

# ОЦЕНКА ЧАСТОТЫ И ФАЗЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА, ПРИНИМАЕМОГО НА ФОНЕ БЕЛОГО ШУМА, ПО ЕГО КОРОТКОЙ ВЫБОРКЕ

Паршин В.С., д.т.н., профессор кафедры РУС РГРТУ им. В. Ф. Уткина, e-mail: vsparshin@gmail.com  
 Нгуен В.Д., аспирант кафедры РУС РГРТУ им. В. Ф. Уткина, e-mail: ducnguyenvan15043003@gmail.com

## ESTIMATION OF FREQUENCY AND PHASE OF A HARMONIC SIGNAL RECEIVED AGAINST A WHITE NOISE BACKGROUND FROM ITS SHORT SAMPLE

Parshin V.S., Nguyen V.D.

The paper presents relationships that allow one to determine the Rao-Kramer boundaries for joint and separate estimates of the relative frequency, initial phase, and amplitude of a harmonic signal represented by a short sample, received against a background of white normal noise. A short sample is understood to be a signal containing fractions and units of a period in the observation interval. Statistical modeling was performed for different signal-to-noise ratios, the results of which completely coincided with the results of calculations using the obtained expressions. The paper presents the results of statistical modeling that allow one to determine the biases of the estimates of the frequency and initial phase of signals represented by a short sample.

**Key words:** short sample, maximum likelihood method, Rao-Kramer bound, relative frequency estimation, phase estimation, variance, bias, invariant transformation.

**Ключевые слова:** короткая выборка, метод максимального правдоподобия, граница Рао-Крамера, оценка относительной частоты, оценка фазы, дисперсия, смещение, инвариантное преобразование.

### Введение

В ряде случаев приходится измерять частоту гармонических колебаний, представленных короткой выборкой. Такая задача возникает при измерении малых расстояний дальномером с частотной модуляцией излучаемого сигнала, анализе сигналов в акустике, гидроакустике, сейсмоакустике.

В данной работе под термином «короткая выборка» понимается реализация сигнала, относительная частота  $n$  которой

$$n = \omega T_u / 2\pi, \quad (1)$$

где  $\omega$  – круговая частота;  $T_u$  – длительность реализации, такова, что на интервале времени  $T_u$  содержатся доли и единицы периода колебания.

На практике очень часто используют для оценки частоты  $\hat{\omega}$  алгоритм [1, 2]

$$S(\hat{\omega}) = \max_{\omega} \{S(\omega)\}, \quad (2)$$

где  $S(\omega)$  – спектральная плотность амплитуды.

Согласно (2) за оценку частоты  $\hat{\omega}$  принимается та частота  $\omega$ , на которой находится максимальная спектральная составляющая спектральной плотности  $S(\omega)$ .

Использование алгоритма (2) для оценки частоты приводит к слишком большим погрешностям, поскольку максимальная спектральная составляющая при малом числе периодов на интервале наблюдения находится либо на нулевой частоте, либо в ее окрестностях. Кроме того, алгоритм (2) не позволяет оценивать фазу сигнала,

Получены соотношения, позволяющие определить границы Рао-Крамера для совместных и раздельных оценок относительной частоты, начальной фазы и амплитуды гармонического сигнала, представленного короткой выборкой, принимаемого на фоне белого нормального шума. Под короткой выборкой понимается сигнал, содержащий на интервале наблюдения доли и единицы периода. Проведено статистическое моделирование при разных отношениях сигнал-шум, результаты которого полностью совпали с результатами расчетов по полученным выражениям. Приведены результаты статистического моделирования, позволяющие определить смещения оценок частоты и начальной фазы сигналов, представленных короткой выборкой.

ла, которая в ряде случаев является информативным параметром.

В ряде работ [3-9] предложены различные алгоритмы измерения параметров радиосигнала по его короткой реализации. Однако упомянутые алгоритмы или не позволяют обеспечить потенциальную точность оценки параметров радиосигнала при приеме его на фоне белого нормального шума, или позволяют осуществлять оценку какого-то одного параметра.

**Целью работы** является определение смещения и дисперсии оценок (границ Рао-Крамера) частоты и фазы радиосигнала, представленных короткой выборкой, при использовании для оценок метода максимального правдоподобия.

### Постановка задачи

Принимаемая реализация  $y(t)$  является суммой полезного сигнала  $S(t)$  и нормального белого шума  $\zeta(t)$  с односторонней спектральной плотностью мощности  $N_0$ .

$$y(t) = S(t) + \zeta(t) = a \cos\left(\frac{2\pi n}{T_u} t + \varphi\right) + \zeta(t), \quad (3)$$

где  $a$ ,  $n$ ,  $\varphi$  – соответствуют амплитуде, относительной частоте и начальной фазе полезного сигнала.

Для оценки параметров радиосигнала (3) воспользуемся методом максимального правдоподобия. Полагаем, что длительность реализации  $T_u$  известна. В общем случае логарифм функции отношения правдоподобия (ЛФОП)  $\ln\{\Lambda(a_{on}, n_{on}, \varphi_{on})\}$  можно представить в виде [1-2]

$$\ln\{\Lambda(a_{on}, n_{on}, \varphi_{on})\} = \frac{2}{N_0} \int_0^{T_u} \left\{ y(t) S_{on}(t, a_{on}, n_{on}, \varphi_{on}) - \frac{1}{2} S_{on}^2(t, a_{on}, n_{on}, \varphi_{on}) \right\} dt, \quad (4)$$

где  $S_{on}(t, a_{on}, n_{on}, \varphi_{on})$  – опорный сигнал.

Для получения оценок  $\hat{a}$ ,  $\hat{n}$ ,  $\hat{\varphi}$  параметров  $a$ ,  $n$ ,  $\varphi$  необходимо, варьируя значения параметров опорного сигнала, добиться максимизации ЛФОП. За оценки  $\hat{a}$ ,  $\hat{n}$ ,  $\hat{\varphi}$  параметров  $a$ ,  $n$ ,  $\varphi$  принимаются те значения параметров опорного сигнала, при которых функция (4) достигает максимума.

Вычисляя интеграл в (4), с учетом (3) получаем

$$\begin{aligned} \ln\{\Lambda(a_{on}, n_{on}, \varphi_{on})\} = & \frac{aa_{on}T_u}{N_0} \cos[\pi(n - n_{on}) + \varphi - \varphi_{on}] \frac{\sin[\pi(n - n_{on})]}{\pi(n - n_{on})} + \\ & + \frac{aa_{on}T_u}{N_0} \cos[\pi(n + n_{on}) + \varphi + \varphi_{on}] \frac{\sin[\pi(n + n_{on})]}{\pi(n + n_{on})} - \\ & - \frac{a_{on}^2T_u}{2N_0} \cos(2\pi n_{on} + 2\varphi_{on}) \frac{\sin(2\pi n_{on})}{2\pi n_{on}} - \frac{a_{on}^2T_u}{2N_0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Обычно полагают, что относительная частота достаточно велика ( $n \gg 1$ ). При этом слагаемыми с удвоенной относительной частотой в (5) можно пренебречь. Тогда функцию  $\ln\{\Lambda(a_{on}, n_{on}, \varphi_{on})\}$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \ln\{\Lambda(a_{on}, n_{on}, \varphi_{on})\} = & \frac{aa_{on}T_u}{N_0} \cos[\pi(n - n_{on}) + \varphi - \varphi_{on}] \times \\ & \times \frac{\sin[\pi(n - n_{on})]}{\pi(n - n_{on})} - \frac{a_{on}^2T_u}{2N_0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Обычно функция (6) используется для определения дисперсии оценки параметров радиосигнала. В работе для определения дисперсии оценок будет использоваться ЛФОП (5), что позволит определить поведение оценок для малых относительных частот.

#### Оценка относительной частоты при известной фазе

Самой простой ситуацией на практике является измерение относительной частоты при известных амплитуде и фазе, то есть  $a_{on} = a = a_0$ ,  $\varphi_{on} = \varphi = \varphi_0$  ( $a_0$  и  $\varphi_0$  – соответственно истинное значение амплитуды и начальной фазы). В этом случае ЛФОП  $\ln\{\Lambda(n_{on})\}$  можно записывать таким образом

$$\begin{aligned} \ln\{\Lambda(n_{on})\} = & \frac{2E_0}{N_0} \frac{\sin[2\pi(n - n_{on})]}{2\pi(n - n_{on})} + \\ & + \frac{2E_0}{N_0} \cos[\pi(n + n_{on}) + 2\varphi_0] \frac{\sin[\pi(n + n_{on})]}{\pi(n + n_{on})} - \end{aligned}$$

$$- \frac{E_0}{N_0} \cos(2\pi n_{on} + 2\varphi_0) \frac{\sin(2\pi n_{on})}{(2\pi n_{on})} - \frac{E_0}{N_0}, \quad (7)$$

где энергия  $E_0 = a_0^2 T_u / 2$ .

Нижняя граница дисперсии оценки относительной частоты  $\hat{n}$  (нижняя граница Рао-Крамера) при известных амплитуде и фазе определяется известным соотношением [1-2]:

$$D_{\hat{n}} = - \frac{1}{\partial^2 \ln\{\Lambda(n_{on})\} / \partial n_{on}^2} \Big|_{n_{on}=n}. \quad (8)$$

Проводя необходимые вычисления, получаем нижнюю границу дисперсии оценки относительной частоты

$$\begin{aligned} D_{\hat{n}} = & \frac{N_0}{2E_0(2\pi)^2} \times \\ & \times \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin(4\pi n + 2\varphi_0)}{(2\pi n)} + \frac{\cos(4\pi n + 2\varphi_0)}{(2\pi n)^2} - \frac{\cos(2\pi n + 2\varphi_0) \sin(2\pi n)}{(2\pi n)^3} \right\}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из выражения (9) следует, что дисперсия оценки относительной частоты  $\hat{n}$  зависит от измеряемой частоты  $n$  и значения начальной фазы, и имеет колебательный характер. В частном случае, когда измеряемая относительная частота достаточно велика ( $n \gg 1$ ), слагаемыми множителя вида  $\sin(x)/x$  и  $\cos(x)/x$  можно пренебречь. В этом случае, с учетом того, что  $\omega = 2\pi n / T_u$ , дисперсия оценки частоты [1] будет равна  $D_{\hat{\omega}} \approx 3N_0 / 2E_0 T_u^2$ .

Результаты моделирования представлены на рис. 1. Моделирование осуществлялось при фиксированном значении времени наблюдения. На рис. 1, а показано смещение оценки относительной частоты  $\hat{n}$ , величина которого определяется так:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \hat{n}_i - n = m\{\hat{n}\} - n, \quad (10)$$

где  $L$  – число реализаций;  $m\{\hat{n}\}$  – математическое ожидание оценки относительной частоты;  $n$  – измеряемая относительная частота.

На рис. 1, б приведена дисперсия оценки относительной частоты, величина которой рассчитывается по следующей формуле

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (\hat{n}_i - m\{\hat{n}\})^2. \quad (11)$$

Число реализации  $L = 1000$ , начальная фаза сигнала  $\varphi_0 = 0$ . Графики 1, 2 и 3, приведенные на рис. 1, получены при отношении сигнал-шум, величина которого соответственно равна  $2E_0/N_0 = 38$  дБ,  $2E_0/N_0 = 32$  дБ и  $2E_0/N_0 = 26$  дБ.

По рис. 1, а видно, что график смещения относительной частоты имеет колебательный характер. Увеличение измеряемой относительной частоты приводит к уменьшению смещения. Необходимо отметить, что смещение оценки частоты возникает из-за влияния слагаемых с удвоенной частотой в (5).

Рис. 1, б показывает, что дисперсия оценки относи-

тельной частоты также является функцией частоты. При достаточно большой относительной частоте дисперсия оценки  $\hat{n}$  становится равна [1] величине  $D_{\hat{n}} = 3N_0/2E_0(2\pi)^2$ .

Необходимо отметить, что результаты расчетов по формуле (9) полностью совпадают с результатами моделирования и поэтому не приводятся.

#### Совместная оценка относительной частоты и фазы

Наиболее часто встречающийся на практике случай, когда начальная фаза исследуемого сигнала не известна. В этом случае задача оценки относительной частоты  $\hat{n}$  при неизвестной фазе сводится к задаче нахождения максимума ЛФОП  $\ln\{\Lambda(n_{on}, \varphi_{on})\}$ , то есть к задаче совместной оценке величин  $n_{on}$  и  $\varphi_{on}$ . Полагая известной амплитуду, ЛФОП  $\ln\{\Lambda(n_{on}, \varphi_{on})\}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \ln\{\Lambda(n_{on}, \varphi_{on})\} = & \frac{2E_0}{N_0} \cos[\pi(n - n_{on}) + \varphi - \varphi_{on}] \frac{\sin[\pi(n - n_{on})]}{\pi(n - n_{on})} + \\ & + \frac{2E_0}{N_0} \cos[\pi(n + n_{on}) + \varphi + \varphi_{on}] \frac{\sin[\pi(n + n_{on})]}{\pi(n + n_{on})} - \\ & - \frac{E_0}{N_0} \cos(2\pi n_{on} + 2\varphi_{on}) \frac{\sin(2\pi n_{on})}{2\pi n_{on}} - \frac{E_0}{N_0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Вычисляя производные

$$J_{ik} = - \left[ \frac{\partial^2 \ln\{\Lambda(n_{on}, \varphi_{on})\}}{\partial n_{on} \partial \varphi_{on} k} \right]_{n_{on}=n, \varphi_{on}=\varphi} \quad (13)$$

и составляя корреляционную матрицу оценок [1], получаем нижние границы Рао-Крамера для оценок частоты и фазы

$$D_{\hat{n}} = \frac{N_0 C}{2E_0 \pi^2 (4AC + B^2)}, \quad (14)$$

$$D_{\hat{\varphi}} = - \frac{N_0 4A}{2E_0 (4AC + B^2)}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \text{где } B = 1 - \frac{\sin(4\pi n + 2\varphi)}{2\pi n} + \frac{\sin(2\pi n + 2\varphi)\sin(2\pi n)}{(2\pi n)^2}, \quad C = \\ = -1 + \frac{\cos(2\pi n + 2\varphi)\sin(2\pi n)}{2\pi n}, \quad A = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{\sin(4\pi n + 2\varphi)}{2\pi n} - \\ - \frac{1}{2} \frac{\cos(4\pi n + 2\varphi)}{(2\pi n)^2} + \frac{1}{2} \frac{\cos(2\pi n + 2\varphi)\sin(2\pi n)}{(2\pi n)^3}. \end{aligned}$$

В частном случае при  $n \gg 1$  можно пренебречь слагаемыми вида  $\sin(x)/x$  и  $\cos(x)/x$ . При этом дисперсии совместной оценки частоты и фазы будут равны [1]  $D_{\hat{n}} = 12N_0/2E_0 T_u^2$  и  $D_{\hat{\varphi}} = 4N_0/2E_0$ .

Результаты моделирования приведены на рис. 2. Условия моделирования те же самые, что и при получении

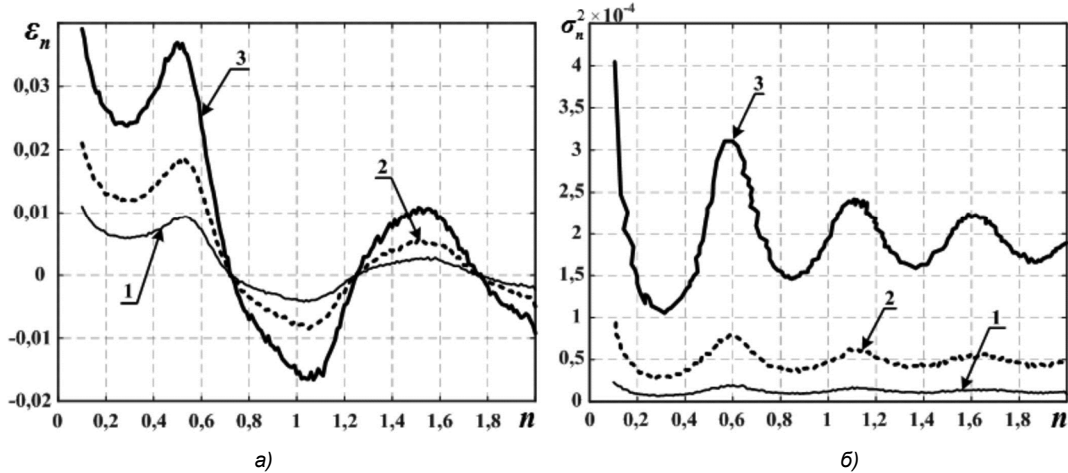


Рис. 1. Зависимости смещения (а) и дисперсии оценки относительной частоты при известной фазе сигнала

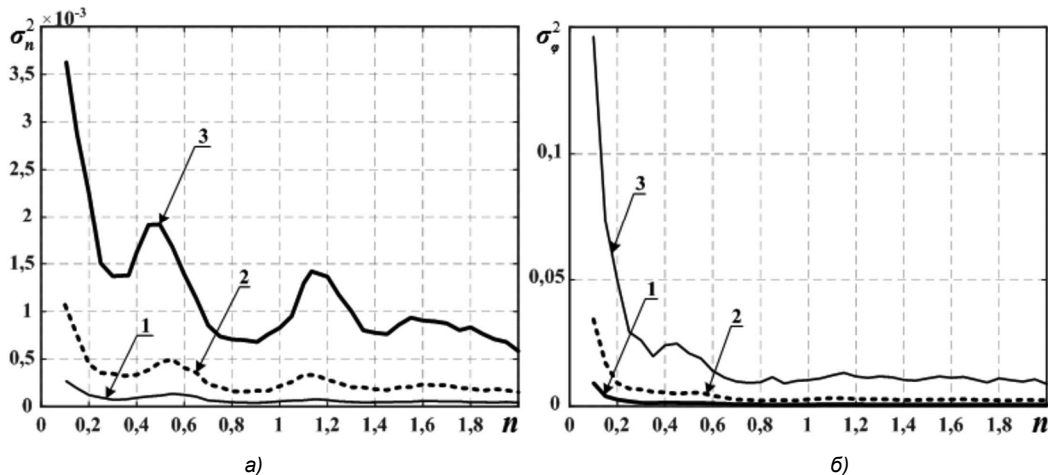


Рис. 2. Зависимость дисперсии совместной оценки относительной частоты (а) и начальной фазы (б)

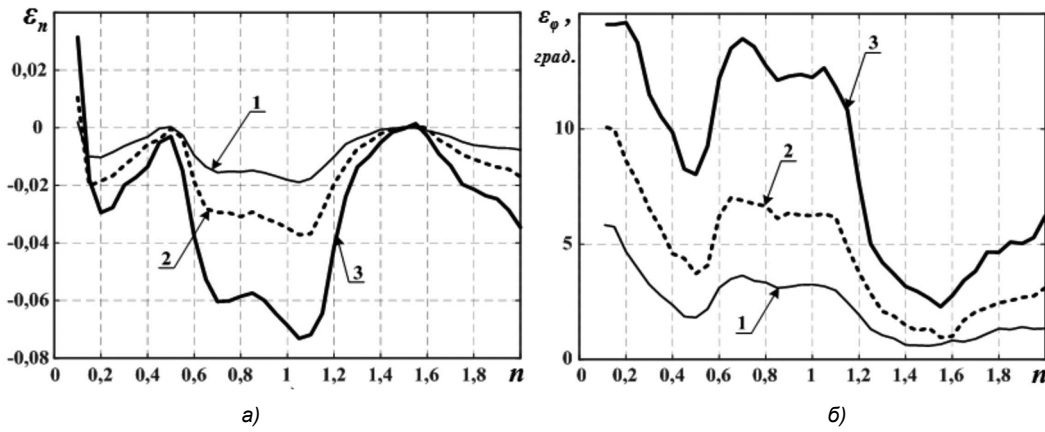


Рис. 3. Смещение совместных оценок относительной частоты (а) и начальной фазы (б)

нии графиков, представленных на рис. 1. Графики 1, 2, 3 соответствуют отношениям сигнал-шум, величина которого соответственно равна  $2E_0/N_0 = 38$  дБ,  $2E_0/N_0 = 32$  дБ и  $2E_0/N_0 = 26$  дБ. При проведении моделирования полагалось, что фаза опорного сигнала изменялась в интервале  $-\pi/2 + \varphi \leq \varphi_{on} \leq \pi/2 + \varphi$ , где  $\varphi$  – задаваемая фаза сигнала (3). Сравнение результатов, приведенных на рис. 1, б и рис. 2, а, показывает, что дисперсия оценки относительной частоты при неизвестной фазе примерно в 4 раза больше дисперсии оценки относительной частоты при известной фазе и для короткой выборки.

На рис. 3 показаны смещения оценки частоты и фазы, величины которых определяются по формуле (10). Из сравнения результатов, приведенных на рис. 1, а и рис. 3, а, следует, что из-за незнания фазы сигнала смещение относительной частоты увеличивается. При увеличении отношения сигнал-шум смещение оценок быстро уменьшается. Результаты расчетов по (14, 15) также полностью совпадают с результатами моделирования.

#### Совместные оценки относительной частоты, фазы и амплитуды

Дисперсии оценки совместных трех параметра  $D_{\hat{n}}$ ,  $D_{\hat{\varphi}}$  и  $D_{\hat{a}}$  определяются известным соотношением [1]  $R_{ik} \geq J^{-1}$ , (16) где  $R_{ik}$  – корреляционная матрица ошибок оценок;  $J$  – информационная матрица Фишера;  $J^{-1}$  – обратная матрица  $J$ .

Вычисляя необходимые операции, получаем следующие значения для дисперсии оценок амплитуды  $D_{\hat{a}}$ , относительной частоты  $D_{\hat{n}}$  и фазы  $D_{\hat{\varphi}}$ .

$$R_{11} = D_{\hat{a}} = \frac{J_{22}J_{33} - J_{23}^2}{\Delta}, \quad (17)$$

$$R_{22} = D_{\hat{n}} = \frac{J_{11}J_{33} - J_{13}^2}{\Delta}, \quad (18)$$

$$R_{33} = D_{\hat{\varphi}} = \frac{J_{11}J_{22} - J_{12}^2}{\Delta}, \quad (19)$$

где  $\Delta = J_{11}J_{22}J_{33} + 2J_{12}J_{23}J_{13} - J_{22}J_{13}^2 - J_{33}J_{12}^2 - J_{11}J_{23}^2$ ;

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{T_u(I+C)}{N_0}; & J_{12} &= \frac{\pi a_0 T_u D}{N_0}; & J_{13} &= -\frac{a_0 T_u F}{N_0}; \\ J_{22} &= \frac{2E_0(2\pi)^2}{N_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{A}{2} \right); & J_{23} &= \frac{\pi 2E_0}{N_0} (1-B); \\ J_{33} &= \frac{2E_0}{N_0} (1-C); & C &= \frac{\cos(2\pi n + 2\varphi) \sin(2\pi n)}{2\pi n}; \\ D &= \frac{\cos(4\pi n + 2\varphi)}{2\pi n} - \frac{\cos(2\pi n + 2\varphi) \sin(2\pi n)}{(2\pi n)^2}; \\ B &= \frac{\sin(4\pi n + 2\varphi)}{2\pi n} - \frac{\sin(2\pi n + 2\varphi) \sin(2\pi n)}{(2\pi n)^2}; \\ A &= \frac{\sin(4\pi n + 2\varphi)}{2\pi n} + \frac{\cos(4\pi n + 2\varphi)}{(2\pi n)^2} - \\ &\quad - \frac{\cos(2\pi n + 2\varphi) \sin(2\pi n)}{(2\pi n)^3}; \\ F &= \frac{\sin(2\pi n + 2\varphi) \sin(2\pi n)}{2\pi n}. \end{aligned}$$

При  $n \gg 1$  коэффициенты  $A, B, C, D$  и  $F$  будут равны нулю ( $A = B = C = D = F = 0$ ). При этом дисперсии оценки амплитуды, фазы и частоты равны  $D_{\hat{a}} = N_0/T_u$ ,  $D_{\hat{\varphi}} = 4N_0/2E_0$  и  $D_{\hat{n}} = 12N_0/2E_0T_u^2$ , то есть совпадают с границами Рао-Крамера для достаточно больших относительных частот [1].

Результаты моделирования представлены на рис. 4. Графики 1, 2 и 3 соответствуют дисперсиям оценок при  $2E_0/N_0 = 38$  дБ,  $2E_0/N_0 = 32$  дБ,  $2E_0/N_0 = 26$  дБ.

Анализ полученных графиков показывает, что при относительной частоте  $n < 0,8$  дисперсии оценок (частоты, фазы) резко возрастают.

На практике для устранения влияния разницы амплитуд принятого и опорного сигналов на результат измерения можно использовать инвариантное преобразование [8]

$$y'(t) = y(t) / \sqrt{\int_0^{T_u} y^2(t) dt}, \quad (20)$$

что позволяет существенно уменьшить число вычислительных операций при нахождении экстремума ЛФОР.

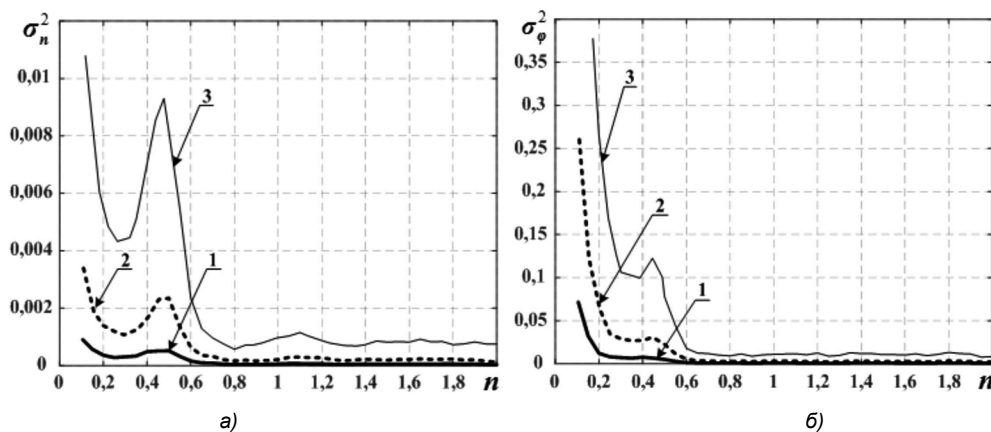
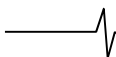


Рис. 4. Дисперсия оценки относительной частоты (а) и начальной фазы (б)

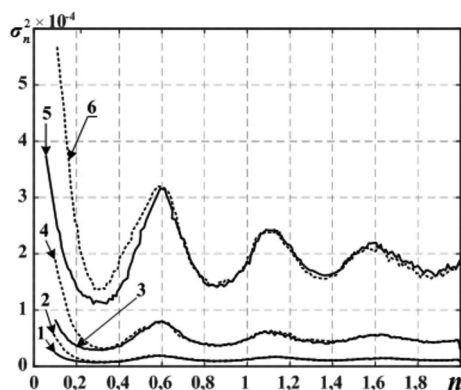


Рис. 5. Дисперсии оценки частоты при известной фазе и использовании инвариантного преобразования

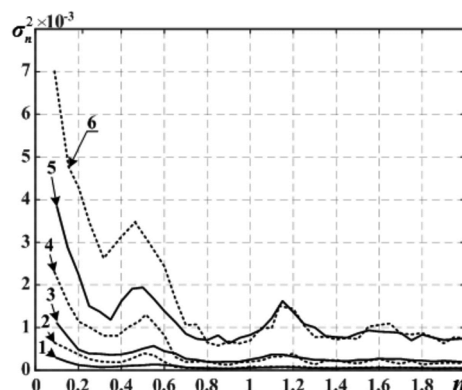


Рис. 6. Дисперсии оценки частоты при неизвестной фазе и использовании инвариантного преобразования

При каждом измерении частоты это преобразование используется дважды. Один раз преобразование (20) применяется к анализируемому сигналу, второй раз к опорному сигналу. Однако преобразование (20), что очевидно, приводит к увеличению влияния шума. Найти границы Рао-Крамера для этого случая не представляется возможным. Результаты моделирования приведены на рис. 5 и 6. Пунктирные графики (2, 4 и 6) получены при использовании инвариантного преобразования. Остальные условия проведения моделирования остались теми же самыми, что и при получении выше графиков.

Из графиков видно, что при использовании инвариантного преобразования дисперсия оценки частоты заметно увеличивается лишь для очень малых относительных частот. Дисперсия оценки фазы увеличивается более существенно.

## Заключение

В работе получены соотношения, позволяющие определить границы Рао-Крамера для совместных и отдельных оценок относительной частоты, начальной фазы и амплитуды гармонического сигнала, представленного короткой выборкой. Под короткой выборкой в работе понимается сигнал, реализация которого содержит доли и единицы периода. Результаты расчетов по полученным выражениям совпадают с результатами моделирования. Проведено моделирование процедуры оценки относительной частоты и фазы сигнала при использовании преобразования, инвариантного к амплитуде сигнала.

## Литература

1. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио связь. 1983. 320 с.

2. Куликов Е.И., Трифонов А.П. Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978, 296 с.

3. Лабутин С.А., Пугин М.В. Помехоустойчивость и быстродействие методов измерения частоты по короткой реализации гармонического сигнала. Измерительная техника. 1998. № 9. С. 34-77.

4. Зандер Ф.В. Алгоритмы оптимальной оценки параметров радиосигнала при времени измерения менее периода и некротном периоде с привязкой результата к началу измерительного интервала. Измерительная техника. 2003. № 2. С. 43-45.

5. Ронкин М.В. Оценка частоты сигнала по короткой реализации в локационных системах с непрерывным излучением на основе обработки квадратурных составляющих / М.В. Ронкин, А.А. Калмыков, Е.И. Хрестина. Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника. 2015. № 1. С. 48-52. EDN TSZXR.

6. Ронкин М.В. Цифровые методы оценки времен прохождения ультразвуковых локационных сигналов / М.В. Ронкин, А.А. Калмыков. Датчики и системы. 2014. № 8(183). С. 11-16. EDN SMEJUV.

7. Дорох К.Ю. Оценка частотных параметров ЛЧМ-сигнала по короткой выборке / К.Ю. Дорох, С.В. Козлов, Е.А. Манюкевич. Радиолокация, навигация, связь: Сборник трудов XXIV Международной научно-технической конференции. В 5-и томах, Воронеж, 17-19 апреля 2018 года. Том 4. Воронеж: Общество с ограниченной ответственностью «Вэлборн», 2018. С. 362-367. EDN YMTNTN.

8. Атаянц Б.А. Измерение частоты гармонического сигнала, принимаемого на фоне аддитивного белого шума, по его короткой реализации / Б.А. Атаянц, В.С. Паршин. Измерительная техника. 2004. № 6. С. 42-45. EDN QIXGDD.

9. Кагаленко М.Б. Точность оценки частоты гармонического сигнала методом нелинейных наименьших квадратов / М.Б. Кагаленко. Цифровая обработка сигналов. 2012. № 1. С. 76-80. EDN OYBXPH.