализ МО не может быть напрямую применен к аддитивным шумовым каналам, таким как АБГШ и двоичному симметричному каналу (ДСК или Binary Symmetric Channel, BSC), которые имеют первостепенное значение в практических высоконадежных приложениях.

Множество ловушек (МЛ или Trapping Sets, TS) с параметрами (a, b) представляет собой вектор жестких решений длины n и веса Хэмминга a , которое приводит к b неудовлетворительным проверкам. С точки зрения графа Таннера, МЛ – набор из a переменных узлов, который индуцирует подграф с b проверочными узлами нечетной (в большинстве случаев первой) степени (т.е. b неудовлетворительных проверок) и произвольным числом проверочных узлов четной степени.

Элементарными считаются МЛ, для которых все проверочные узлы в подграфе имеют степень 1 или 2. Большинство множеств ловушек, которые оказывают сильное влияние на вероятность ошибки, являются элементарными.

Элементарные МЛ, у которых каждый переменный узел соединен по крайней мере с двумя удовлетворенными проверочными узлами, являются безлистными [2].

Поглощающее множество (ПМ или Absorbing Set, AS) является множеством ловушек, у которого каждый переменный узел имеет соединений с неудовлетворенными проверочными узлами меньше, чем с удовлетво-

ренными [1]. При этом, если все переменные узлы графа, за исключением принадлежащих данному ПМ, соединены с неудовлетворенными проверочными узлами, также принадлежащими данному ПМ, меньше, чем с остальными проверочными узлами графа, то это полностью поглощающее множество (ППМ или Fully Absorbing Set, FAS). Определение элементарности (полностью) поглощающего множества такое же как для МЛ.

Производительность МПП-кодов с итеративным декодированием в каналах АБГШ и ДСК в области большого ОСШ определяется обобщенным весовым спектром (совокупностью целых чисел A_d , показывающих количество кодовых слов с весом d , и совокупностью целых чисел B_a , показывающих количество псевдо-кодовых слов с весом a) кода, который состоит не только из кодовых слов малого веса, но и из множеств ловушек. Это связано с тем, что итеративные декодеры часто попадают под действие определенных шумовых шаблонов МЛ, из которых они не могут выбраться в процессе итеративной обработки входных сообщений.

В практических приложениях с очень низкими уровнями вероятности битовой или пакетной ошибки оценка способности МПП-кода удовлетворить эти требования классическим методом Монте-Карло может занимать месяцы и даже годы. Поэтому разумно рассмотреть альтернативные подходы, одним из которых является метод, предложенный Коулом в [3], основанный на использовании ВЗ. Описание этого метода приведено ниже.

Поиск множеств ловушек и определение их степени влияния, метод выборки по значимости

Предложенный метод состоит из трех этапов. Первый – поиск множеств ловушек, суть которого заключается в том, чтобы часть входных данных АРД-декодера исказить шумом с определенным образом подобранными законом распределения и числовыми характеристиками. Передаваемое кодовое слово при этом является нулевым, так как в случае симметричного канала связи и линейного кода оно будет эквивалентно случайному кодовому слову. Тогда в случае двоичной фазовой модуляции вектор у будет состоять исключительно из единиц.

Важно правильно выбрать позиции входного вектора ЛОП данных, к которым будет применен шум, называемый «импульсом ошибки». Для этого предлагается использовать локальную структуру графа Таннера, позволяющую значительно сократить пространство поиска.

Выбирается корневой переменный узел, и относительно него граф разворачивается в дерево.

Если корневому переменному узлу присвоено значение «1», то для удовлетворения всех проверочных узлов первого уровня под каждым из них нечетное число переменных узлов должны быть равны «1». Предполагается, что таких переменных узлов под каждым проверочным будет по одному, что соответствует элементарному МЛ. Следовательно, в качестве кандидатов на ввод ошибки будет выбрана комбинация из корневого узла и одного переменного, расположенного под каждым проверочным узлом первого уровня. Необходимо рассмотреть все такие комбинации, а также все n переменных узлов в качестве корневого. В таком случае рассматривается

$n(d_c - 1)^{d_v}$ комбинаций из $d_v + 1$ позиций, в которые следует направить импульс ошибки, обозначаемый ϵ_1 .

С увеличением длины кода улучшается его корректирующая способность, и для обнаружения множества ловушек становится недостаточно просто вводить импульсную ошибку в $d_v + 1$ позиции. Поэтому для более длинных кодов дополнительно предлагается в остальные $n - d_v - 1$ позиции вместо $ЛОП = 1$, что соответствует передачи «0», посыпать значение $\gamma \in (0; 1)$.

В случае еще более длинного кода этот подход требует очередной модернизации. Объясним это на примере кода $\{3,6\}$, дерево для которого представлено на рис. 5. Чтобы не нагружать рисунок, отобразим только по одному переменному узлу под каждым проверочным вместо 6. Передаваемое кодовое слово также состоит только из нулевых битов.

Переменные узлы второго уровня дерева будут получать следующие сообщения:

- 1) данные канала Lc ,
 - 2) «неверные» сообщения Lq от проверочных узлов, подключенных к переменным, имеющим импульс ошибки ϵ_I ,
 - 3) 2 «правильных» сообщения Lq от проверочных узлов, подключенных к переменным узлам, искаженным мультиплектирующим шумом γ .

Поскольку 3 сообщения Lq будут иметь примерно одинаковую величину, 2 «правильных» сообщения пре-восходят «неверное», а Lc только усиливает безошибочный расчет LQ , в результате чего декодер исправляет ошибку, и МЛ не обнаруживается. Для предотвра-щения этого предлагается дополнительно вводить в позиции переменных узлов второго уровня (всего $d_v(d_v - 1)(d_c - 1)$) импульс ошибки $\epsilon_2 \in (\gamma; \epsilon_1)$.

В общем случае, количество битов, необходимое для формирования импульса ошибки, способного определить доминирующее множество ловушек, зависит от n, k . Для большего n обычно требуется искажить импульсным шумом больше бит в кодовом слове.

В случае нерегулярных кодов переменные узлы низкой степени содержат почти все доминирующие множества ловушек, поэтому имеет смысл осуществлять перебор корневого узла по возрастанию его степени, и часто достаточно ограничить поиск первыми двумя степенями. При этом значения параметров ϵ_1 , ϵ_2 , γ и количество битов импульса ошибки зависят от степени корневого узла в текущем дереве.

У высокоскоростных ($R \geq 0.75$) МПП-кодов также есть свои особенности. Так как эти коды имеют степени проверочных узлов больше, чем аналогичные коды с более низкой скоростью, требуется рассматривать большее количество комбинаций элементов для ввода импульсного шума. Поэтому предлагается использовать число элементов, обозначаемое как v_{num} , меньше $d_y + 1$, то есть рассматривать переменные узлы не под каждым проверочным первого уровня. При этом длина кода n , при которой требуется вводить импульс ϵ_2 , оказывается большей по сравнению с невысокоскоростными кодами.

Если в процессе декодирования входного вектора с текущей шумовой комбинацией по достижению максимального количества итераций не достигнут нулевой синдром, то МЛ определяется как битовый вектор, соответствующий синдрому с минимальным весом Хэмминга по всем итерациям при текущем входном векторе.

Также важно правильно выбрать параметры поиска ϵ_1 , ϵ_2 , γ . Увеличение ϵ_1 повышает количество найденных МЛ, но также увеличивает и среднее число итераций, необходимых для каждого декодирования, что приводит к увеличению времени вычислений. При этом для коротких кодов, к которым не нужно применять импульс ошибки ϵ_2 , существует некоторое значение ϵ_1 , при котором обнаруживаются основные значимые множества ловушек, и не имеет смысла повышать ϵ_1 выше этого значения.

Результатом выполнения первого этапа является список преобладающих множеств ловушек и кодовых слов малого веса, но так как не все найденные мно-

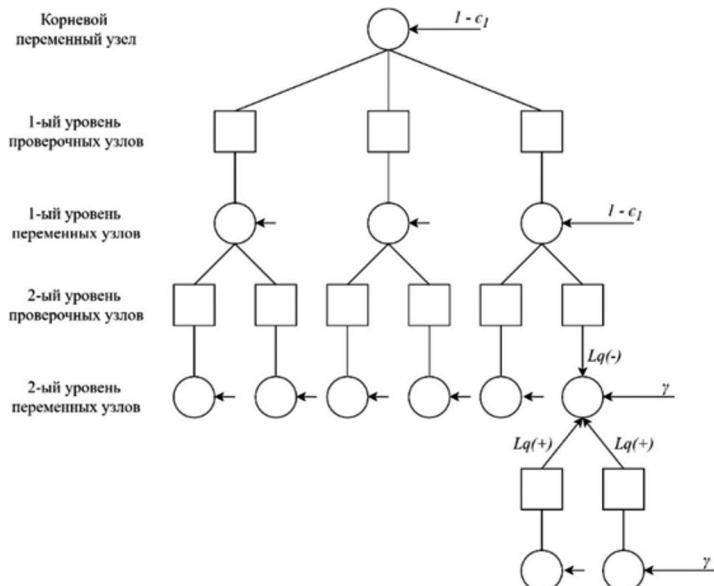


Рис. 5. Переход для определения позиции ввода импульсного шума

жества ловушек являются равнозначными, то необходимо определить степень влияния каждого из найденных МЛ, что выполняется на втором этапе. Для этого в позиции бит, принадлежащих МЛ, вводится детерминированный шум и определяется его величина, при которой происходит переход от правильного декодирования к ошибке. Определение этой границы осуществляется методом двоичного поиска в пределах от $\epsilon_{\min} = 1$ до $\epsilon_{\max} = \epsilon_1$ (в данном случае, ϵ_1 – параметр первого этапа). Величина шума ϵ_i на i -й итерации поиска обновляется по выражению (5). Знак \pm определяется тем, смог (+) декодер исправить детерминированную ошибку или нет (-). При этом величина шума на первой итерации поиска определяется как (6). Т.е. происходит обновление одного из пределов (верхнего или нижнего) поиска, и искомая величина ϵ по итогу i -й итерации принимает значение одного из этих пределов, что с точностью до $(\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}) / 2^i$ будет соответствовать истинному значению. Тогда погрешность результата поиска будет определяться максимальным количеством p итераций как $(\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}) / 2^p$. Следовательно, чем больше итераций, тем выше точность, однако в слишком большой точности нет необходимости. Максимального количества итераций $p = 10$ обычно более чем достаточно для достижения высокой точности оценивания мощности детерминированного шума, приводящего к ошибкам декодирования [3]. При использовании на первом этапе параметров γ и ϵ_2 требуются дополнительные экспериментальные проверки для оценки результативности применения двоичного поиска.

$$\epsilon_i = \epsilon_{i-1} \pm (\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}) / 2^i, \quad (5)$$

$$\epsilon_1 = (\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min}) / 2. \quad (6)$$

Так же влияние МЛ определяется и количеством битов, т.е. параметром a . Таким образом, величина, характеризующая степень влияния МЛ, представляет собой суммарную мощность шума, который является границей между правильным и неправильным декодированием, всех битов МЛ и определяется как квадрат евклидова расстояния до порога ошибки, определяемого детерминированным шумом, направленным в позиции битов МЛ (7). Выражение ниже справедливо для случая, когда в a позиций битов МЛ вводится одинаковое значение импульсного шума ϵ .

$$d_e^2 = a\epsilon^2. \quad (7)$$

На третьем этапе осуществляется оценка вероятностей битовой и кадровой ошибок методом В3, идея которого основывается на том, что некоторые значения случайной величины в процессе моделирования имеют большую значимость (вероятность) для оцениваемой функции, чем другие, и необходимо выбрать распределение, которое способствует выбору «более вероятных» значений случайной величины.

При классическом моделировании методом Монте-Карло в канале АБГШ генерируются зашумленные реализации $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{n}$ с нормальной плотностью распределения вероятности $f(\mathbf{y})$, рассчитываемой по выражению (8). Применяя метод В3, Коул использует взвешенную сумму плотностей распределения вероятности со сме-

щенным средним $f^*(\mathbf{y})$ (9). Смещение осуществляется путем зашумления мягких решений в соответствии с позициями a битов МЛ, тогда $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_m + \mathbf{n}$, где $\boldsymbol{\mu}_m$ – вектор длины n с нулями во всех позициях, кроме тех, что соответствуют m -у множеству ловушек или кодовому слову малого веса. При этом по-прежнему передается нулевое кодовое слово, т.е. $x_i = 1$.

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{1}\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad (8)$$

$$f^*(\mathbf{y}) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{1} + \boldsymbol{\mu}_m\|^2}{2\sigma^2}\right), \quad (9)$$

где M – множество МЛ и кодовых слов малого веса, найденных на первом этапе.

В таком случае альтернативная оценка кратности ошибки на пакет длиной n будет определяться выражением (10).

$$\hat{P}_{f_{BS}} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P I_e(\mathbf{y}) w(\mathbf{y}), \quad (10)$$

где P – количество реализаций для каждой из M плотностей; $I_e(\mathbf{y})$ – индикаторная функция наличия ошибки (окончательное состояние декодирования не является кодовым словом, состоящим из всех нулей); $w(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) / f^*(\mathbf{y})$ – весовая функция. Т.е. происходит накопление весовой функции с каждой реализацией.

При программной реализации может возникнуть проблема расчета весовой функции $w(\mathbf{y})$, когда $f(\mathbf{y})$ может быть равна нулю при очень большом отрицательном аргументе экспоненты всех членов суммы, что приведет к делению на ноль. Во избежание этого предлагается добавить небольшую постоянную величину ψ в аргументы экспонент числителя и знаменателя $w(\mathbf{y})$. Коул рассматривает вариант $\psi = n/2$, объясняя это следующим образом: аргумент экспоненты члена знаменателя весовой функции определяется как (11) и является случайной величиной с математическим ожиданием $E[z]$, определяемым выражением (12). Тогда прибавляя $-\psi$ к z , получим 0 в аргументе экспоненты и, как следствие, 1 в знаменателе $w(\mathbf{y})$.

$$z = -\frac{\|\mathbf{n}\|^2}{2\sigma^2} = -\frac{\sum_{i=1}^n n_i^2}{2\sigma^2}, \quad (11)$$

$$E[z] = \frac{n^2}{n} \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} = \frac{n}{2}. \quad (12)$$

Следует пояснить, что в выражениях (11) и (12) n и n_i – вектор шумовых отсчетов и сами отсчеты соответственно, а n – длина кодового слова.

Включение всех M найденных МЛ и кодовых слов малого веса требует большого общего количества реализаций зашумленных сообщений, что приведет к увеличению времени расчета. Для снижения затрат расчета из найденных на первом этапе исключаются МЛ, имеющие показатель d_e^2 , превышающий некоторую пороговую величину, устанавливаемую пользователем. Т.е. M ограничивается только оказывающими наибольшее вли-

яние МЛ и кодовыми словами малого веса.

Вероятности пакетной и битовой ошибки будут оцениваться по выражению (10), однако при расчете вероятности битовой ошибки $w(y)$ делится на отношение количества ненулевых бит окончательного состояния декодера к n для каждой реализации.

При моделировании ВЗ предлагаются отслеживать все возникающие ошибки и сравнивать МЛ, соответствующее текущей ошибке, с тем, на которое была ориентирована эта шумовая реализация. В случае несоответствия следует фиксировать новые МЛ и частоту их появления. При этом новое множество будет содержать много битов, общих с некоторыми из уже имеющихся МЛ, так как в области ошибок находится близко к ним, и, как следствие, уже учитываться в оценке \hat{P}_{fis} . При увеличении ОСШ новые множества будут появляться все реже, так как «облака» шума будут становиться более концентрированными и с меньшей вероятностью будут отклоняться от предполагаемой области ошибки. Список новых МЛ позволяет оценить степень первоначального покрытия обнаруженных областей ошибок. Если параметры $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma$, используемые на первом этапе, выбраны правильно, то список новых МЛ будет небольшим.

Направления возможных модификаций метода Коула

В методе Коула есть параметры, применение которых ограничено параметрами рассматриваемого кода, а также не определен диапазон их допустимых значений. Так, например, на первом этапе есть параметры $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma, E_b/N_0, v_{num}, b_{max}$, применяемые для поиска МЛ, но нет каких-то правил или рекомендаций по выбору их значений для различных МПП-кодов, в том числе нерегулярных и высокоскоростных, только примеры, которые рассматривает Коул. При этом есть ограничения на применение этих параметров, которые также размыты: параметр γ рекомендуется использовать при $n \geq 2000$ для кодов {3,6}, ϵ_2 для этого же класса кодов – при $n \geq 5000$ в дополнении к γ . В [4] предложены следующие ограничения: для коротких ($n \leq 4000$) кодов ϵ_1 находится в пределах $[2\epsilon_2, 8\epsilon_2]$, для длинных – $[1.1\epsilon_2, 2\epsilon_2]$. Для высокоскоростных кодов параметр v_{num} должен быть меньше $d_v + 1$, при этом нет определения, какое именно значение должен принимать этот параметр. В [4] также предложены ограничения на параметр v_{num} для нерегулярных МПП-кодов: диапазон принимаемых значений – от $d_{v_{max}} + d_{v_{min}}$ до $d_{v_{max}} + 2\text{card}[\text{var}_{\text{deg}}/d_{v_{max}}] + 1$, где $d_{v_{max}}$ и $d_{v_{min}}$ – максимальное и минимальное значения d_v , а $\text{card}[\text{var}_{\text{deg}}/d_{v_{max}}]$ – число различных d_v за исключением максимального. Обнаруженное МЛ не учитывается в дальнейшем расчете, если его параметр b больше некоторого порога b_{max} ввиду того, что степень влияния зависит также от соотношения a и b : чем больше b по сравнению с a , тем меньшее влияние оказывает МЛ. Таюже нет обоснования выбора количества итераций

декодирования. На первом и втором этапе вектор входных данных домножается на коэффициент канала, который в случае АБГШ канала определяется параметром ОСШ, при значении которого предполагается исследование производительности МПП-кода. Пределы ОСШ, которые следует рассматривать в рамках данного метода тоже не обозначены. На третьем этапе список МЛ ограничивается по показателю d_e^2 (меньше определенного порога), однако нет упоминаний о выборе порогового значения этого параметра для просеивания кандидатов под имитационное моделирование.

Рассмотрим теперь возможные варианты модификаций описанного в предыдущем разделе метода. Наиболее вариативным является первый этап. Например, при формировании вектора импульсов ошибки можно применить метод, описанный в [5]. Его суть заключается в следующем: МЛ чаще всего образуются перекрывающимися короткими циклами в графе Таннера. Поэтому для каждого переменного узла необходимо для начала обнаружить все кратчайшие циклы. После этого выделить уникальные кодовые вершины, принадлежащие этим циклам, составив по ним соответствующую таблицу, строки которой будут использоваться в качестве наборов индексов для наложения импульсного шума в методе ВЗ. Согласно материалам публикации [5] такой подход позволяет получить хорошее приближение по точности оценивания вероятности ошибки к методу Монте-Карло при значительно сниженной вычислительной нагрузке. Рассмотренная идея может быть применена в способе, предложенным Коулом, на первом и втором этапах.

В работе [4] предлагается модифицировать первый этап метода Коула следующим образом: 1) Пусть Z – размер циркулянта, тогда для квазициклического регулярного МПП-кода можно уменьшить количество $n(d_c - 1)^{d_v}$ комбинаций позиций ввода импульсного шума в Z раз; 2) Переменный узел учитывается при формировании МЛ в случае, если он образует цикл с остальными узлами МЛ; 3) Вводится ограничение на число итераций декодирования от I_{avg} до I_{max} , где I_{avg} и I_{max} – среднее и максимальное количество итераций декодирования. Это позволило ускорить поиск МЛ в несколько десятков раз по сравнению с классической реализацией метода Коула.

Наряду с обнаружением МЛ в методе Коула имеется возможность находить и кодовые слова малого веса. Так, например, в коде (96,48) были выделены первые три компоненты весового спектра [6]. Причем две младшие, с весом Хэмминга 6 и 8 соответственно, составляющие определены абсолютно точно, а в ансамбле кодовых слов веса 10 имеются прогалы. Для более длинных кодовых конструкций оценка минимального кодового расстояния становится затруднительной, что подтверждается результатами в работах [3] и [6], однако задача становится более реалистичной при условии применения рассматриваемых модификаций.

На втором этапе метода Коула выполняется оценка степени влияния МЛ на производительность МПП-кода на основе определения границы «срабатывания» ошибки декодирования. Однако, для относительно длинных

кодов поиск ловушек на первом этапе осуществляется с применением дополнительных параметров, таких как γ и ϵ_2 , которые никак не учитываются в алгоритме двоичного поиска. Существует гипотеза, что в этих условиях для многих МЛ граница «срабатывания» ошибки декодирования может быть не определена. Возможно, потребуется модификация алгоритма двоичного поиска, учитывающая влияние дополнительных параметров, задействованных на первом этапе метода Коула.

Также на втором этапе можно применить модификацию на основе метода, описанного в работах [7, 8], суть которых состоит в следующем: МЛ с одинаковыми параметрами (a, b) могут оказывать разное влияние на итоговую производительность кода ввиду наличия различного количества циклов в индуцированном связанным подграфе. Предлагается вводить третий параметр e , характеризующий наличие и количество циклов. В таком случае, МЛ с одинаковыми параметрами (a, b, e) оказывают примерно одинаковое влияние на производительность, следовательно, их можно объединить в одну группу и рассчитывать параметр d_e^2 для всех МЛ группы целиком. В результате применения предложенного метода, на основе такой классификации МЛ, авторы получили точность оценки частоты пакетной ошибки, близкую к методу Монте-Карло, при этом удалось сократить время расчета на порядки.

В работе [9] было рассмотрено применение ВЗ при использовании различных статистических методов распределения случайной величины, таких как: нормального, равномерного и Коши. По критериям модифицированного нормированного отклонения и среднеквадратичной ошибке равномерное распределение оказалось лучше остальных, то есть позволило обеспечить большую точность оценивания вероятности ошибок при высоких ОСШ для рассматриваемых МПП-кодов.

На заключительном этапе Коул предлагает при моделировании ВЗ осуществлять фиксацию всех ранее не выявленных МЛ. При этом их вклад в итоговую оценку вероятности ошибки остается неочевидным, т.к. повторное выполнение процедуры расчета параметра d_e^2 не предусмотрено методом Коула. Поэтому следует провести дополнительные исследования, направленные на определение целесообразности выполнения такой проверки, т.к. она существенно увеличивает время выполнения третьего этапа.

Заключение

В рамках проведенного обзора было установлено, что метод Коула представляет собой мощный инструмент для расчета производительности МПП-кодов, в особенности в области относительно высоких ОСШ, где наблюдается так называемая «полка», обусловленная различными факторами. При этом присутствует серьезный дефицит публикаций по этой тематике, которые бы детально раскрывали особенности такого подхода к

оценке помехоустойчивости канальных кодеков. Вероятнее всего это связано с большой вариабельностью метода ВЗ в части подготовки априорных данных по наиболее значимым областям пространства кодовых векторов, отсутствием возможности точного аналитического описания допустимых диапазонов используемых параметров. Всё это приводит к чрезмерному эмпиризму в развитии метода Коула. Однако, проведенный в настоящей работе анализ показывает, что даже в рамках базовой публикации [3] имеется ряд белых пятен, которые следует уточнять и прорабатывать. Более того, комбинируя различные модификации метода Коула возможно значительно снизить вычислительные затраты и повысить точность оценки вероятности ошибки каждого из улучшений в отдельности, что будет принято к реализации в последствии.

Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда № 23-21-10100.

Литература

1. Bordeaux L., Hamadi Y., Kohli P. Tractability: Practical Approaches to Hard Problems. Cambridge University Press. 2014.
2. Bashirreza Karimi, Amir.H Banihashemi. Construction of QC-LDPC Codes with Low Error Floor by Efficient Systematic Search and Elimination of Trapping Sets. Available at: arxiv.org/abs/1902.07332v3. (accessed: 25.10.2024).
3. Cole C. A., Wilson E. H., Giallorenzi T. A general method for finding low error rates of LDPC codes. Available at: arxiv.org/abs/cs/0605051. (accessed: 03.11.2024)
4. Усатюк В.С., Егоров С.И. Построение LDPC-кодов с использованием модифицированного метода выборки по значимости Коула. Известия Юго-Западного государственного университета. 2023. Т. 27, № 1. С. 92-110.
5. Cavus Enver, Haymes Charles L., Daneshrad Babak. Low BER Performance Estimation of LDPC Codes via Application of Importance Sampling to Trapping Sets. IEEE Transactions on Communications. 2009, vol. 57, no. 7, pp. 1886-1888.
6. Cole C. A., et al. Analysis and Design of Moderate Length Regular LDPC Codes with Low Error Floors. 40th CISS, 2006. 2006, pp. 823-828.
7. X. Zheng, F. C. M. Lau, C. K. Tse, Y. He, M. Z. Wang. Evaluation of the Extremely Low Block Error Rate of Irregular LDPC Codes. 2009 IEEE International Conference on Communications. 2009, pp. 1-5.
8. X. Zheng, F. C. M. Lau, C. K. Tse. Differentiating trapping sets with the same label [w; u]. 2009 7th International Conference on Information, Communications and Signal Processing (ICICS). 2009, pp. 1-5.
9. Угловский А.Ю., Мельников И.А., Алексеев И.А., Куреев А.А. Оценка низкого уровня ошибок с помощью выборки по значимости с равномерным распределением. Проблемы передачи информации. 2023. Т. 59, № 4. С. 3-12.